MÓDULO

P R O B A B I L I D A D
(Primera Edición)

Adriana Morales Robayo

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA – UNAD –
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, TECNOLOGÍA E INGENIERÍA
UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Bogotá D. C, 2007

MÓDULO

CURSO PROBABILIDAD

PRIMERA EDICIÓN
Bogota, 2.007

INTRODUCCIÓN

La Estadística se ha convertido en un efectivo método para describir, relacionar y analizar los valores de datos económicos, políticos, sociales, biológicos, físicos, entre otros. Pero esta ciencia no sólo consiste en reunir y tabular los datos, sino en dar la posibilidad de tomar decisiones acertadas y a tiempo, así como realizar proyecciones del comportamiento de algún evento. Es así como el desarrollo de la teoría de la Probabilidad ha aumentado el alcance de las aplicaciones de la Estadística.

Muchos de los eventos que ocurren en la vida del ser humano no se pueden predecir con exactitud, pues la mayoría de los hechos están influenciados por el azar, es decir, por procesos inciertos, en los que no se está seguro de lo que va a ocurrir. Sería un error afirmar que vivimos en un mundo determinista, en donde no hay influencia del azar y la incertidumbre. La Probabilidad permite un acercamiento a estos sucesos, ponderando las posibilidades de su ocurrencia y proporcionando métodos para tales ponderaciones, creando así modelos Probabilísticos. Precisamente, algunos de esos métodos proporcionados por la teoría de la Probabilidad llevan a descubrir que ciertos eventos tienen una mayor o menor probabilidad de ocurrir que la apreciación hecha a través del sentido común.

De esta manera, la Probabilidad permite estudiar los eventos de una manera sistemática y más cercana a la realidad, entregando una información más precisa y confiable y, por tanto, más útil para las distintas disciplinas del ser humano. De ahí que se vea la importancia de conocer a profundidad las características de ciertos fenómenos cotidianos que el ser humano vive, comprender los métodos Probabilísticos más comúnmente usados y con ellos llegar a tomar las decisiones más apropiadas.

El conocimiento de la *Probabilidad* constituye la base que permite comprender la forma en que se desarrollan las técnicas de la Inferencia Estadística y la toma de decisiones, en otras palabras, es el lenguaje y la fundamentación matemática de la Inferencia Estadística.

El curso de *Probabilidad*, programado como curso académico básico —común entre los diferentes programas que oferta la UNAD—, busca fomentar en el estudiante la capacidad de reconocer y establecer modelos apropiados para describir fenómenos aleatorios que surgen en sus áreas de especialidad, y apunta a que éste reconozca que la Estadística proporciona las herramientas necesarias para hacer inferencias sobre un todo (población) en base a los datos recopilados en sólo unos cuantos elementos observados de la población (muestra) y que la *Probabilidad* aporta los elementos de validación de los métodos estadísticos.

El presente módulo busca dotar al estudiante de las herramientas probabilísticas básicas para el estudio de fenómenos propios de su disciplina de formación y del entorno social, económico y político en que se desenvuelve, cuya evolución temporal o espacial depende del azar, y apunta a que el estudiante tome decisiones más objetivas frente a dichos fenómenos. En él se introducen los conceptos básicos de la Probabilidad y se manejan las distribuciones de probabilidad más conocidas.

Este texto contiene dos unidades didácticas[1], correlacionadas directamente con el número de créditos académicos asignados. La primera de ellas considera los Principios de Probabilidad, necesarios para el cumplimiento de los propósitos y objetivos del curso. En esta unidad se recuerdan algunos conceptos básicos de las técnicas de conteo: permutaciones, variaciones y combinaciones; se identifican conceptos sobre espacios muestrales y eventos, las propiedades básicas de la probabilidad como las reglas de adición y multiplicación, la probabilidad condicional y el teorema de Bayes. En la segunda unidad didáctica, se establece la diferencia entre variables aleatorias discretas y continuas, en términos de su función de probabilidad, valor esperado, varianza y desviación estándar se reconocen algunas de las distribuciones de probabilidad más comunes, tanto las discretas como las continuas. Entre las primeras se contemplan la uniforme discreta, binomial, geométrica, binomial negativa, hipergeométrica y la distribución de Poisson y, como distribuciones de probabilidad continua, se trabajan la distribución uniforme continua, normal, exponencial, Weibull, Erlang, Gamma, Ji-cuadrada, t-student y F de Fisher.

El módulo está dirigido a una población estudiantil que se interesa en la estadística por su valor como instructivo para apoyar procesos de investigación, más que como objeto del conocimiento, que sería el caso si se tratara de estudiantes de estadística o matemática. Es por esto que se evitarán los desarrollos matemáticos de las fórmulas, aunque se presentan algunos razonamientos y procedimientos en que ellas se fundamentan. Se enfatiza más en la forma adecuada de interpretar, seleccionar y utilizar dichos planteamientos, que en las demostraciones, deducciones y desarrollos matemáticos.

El curso está escrito partiendo de la premisa de que el estudiante posee los conocimientos básicos de la Estadística Descriptiva, requisitos mínimos para llevar con éxito las intencionalidades formativas trazadas para el curso. También es deseable tener algunos conocimientos básicos de la teoría de conjuntos y del cálculo integral debido a que estos permiten obtener una perspectiva más amplia de la Probabilidad.

---

[1] Conjunto de conocimientos seleccionados, organizados y desarrollados a partir de palabras clave tomados como conceptos que los tipifican, en articulación con las intencionalidades formativas, destinadas a potenciar y hacer efectivo el aprendizaje mediante el desarrollo de operaciones, modificaciones y actualizaciones cognitivas y nuevas actuaciones o competencias por parte del estudiante. EL MATERIAL DIDÁCTICO. *Roberto J. Salazar Ramos.* UNAD, Bogotá D.C. 2004.

Este texto no pretende reemplazar las diferentes referencias bibliográficas clásicas de la Probabilidad, es el resultado de la consulta de diferentes fuentes que tratan cada tema en forma más amplia. Lo que se pretende es entregar los conceptos de un modo más didáctico, enfocado en el autoaprendizaje y en relación directa con la Guía de Actividades referenciada en el protocolo del presente curso. Al final de cada unidad, el estudiante encontrará las referencias bibliográficas básicas, pero no únicas, para que con ellas refuerce en conceptos y definiciones. Además, encontrará una serie de páginas web recomendadas que amplían los temas tratados. Se trata pues de un material didáctico de apoyo para el curso de *Probabilidad* de la UNAD, como parte de las diferentes y diversas herramientas didácticas en las que se apoya el aprendizaje autónomo.

Finalmente quiero ofrecer mis sinceros agradecimientos a todas aquellas personas que de una u otra forma han permitido que este proyecto se pueda realizar, especialmente a mi familia, que son *mis mejores estimadores insesgados* y a la Ingeniera Mónica Santa, por sus valiosos aportes.

CONTENIDO

UNIDAD DOS

VARIABLES ALEATORIAS
DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN A LA UNIDAD

OBJETIVO GENERAL
OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1.- VARIABLES ALEATORIAS

1.1.- VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

1.2.- VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

1.3.- TEOREMA DE CHÉBYSHEV

EJERCICIOS CAPÍTULO 1

2.- DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETA

2.1.- DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA

2.2..- DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

2.3.- DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

2.4.- DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

2.5.- DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

2.6.- DISTRIBUCIÓN POISSON

3.- DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUA

3.1.- DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTINUA

3.2..- DISTRIBUCIÓN NORMAL

BIBLIOGRAFÍA

Unidad Uno

PRINCIPIOS DE PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN A LA UNIDAD

Para indicar el grado de incertidumbre de un evento, ésta debe expresarse en términos numéricos; para ello se requiere conocer las reglas y operaciones de la probabilidad. Es así como, en esta primera unidad didáctica, se tratarán los principios básicos de Probabilidad.

Esta unidad se divide en cuatro capítulos. Los dos primeros capítulos se centran en nociones básicas para el desarrollo completo del concepto de probabilidad. El primero de ellos introduce los términos básicos que se encuentran ligados al lenguaje estadístico y los fundamentos necesarios para el estudio de la teoría de la probabilidad. El segundo capítulo desarrolla la teoría del conteo y las técnicas para determinar el número de veces de ocurrencia de un evento. En el capítulo 3 se desarrolla el concepto de probabilidad y se examinan las diferentes interpretaciones que se tienen de ella, también se trata aquí los axiomas que satisfacen las probabilidades de cualquier experimento aleatorio, las reglas de adición y de multiplicación para probabilidades, la probabilidad condicional, la independencia de eventos y el Teorema de Bayes.

OBJETIVO GENERAL

Analizar e interiorizar los principios de Probabilidad, identificando sus propiedades, leyes y los campos de aplicación que tiene esta ciencia propia de la estadística.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Introducir los fundamentos necesarios para el estudio de la teoría de la probabilidad.
- Reconocer las características de un experimento aleatorio.
- Identificar el espacio muestral y distintos eventos de experimentos aleatorios.
- Adquirir las herramientas y habilidades necesarias de las técnicas de conteo.
- Calcular las medidas de espacios muestrales y eventos aplicando reglas básicas de conteo, permutaciones y combinaciones.
- Establecer y aplicar las técnicas de conteo a través de permutaciones y combinaciones.
- Enunciar y aplicar el principio fundamental de conteo o principio multiplicativo y utilizar diagramas de árbol para ejemplificarlo
- Definir y estudiar diversos tipos de espacios de probabilidad.
- Reconocer la importancia de la teoría de las probabilidades en el análisis e interpretación de información estadística.
- Aplicar las propiedades matemáticas básicas de las probabilidades para el cálculo de la probabilidad de diferentes eventos que ocurren en experimentos aleatorios.
- Calcular la probabilidad de un evento, dado que otro ha sucedido.
- Demostrar la independencia o no de dos o más eventos.
- Enunciar y aplicar la ley de la probabilidad total.
- Obtener la probabilidad de eventos que involucren el uso del principio multiplicativo, diagramas de árbol y las técnicas de conteo.
- Calcular la probabilidad de causas aplicando el teorema de Bayes.

RESEÑA HISTÓRICA DE LA PROBABILIDAD[2]

El origen de la teoría de las probabilidades es oscuro y ni siquiera los historiadores están de acuerdo con la fecha en que puede situarse. En 1494 (apenas dos años después del descubrimiento de América), el italiano Pacioli planteó algunas preguntas concretas sobre la probabilidad, pero nunca intentó abordar el tema de manera científica.

Cincuenta y seis años más tarde, también en Italia, el célebre y controvertido matemático Girolamo Cardano (1501-1576) lo estudió con mayor profundidad y escribió un tratado sobre los juegos de azar, pero sus escritos no fueron publicados sino hasta después de su muerte, bajo el título *Líber de Ludo Aleae* (Libro sobre los juegos del azar). Ése fue el primer tratado sobre la teoría de las probabilidades que se escribió en el mundo y pasarían más de cien años antes de que se escribiera el segundo.

Con toda seguridad, el estudiante recordará o asociará el nombre de Cardano con la solución de las ecuaciones generales de tercer y cuarto grado por medio de radicales, aunque algunos historiadores sostienen que esas fórmulas Cardano se las usurpó al veneciano Niccolo Tartaglia (1500-1557). Al parecer, Cardano, adicto a los juegos de azar y las apuestas, desarrolló por su cuenta la teoría de probabilidades para sacar ventaja en el juego, pero sus resultados más importantes jamás los publicó por miedo a que sus contrincantes en el juego también los utilizaran. Se cuenta que Cardano tenía frecuentes disputas con sus adversarios en el juego y siempre cargaba un cuchillo, con el cual hirió en la cara a un contrincante que no quería pagarle una apuesta. Es una ironía de la historia que Cardano sea reconocido por algo que aparentemente no hizo (la solución general de las cúbicas y las cuárticas), y en cambio no sea reconocido por algo que sí hizo (ser el primero en crear las bases de la teoría de las probabilidades). A pesar de su pasión compulsiva por el juego y las apuestas, Cardano logró escribir muchos libros acerca de todo lo que le interesaba, era un hombre sabio, estudió medicina y amaba la música. Su infancia fue muy dura: su madre jamás lo quiso, por lo que lo regaló a unos parientes, quienes lo golpeaban y lo hacían trabajar duro. Ya de viejo pronosticó que moriría exactamente a los 75 años, y efectivamente se suicidó el 21 de septiembre de 1576 a la edad de 75 años.

En 1654, y desconociendo lo que había escrito Cardano más de cien años atrás, el gran matemático francés (o geómetra, como se autonombraba) Blas Pascal redescubrió las bases de la teoría de las probabilidades con un enfoque mucho más universal y riguroso. Se cuenta que por aquella época el caballero de Mere

[2] SOTOMAYOR G. y P. WISNIESKI Piotr. Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. Thomson Learning. 2001.

formuló, en París, la siguiente pregunta al célebre ex prodigio Blas Pascal: "Si alguien lanza un par de dados ordinarios una y otra vez, ¿cuántas veces habrá que lanzarlos para que se pueda apostar ventajosamente a que aparecerá el doble seis?" Aunque hoy en día este problema lo puede resolver con facilidad cualquier estudiante de un primer curso de probabilidad, en aquella época fue un planteamiento novedoso. Pascal se puso a trabajar en este asunto y al cabo de unos días halló una serie de fórmulas simples que permitían resolver el problema y otros similares. Pascal informó entonces al Caballero de Mere que ya tenía la respuesta a su pregunta: resulta ventajoso apostar al doble seis en 25 tiradas de los dados o más; pero es desventajoso hacer semejante apuesta en 24 tiradas o menos. Al parecer, a raíz de este incidente, Pascal se interesó por el estudio matemático serio de los fenómenos relacionados con el azar, aunque no se registra ninguna publicación suya al respecto: pero hubo un intercambio de cartas entre Pascal y otro ilustre matemático —que curiosamente era abogado de profesión—, Pierre Fermat.

Aproximadamente tres años después de este incidente, un joven holandés de 27 años radicado temporalmente en París y de nombre Christian Huygens, tuvo acceso a las cartas que habían intercambiado Pascal y Fermat, y profundizó las ideas de ambos en una pequeña monografía sobre la incertidumbre y el azar *(El razonamiento en los juegos del azar).* Ese fue el segundo libro sobre la teoría de probabilidades que apareció en el mundo y además marcó el camino sobre el que debería desarrollarse esta ciencia.

Algunos años después de la aparición del libro de Huygens, Jacobo Bernoulli publicó en Basilea, Suiza, su obra *Ars Conjectandi,* en la cual aparecen por primera vez las fórmulas y leyes básicas de la teoría de las probabilidades. El desarrollo posterior de esta ciencia tuvo lugar primero en Francia, y algunas décadas después en Inglaterra y Alemania. Un fuerte desarrollo de esa teoría está asociado con los nombres de ilustres matemáticos franceses como el Marqués Pierre Simón de Laplace (1749-1827), Abraham DeMoivre (1667-1754), Georges-Louis Lecler (Conde de Buffon), Joseph Louis Francois Bertrand (1822-1900) (este último autor del libro *Calcul des Probabilités),* así como el reverendo Thomas Bayes en Inglaterra; el ruso Pafnuty Lvovich Chébyshev (1821-1894) y Carlos Federico Gauss en Alemania, este último considerado por muchos como el matemático más notable en toda la historia de la humanidad hasta nuestros días, no tanto por la cantidad (la cual fue bastante exigua) sino por la impresionante calidad y originalidad de sus trabajo y descubrimientos, los cuales tuvieron influencia determinante en casi todas las ramas de las matemáticas.

En el siglo XIX, Pierre Simon, marqués de Laplace (1749 - 1827), unificó todas estas primeras ideas y compiló la primera teoría general de la probabilidad.

A mediados del siglo XIX, un fraile agustino austriaco, Gregor Mendel, inició el estudio de la herencia, la genética, con sus interesantes experimentos sobre el cruce de plantas de diferentes características. Su obra, La matemática de la Herencia, fue una de las primeras aplicaciones importantes de la teoría de probabilidad a las ciencias naturales.

La teoría de la probabilidad fue aplicada con éxito en las mesas de juego y, lo que es más importante, en problemas sociales y económicos. La industria de seguros requería un conocimiento preciso acerca de los riesgos de pérdida. Muchos centros de aprendizaje estudiaron la probabilidad como una herramienta para el entendimiento de los fenómenos sociales.

Nuestra necesidad de tratar con total incertidumbre nos lleva a estudiar y utilizar la teoría de la probabilidad. Al organizar la información y considerarla de manera sistemática, seremos capaces de reconocer nuestras suposiciones, comunicar nuestro razonamiento a otras personas y tomar una decisión más sólida.

CAPITULO 1

EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y ESPACIO MUESTRAL.

En la teoría de probabilidades se habla a menudo de experimentos aleatorios y de fenómenos aleatorios. La palabra aleatorio proviene del vocablo latino alea, el cual significa suerte o azar. Un fenómeno aleatorio, es por tanto, aquél cuyo resultado está fuera de control y que depende del azar.

Experimentos o fenómenos aleatorios son los que pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de éstos va a ser observado en la realización del experimento.

Si dejamos caer una piedra o la lanzamos, y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etc., sabremos con seguridad dónde caerá, cuánto tiempo tardará, etc. Es una experiencia determinista. Si echamos un dado sobre una mesa, ignoramos qué cara quedará arriba. El resultado depende del azar. Es una experiencia aleatoria.

Suceso aleatorio es un acontecimiento que ocurrirá o no, dependiendo del azar.

La vida cotidiana está plagada de sucesos aleatorios. Muchos de ellos, de tipo sociológico (viajes, accidentes, número de personas que acudirán a un gran almacén o que se matricularán en una carrera...) aunque son suma de muchas decisiones individuales, pueden ser estudiados, muy ventajosamente, como aleatorios.

1.1 ESPACIO MUESTRAL

Espacio muestral es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. En adelante lo designaremos por **S**. A la colección de resultados que se obtiene en los experimentos aleatorios se le llama espacio muestral.

EJEMPLO 1.1:

En un dado, S={1,2,3,4,5,6}

En una moneda, S={C,+}

Un experimento aleatorio cumple con las siguientes características:

- El experimento puede realizarse bajo idénticas condiciones cuantas veces sea necesario.
- Los posibles resultados son todos conocidos.
- El resultado del experimento es incierto, depende del azar.
- Se observa cierto patrón de regularidad a medida que aumentan las repeticiones.

EJEMPLO 1.2 :

En una empresa de lácteos hacen control de calidad al llenado de bolsas de leche de 1000 cc de volumen. Cada 20 minutos se verifica el volumen de llenado de la máquina. La evaluación continúa hasta encontrar una bolsa que no cumple las especificaciones.
Sea s el hecho de que la bolsa de leche cumple con las especificaciones de volumen, y *n* las que no cumple con ellas. ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

El espacio muestral se representa como una secuencia de las letras *s* y *n*. Dado que el experimento termina cuando una bolsa de leche no cumple con las especificaciones de volumen, el espacio muestral estará formado por una secuencia de *s* seguida por una *n*.

$$S = \{n, sn, ssn, sssn, ssssn, sssssn, \ldots\}$$

1.2. SUCESOS O EVENTOS. OPERACIONES CON SUCESOS.

Sucesos o Eventos.

El espacio muestral asociado al lanzamiento de tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos es:

S = {3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18}

Podemos considerar algunos subconjuntos de S, por ejemplo:

Salir múltiplo de 5:	A = {5,10,15}
Salir número primo:	C = {2,3,5,7,11,13,17}
Salir mayor o igual que 12:	D = {12,13,14,15,16,17,18}

Todos estos subconjuntos del espacio muestral S los llamamos sucesos o eventos.

Suceso o Evento de un fenómeno o experimento aleatorio es cada uno de los subconjuntos del espacio muestral S. Los elementos de S se llaman sucesos individuales o sucesos elementales. También son sucesos el suceso vacío o suceso imposible , Ø, y el propio S, suceso seguro.

Si S tiene un número finito, n, de elementos, el número de sucesos de E es 2^n.

EJEMPLO 1.3:

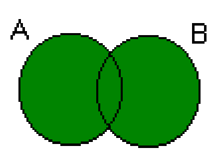
- {1,2},{2,4,6},{3,5} son sucesos. {1},{2}, {3}..., son sucesos individuales.
- En un dado hay $2^6 = 64$ sucesos.
- En una moneda hay $2^2 = 4$ sucesos, que son: Ø, {C},{+}, {C,+}
  Es decir, S={Ø,{C},{+},{C,+}}

1.2.1.- Operaciones con sucesos o evento

Ya que los eventos o sucesos son subconjuntos, entonces es posible usar las operaciones básicas de conjuntos[3], tales como uniones, intersecciones y complementos, para formar otros eventos de interés, denominados ***eventos o*** sucesos compuestos.

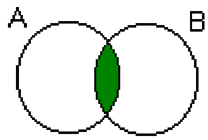
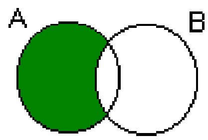
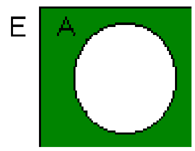
Dados dos sucesos, A y B, se llaman:

Unión



$A \cup B$ es el suceso formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B.

[3] En el desarrollo del presente módulo se parte de la premisa de que el estudiante maneja los diferentes conceptos de la Teoría de Conjuntos. Se recomienda al estudiante que consulte el módulo de Lógica Matemática o cualquier otro texto que contenga dichos conceptos.

Intersección		$A \cap B$ es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y de B.
Diferencia		$A - B$ es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.
Suceso complementario		El suceso A´ =E - A se llama suceso complementario de A.

Dos sucesos A y B, se llaman incompatibles cuando no tienen ningún elemento común. Es decir, cuando $A \cap B = \varnothing$ (A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos)

Decimos que un suceso se ha verificado, si al realizar el experimento aleatorio correspondiente, el resultado es uno de los sucesos elementales de dicho suceso. Por ejemplo, si al lanzar un dado sale 5, se ha verificado, entre otros, los sucesos {5}, {1,3,5} o S.

De manera análoga, decimos que:

- El suceso $A \cup B$ se verifica cuando se verifica uno de los dos o ambos.
- El suceso $A \cap B$ se verifica cuando se verifican simultáneamente A y B.
- El suceso A´, contrario de A, se verifica cuando no se verifica A.
- Dos sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes no se verifican simultáneamente.

EJEMPLO 1.4:

En el experimento S = "lanzar un dado al aire", consideramos los sucesos:

A = "sacar un número par".
B = {1,2,3,5} = "obtener un 1, 2, 3 ó 5".

C = {4,6} = "obtener un 4 ó un 6".
D = {2,4,6} = "obtener un 2, 4 ó 6".
F = {1,3} = "obtener un 1 ó un 3".
G = "obtener un múltiplo de 3".

- ❖ A y D son sucesos iguales al estar formados por los mismos sucesos elementales.
- ❖ C está contenido en A. Luego $C \cap A$= C, puesto que siempre que ocurre el suceso C (sacar 4 ó 6) ocurre el suceso A, puesto que se obtiene un número par.
- ❖ B y C son incompatibles, ya que B$\cap$ C = Ø y complementarios, al cumplirse B$\cup$C = E.
- ❖ $A \cup B$= "sacar un número par" $\cup${1,2,3,5} = {1,2,3,4,5,6} = E.
- ❖ A$\cap$ G = {2,4,6}$\cap$ {3,6} = {6}, es decir, el suceso intersección de los sucesos "sacar un número par" y "obtener un múltiplo de tres" es "sacar un 6".
- ❖ B-D = B $\cap \overline{D}$= {1,2,3,5}$\cap$ {1,3,5} = {1,3,5} = "obtener un número impar" = $\overline{A}$.
- ❖ C y F son incompatibles puesto que C$\cap$ F = Ø.

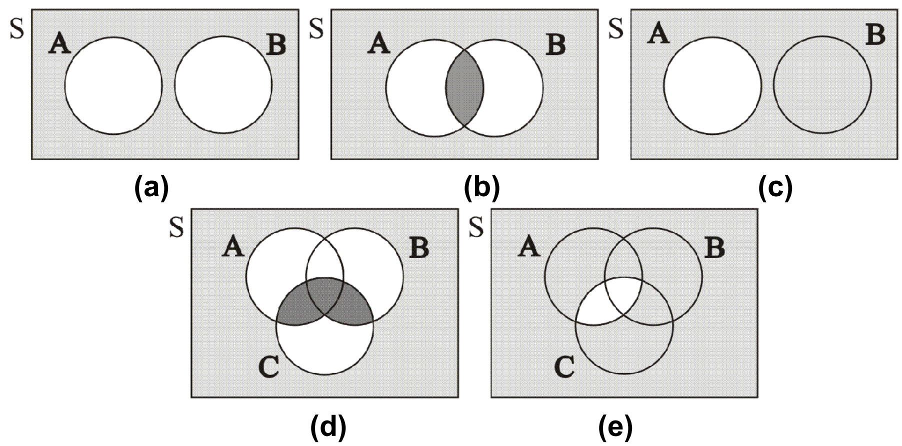
Las operaciones unión, intersección y complementación (contrario) verifican las propiedades:

	Unión	Intersección
1. Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
2. Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
4. Simplificación	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
5. Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap$
6. Elemento neutro	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
7. Absorción	$A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$

Para describir las relaciones entre eventos se usan con frecuencia los diagramas. Estos bien pueden ser los denominados diagramas de Venn o los diagramas de árbol. A continuación se describen ambos tratamientos gráficos de los eventos de un espacio muestral determinado.

Los ***diagramas de Venn*** suelen emplearse para representar un espacio muestral y sus eventos. En la figura siguiente se contempla un espacio muestral *S* (los puntos dentro del rectángulo) y los eventos *A*, *B* y *C* como subconjuntos de este. Se representan diferentes diagramas de Venn, ilustrando varios eventos combinados.

Figura 1.1
Diagramas de Venn



(a) Espacio muestral *S* con los eventos *A* y *B* mutuamente excluyentes, $A \cap B = \varnothing$.
(b) Intersección de los eventos *A* y *B* del espacio muestral *S*, $A \cap B$.
(c) Complemento del evento *A* (*A´*) en el espacio muestral *S*.
(d) Evento $(A \cup B) \cap C$.
(e) Evento $(A \cap C)'$

EJEMPLO 1.5:

Las orquídeas de un vivero, presentan las siguientes características:

		Tamaño de pétalo	
		Grande	Pequeño
Color	Lila	40	4
	Blanca	2	3

Sean los eventos:
- ***A***: la orquídea es de pétalo grande.
- ***B***: la orquídea es de color lila.

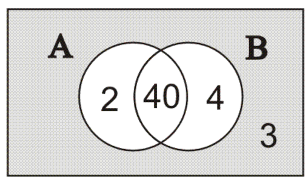
Determine el número de muestras en $A \cap B$, $A`$ y $A \cup B$. Represente con diagramas de Venn este espacio muestral y los eventos A y B. Indique el número de resultados en cada región del diagrama.

Observe que *siempre* es necesario describir el evento que se va a considerar dentro del espacio muestral.

De acuerdo a las características descritas, el evento $A \cap B$ está formado por 40 orquídeas para las cuales el tamaño de pétalos es grande y son de color lila al mismo tiempo. El evento $A`$ contiene 7 orquídeas para las que sus pétalos son pequeños, independiente de su color. El evento $A \cup B$ está conformado por 46 orquídeas en las que sus pétalos son grandes o su color es lila (o ambas características a la vez).

El siguiente diagrama de Venn representa dicho espacio muestral y los dos eventos A y B. Los números indican la cantidad de resultados en cada región del diagrama.

Figura 1.2
Diagrama de Venn, ejemplo 1.5

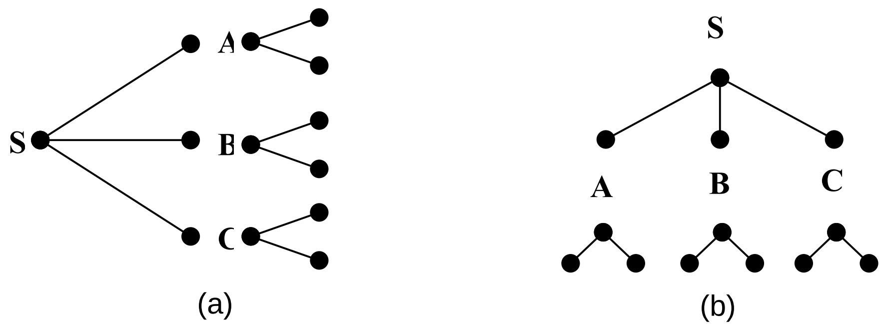


Cuando un espacio muestral puede construirse en varios pasos o etapas suele ser más útil hacer uso de los ***diagramas de árbol***. Cada una de las n_1 maneras de completar el primer paso puede representarse como una rama del árbol, cada una de las maneras de completar el segundo paso puede representarse con n_2 ramas que comienzan donde terminan las ramas originales, y así sucesivamente.

Un diagrama de árbol es una especie de mapa de acontecimientos en donde se describen los eventos básicos que ocurren en un experimento aleatorio. Este gráfico está formado por segmentos de rectas y puntos. Los eventos que ocurren se denotan por puntos. Este diagrama puede ser dibujado de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo, no hay restricciones para ello (Ver figura 3).

Este tipo de diagramas es muy usual no sólo para describir un espacio muestral, sino en situaciones de probabilidad, caso en el cual la probabilidad del evento se indica sobre el segmento de recta, también en combinatoria y en muchas otras ramas de la matemática.

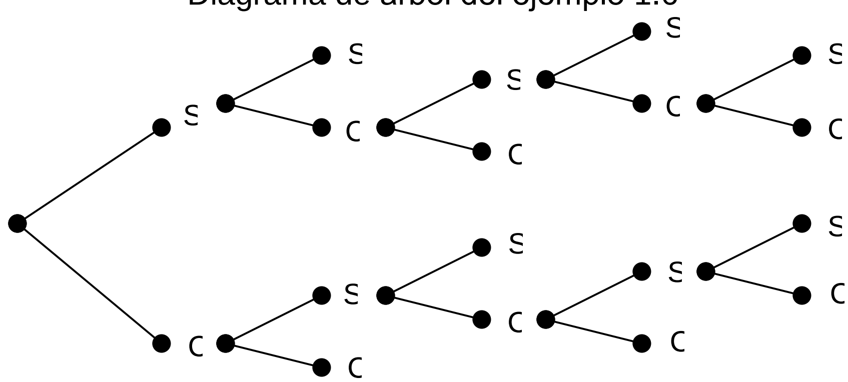
Figura 1.3
Diagramas de árbol
(a) Vertical, (b) Horizontal



EJEMPLO 1.6:

Sofía y Camila Intervienen en un torneo de tenis. La primera persona que gane dos juegos seguidos o que complete tres, gana el torneo. Use un diagrama de árbol para determinar los posibles resultados del torneo.

Figura 1.4
Diagrama de árbol del ejemplo 1.6



El recorrido desde el principio del árbol hasta los puntos terminales, indica quién ganó cada juego en el torneo individual de tenis. Observe que hay 10 puntos terminales que corresponden a los 10 resultados posibles del torneo, ellos son:

{ **SS, SCSS, SCSCS, SCSCC, SCC, CSS, CSCSS, CSCSC, CSCC, CC.** }

EJERCICIOS CAPÍTULO 1

1.- Proporcione una descripción razonable del espacio muestral de cada uno de los siguientes experimentos aleatorios. Utilice un diagrama de árbol.

a.- Lanzar tres veces una moneda y observar la serie de sellos o caras que aparecen.
b.- Tirar un dado, si el resultado es un numero par lanzar una moneda, si el resultado es un numero impar lanzar una moneda dos veces.

2.- Se desea observar una familia que posee dos automóviles y para cada uno observamos si fue fabricado en Colombia, si es Americano o si es Europeo.

a.- Cuales son los posibles resultados de este experimento?
b.- Defina el evento A: Los dos automoviles no son fabricados en Colombia, Liste el evento B: Un automovil es colombiano y el otro no.
c.- Defina los eventos $A \cup B$ y $B \cap A$.

3- La biblioteca de una universidad tiene cinco ejemplares de un cierto texto en reserva, Dos ejemplares (1 y 2) son primera edición y los otros tres (3, 4 y 5) son segundas ediciones. Un estudiante examina estos libros en orden aleatorio, y se detiene cuando selecciona una segunda impresión. Ejemplos de resultados son: 5, 213.

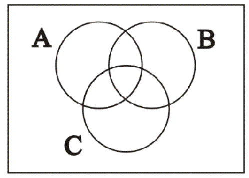
a.- haga una lista de los elementos de S
b.- Liste los eventos A: el libro 5 es seleccionado, B: exactamente un libro debe ser examinado, C: el libro 1 no es examinado
c.- Encuentre: $A \cup B$, $B \cap A$., $A \cup C$ y $B \cap C$.

4.- Dos estaciones de gasolina se encuentran en un cierto cruce de la ciudad, en cada una hay 4 bombas para despacho de gasolina. Considere el experimento en que el numero de bombas en uso en un día particular se determina para cada una de las estaciones. Un resultado experimental especifica cuantas bombas están en uso en la primera estación y cuantas están en uso en la segunda.

a.- Cuales son los posibles resultados del experimento
b.- Defina el evento A: el numero de bombas en uso es el mismo en ambas estaciones, el evento B: el numero de bombas en uso es máximo dos en cada estación, el evento C: el numero total de bombas en uso en ambas estaciones es cuatro.
c.- Defina $A \cup B$, $B \cap C$

5.- El siguiente diagrama de Venn contiene tres eventos. Reproduzca la figura y sombree la región que corresponde a cada uno de los siguientes eventos:

a. A'
b. $A \cap B$
c. $(A \cap B) \cup C$
d. $(B \cup C)'$
e. $(A \cap B)' \cup C$



6.- Una mujer es portadora de hemofilia clásica. Esto significa que, aunque la mujer no tenga hemofilia, puede transmitir la enfermedad a sus hijos. Ella tiene tres hijos. Describa el espacio muestral de este experimento.

7.- En una encuesta realizada entre 200 inversionistas activos, se halló que 120 utilizan corredores por comisión, 126 usan corredores de tiempo completo y 64 emplean ambos tipos de corredores. Determine el número de inversionistas tales que:

a. Utilizan al menos un tipo de corredor.
b. Utilizan exactamente un tipo de corredor.
c. Utilizan sólo corredores por comisión.
d. No utilizan corredores.

Represente con un diagrama de Venn este espacio muestral y los eventos relacionados. Indique el número de resultados en cada región del diagrama.

8.- La tabla siguiente presenta un resumen de las características solicitadas en 100 órdenes de compra de computadores.

		Memoria adicional	
		No	Si
Procesador opcional	No	75	7
de alta velocidad	Si	10	8

Sean:
A: evento donde la orden de compra es solicitada sin memoria adicional y sin procesador opcional de alta velocidad.
B: evento donde la orden de compra es solicitada sin memoria adicional.

Determine el número de muestras en $A' \cap B$, B' y $A \cup B$. Dibuje un diagrama de Venn que represente estos datos.

9.- Se le pidió a 110 comerciantes que dijeran que tipo de programa de televisión preferían. La tabla muestra las respuestas clasificadas a la vez según el nivel de estudios de los comerciantes y según el tipo de programa preferido.

	Nivel de estudios			
Tipo de Programa	Colegio (A)	Universidad (B)	Postgrado (C)	Total
Deportes (D)	15	8	7	30
Noticias (N)	3	27	10	40
Drama (M)	5	5	15	25
Comedia (W)	10	3	2	15
Total	33	43	34	110

Especifique el numero de elementos en cada uno de los siguientes eventos y defínalos con palabras:

a) D,

b) $A \cup M$

c) W `

d) $C \cap N$

e) $D \cap B$

f) $(M \cap A)'$

CAPITULO 2

TÉCNICAS DE CONTEO

En el cálculo de las probabilidades se debe poder determinar el número de veces que ocurre un evento o suceso determinado. Es muchas situaciones de importancia práctica es imposible contar físicamente el numero de ocurrencias de un evento o enumérelos uno a uno se vuelve un procedimiento engorroso. Cuando se esta frente a esta situación es muy útil disponer de un método corto, rápido y eficaz para contar.

A continuación se presentan algunas de estas técnicas, denominadas **técnicas de conteo** o **análisis combinatorio**, entre las cuales se tienen: el principio fundamental del conteo, permutaciones, variaciones, combinaciones, la regla del exponente y el diagrama de árbol.

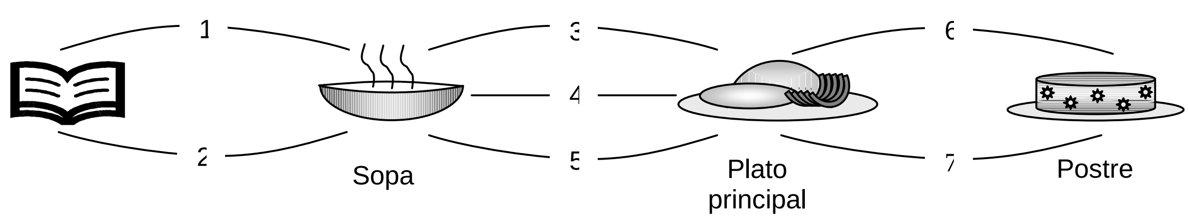
2.1 PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

En la teoría fundamental del conteo se tienen dos principios básicos, que son la base para desarrollar otros conceptos como permutaciones y combinaciones que se verán más adelante.

2.1.1 Principio de multiplicación o multiplicativo

Algunos problemas de probabilidad pueden resolverse aplicando este principio. Suponga que una persona desea preparar un almuerzo para sus amigos y tiene dos recetas para la sopa, tres para el plato principal y dos para el postre. ¿De cuántas maneras puede el anfitrión hacer su menú? En la figura 5 se señalan todas las maneras posibles para preparar el almuerzo.

Figura 2.5
Diagrama de las posibles opciones para preparar un menú



Las alternativas que tendrá son:

{1,3,6}	{1,3,7}	{1,4,6}	{1,4,7}	{1,5,6}	{1,5,7}
{2,3,6}	{2,3,7}	{2,4,6}	{2,4,7}	{2,5,6}	{2,5,7}

En total se tienen 12 maneras diferentes de preparar un delicioso almuerzo. Aplicando el principio de multiplicación se tiene:

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

Generalizando, si un evento determinado puede realizarse de n_1 maneras diferentes, y si un segundo evento puede realizarse de n_2 maneras diferentes, y si, además, un tercer evento puede realizarse de n_3 maneras diferentes y así sucesivamente, y si al mismo tiempo cada evento es independiente del otro, entonces el número de maneras en que los eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots$$

2.1.2 Principio aditivo

Este principio tiene las mismas premisas del principio multiplicativo, pero con la condición no de que los eventos sean independientes sino de que sean mutuamente excluyentes, es decir que cada uno ocurra sin la necesidad de que otro lo haga. El número total de maneras en las que pueden realizarse los eventos es la adición:

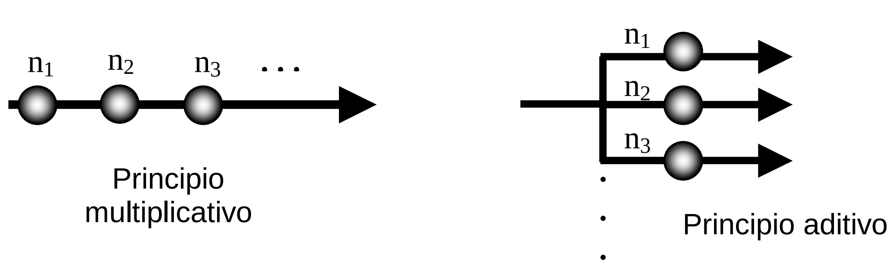
$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$$

Suponga, ahora, que la persona que prepara el menú para sus amigos preparará pescado como plato principal. Para preparar el pescado, él encuentra cinco maneras diferentes de hacerlo al horno, dos para hacerlo frito y tres para prepararlo cocido. ¿De cuántas maneras diferentes puede cocinar su pescado?

Cada una de las maneras de preparar el pescado es excluyente de las otras dos. Es decir, si el cocinero decide preparar el pescado cocido, ya no podrá prepararlo ni frito ni al horno; de igual manera sucede si decide hacerlo al horno o frito. Así que en total, y de acuerdo con el principio aditivo, sólo hay 5+2+3=10 maneras diferentes de cocinar el pescado.

Figura 2.6

Esquema de interpretación de los principios multiplicativo y aditivo



El esquema de la figura 1.6 ilustra una interpretación sencilla de ambos principios[4]. Más adelante se desarrollan los conceptos de eventos independientes y eventos mutuamente excluyentes, pero ya inicia un primer acercamiento a ellos.

2.2 FACTORIAL DE UN NÚMERO

En el análisis combinatorio interviene con mucha frecuencia el concepto de factorial de un entero no negativo *n*. Este se denota por el símbolo ***n!*** y se define como el producto de *n* por todos los enteros que le preceden hasta llegar al uno.

Simbólicamente queda expresado como:

$$n! = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)\ldots 1 \quad n \leq 1$$

La excepción es el caso de *0!* El cual conviene definirlo como igual a 1 con objeto de preservar la validez de las fórmulas en casos extremos. Muchas calculadoras traen una tecla factorial, verifique que la suya la tenga y practique.

EJEMPLO 2.7

Calcule:

a. $6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720$

b. $15! = 15\times 14\times 13\times ...\times 3\times 2\times 1 = 1'307.674.368.000$

c. $0!+5! = (1) + (5\times 4\times 3\times 2\times 1) = 121$

d. $\frac{13!}{11!} = \frac{13\times 12\times 11\times ...\times 3\times 2\times 1}{11\times 10\times 9\times ...\times 3\times 2\times 1} = 13\times 12 = 156 \Leftrightarrow \frac{13!}{11!} = \frac{13\times 12\times 11!}{11!} = 13\times 12 = 156$

e. $\frac{7!}{10!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{10\times 9\times ...\times 3\times 2\times 1} \Leftrightarrow \frac{7!}{10!} = \frac{7!}{10\times 9\times 8\times 7!} = \frac{1}{10\times 9\times 8} = \frac{1}{720}$

2.3 PERMUTACIONES Y VARIACIONES

Considere un conjunto de elementos $S = \{a, b, c\}$. Una ***permutación*** de los elementos es un acomodo u ORDENAMIENTO de ellos. Así:

abc *acb* *bac* *bca* *cab* *cba*

son las permutaciones de los elementos del conjunto ***S*** y son en total 6 posibles acomodos. Esto es:

$$3! = 3\times 2\times 1 = 6$$

[4] Modificado de *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*, Gabriel Velasco S. y Piotr Marian Wisniewski. Thomson Learning. México. 2001

El número de ***permutaciones*** (acomodos u ordenaciones) de *n* elementos distintos, tomados todos de una vez, se denota por ***n!***

Una ordenación de un número *r* de elementos del conjunto de *n* elementos, $r \leq n$, es denominada ***variación.*** Son permutaciones en las que implica un orden en la colocación de los elementos, tomando únicamente una parte de los elementos. Una variación puede construirse seleccionando el elemento que será colocado en la primera posición del arreglo de entre los *n* elementos, para luego seleccionar el elemento de la segunda posición de entre los *n-1* elementos restantes, para seleccionar después el tercer elemento de entre los *n-2* restantes, y así sucesivamente. Se trata pues de una *permutación de n elementos tomando r a la vez.*

El número de permutaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez se denota como ${}_nP_r$ o V_r^n y se define como:

$$ {}_nP_r = P_r^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} $$

Observe que en el caso especial de *r*=*n*, se tiene:

$$ {}_nP_n = n(n-1)(n-2)\ldots3\times2\times1 = n! $$

En el siguiente ejemplo se hará un análisis básico y didáctico para comprender fácilmente el uso adecuado de las permutaciones y las variaciones.

Ejemplo 2.7

Suponga que se tienen las bases Tiamina (T), Adenina (A), Citosina (C) y Guanina (G). ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar estas bases en una secuencia de longitud 4, sin repetir ninguna base?

Supóngase que en las siguientes casillas se ubicarán las bases.

En la primera casilla se puede ubicar una de las cuatro bases, cualquiera de ellas. De modo que se tienen 4 formas de llenar esta casilla. Independiente de la base elegida para la primera casilla, quedan tres bases no seleccionadas, pues se ha aclarado que no se puede repetir ninguna base. De modo que la segunda casilla podrá llenarse de 3 maneras diferentes. La tercera casilla se puede llenar de 2 maneras diferentes. Una vez llenada la tercera casilla, queda una sola base que deberá ser ubicada en la cuarta casilla. De modo que el total de formas diferentes de llenar estas cuatro casillas es:

4	3	2	1	= 24 = 4!

Haciendo uso de los conceptos hasta ahora estudiados, se trata de conocer el número de permutaciones de 4 elementos distintos, tomados todos de una vez. Así:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Bien, ahora suponga que se seleccionará una secuencia de 2 elementos, ¿de cuántas maneras se pueden ordenar estas bases?

Se tienen ahora las siguientes casillas:

En la primera casilla se puede ubicar una de las cuatro bases, cualquiera de ellas. De modo que se tienen 4 formas de llenar esta casilla. Independiente de la base elegida para la primera casilla, quedan tres bases no seleccionadas. De modo que la segunda casilla podrá llenarse de 3 maneras diferentes. Así, el total de formas diferentes de llenar estas cuatro casillas es:

4	3	= 12

Se trata de un problema tipo variación, en donde se pide el número de permutaciones de 4 elementos distintos tomados 2 a la vez.

$${}_4P_2 = 4(4-2+1) = 4 \times 3 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad {}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

Cuando uno o varios elementos están repetidos, el cálculo de las permutaciones varía; en este caso se habla de ***permutaciones con repetición***. El número de permutaciones de *n* objetos de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales, …, n_r son iguales, es:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

Ejemplo 2.8

Calcular el número de acomodos distintos de la palabra **CASA.**

Para la palabra **CASA** se tendrían un número inferior a 24 acomodos distintos. Debe tenerse en cuenta la repetición de la letra **A**. Debe aplicarse:

$$\frac{4!}{2!} = 3 \times 4 = 12$$

Compruebe cuáles son esas 12 permutaciones posibles de la palabra CASA.

Ahora bien, ¿de cuántas maneras distintas se puede ordenar la palabra CASAS?

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Compruebe cuáles son esas 10 permutaciones posibles.

2.4 COMBINACIONES

Suponga que tiene un conjunto de *n* elementos. Una ***combinación*** de ellos, tomados *r* a la vez, es un subconjunto de *r* elementos donde **el orden no se tiene en cuenta**. El número de combinaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez, $r \leq n$, sin tener en cuenta el orden, es:

$${}_nC_r = C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

Ejemplo 2.9

- Sea el conjunto $S = \{a, b, c, d\}$, si se desea combinar los cuatro elementos a la vez, ¿cuántas combinaciones se podrán hacer?
  Una sola combinación, ya que al no importar el orden de colocación da lo mismo cualquiera de ellas. Compruébelo usando la fórmula.

- Si se desean combinar esas cuatro letras en subconjuntos de dos elementos, ¿cuántas combinaciones se podrán hacer?
  Las combinaciones posibles tomadas dos a la vez son:

ab, ac, ad, bc, bd, cd

Observe que el subconjunto compuesto de los elementos a y b puede ser {a, b} o {b, a}, pues en una combinación no se tiene en cuenta el orden. El número de posibles combinaciones es:

$$ {}_4C_2 = \frac{4!}{(4-2)!\ 2!} = 6 $$

El uso de combinaciones es más usual cuando se trata de contar las posibilidades de ordenar un conjunto de elementos independientemente de su colocación o posición. En el siguiente ejemplo se verá su uso más común, en donde no importa quién o qué es tomado de primero, o en qué orden específico es tomado, de un subconjunto de elementos determinado.

EJEMPLO 2.10

En una asamblea de socios de una importante empresa del país, compuesta de 7 hombres y 5 mujeres, se acuerda conformar una comisión de verificación de actividades comerciales en la región. Esta comisión debe estar compuesta por 3 hombres y 2 mujeres. ¿De cuántas maneras puede escogerse dicha comisión?

De los 7 hombres pueden seleccionarse 3. Esto es:

${}_7C_3 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$ posibles maneras de seleccionar 3 hombres de un conjunto de 7.

De las 5 mujeres pueden seleccionarse 2. Esto es:

${}_5C_2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ posibles maneras de seleccionar 2 mujeres de un conjunto de 5.

Por consiguiente, la comisión puede escogerse de $35 \times 10 = 350$ maneras diferentes.

En la gran mayoría de calculadoras científicas existe un par de teclas que simplifican el cálculo de las permutaciones y las combinaciones. Observe si en su calculadora de trabajo se encuentran dichas teclas. Para las permutaciones la tecla se expresa como ${}_nP_r$ ó P_n^r ó $P(n,r)$ y para las combinaciones es ${}_nC_r$ ó C_n^r ó $C(n,r)$. Identifique estas teclas en su calculadora y practique.

2.5 REGLA DEL EXPONENTE

Se trata de un tipo de combinación o arreglo ordenado en donde siempre hay reemplazo del elemento que se toma.

Si se tienen un conjunto de *N* elementos y se construye con estos elementos un conjunto de *n* elementos, con la condición de que cada vez que se tome un elemento del conjunto de *N* elementos este sea nuevamente reemplazado, entonces el número de posibles arreglos o acomodos del conjunto de *n* elementos es:

$$N^n$$

El siguiente ejemplo explica de una manera didáctica el cálculo del número de posibles arreglos haciendo uso de la regla del exponente.

Ejemplo 2.11

¿Cuántos casos posibles existen al lanzar una moneda en 5 lanzamientos?

En el lanzamiento de una moneda se tienen dos posibilidades: cara o sello. El número de casos posibles estará dado por el número de posibilidades (2, en este caso) con exponente igual al número de lanzamientos:

- En un lanzamiento: $2^1 = 2$ casos posibles
- En dos lanzamientos: $2^2 = 4$ casos posibles
- En tres lanzamientos: $2^3 = 8$ casos posibles

De modo que, para cinco lanzamientos, hay $2^5 = 32$ casos posibles

---

EJERCICIOS CAPÍTULO 2.

1.- Suponga que una persona que vive en el municipio de Bello (Antioquia) trabaja en el centro de la ciudad de Medellín. Para llegar a su sitio de trabajo, este tiene tres rutas distintas para llegar a la Autopista y de allí puede tomar otras tres rutas para llegar al centro de la ciudad. En el centro, puede tomar cuatro rutas para llegar al parqueadero más cercano a su oficina. ¿De cuántas maneras o rutas distintas podría tomar la persona para llegar de la casa al parqueadero más próximo a su oficina?

2.- En un restaurante en el centro de la ciudad ofrecen almuerzos ejecutivos con las siguientes opciones: tres tipos diferentes de sopa, cuatro tipos de carne con la bandeja, cuatro bebidas a escoger y dos tipos de postre. ¿De cuántas maneras puede un comensal elegir su menú que consista de una sopa, una carne para su bandeja, una bebida y un postre?

3.- Si un futbolista conoce 7 jugadas diferentes y si el entrenador le instruye para que juegue las 7 sin que ninguna se repita, ¿qué libertad le queda a ese jugador?

4.-¿Cuántas permutaciones pueden efectuarse con el conjunto S={a,b,c,d}? Describa cada una de las permutaciones posibles.

5.- ¿Cuántas permutaciones distintas pueden formarse con las letras de la palabra PROBABILIDAD?

6.- Dados los siguientes seis números: 2, 3, 5, 6, 7, 9; y si no se permiten repeticiones, resuelva:

¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con estos seis dígitos?
¿Cuántos de estos son menores de 400?
¿Cuántos son pares?
¿Cuántos son impares?
¿Cuántos son múltiplos de cinco?

7.- Una tarjeta de circuito impreso tiene ocho posiciones diferentes en las que puede colocarse un componente. Si se van a colocar cuatro componentes distintos sobre la tarjeta, ¿cuál es el número de diseños diferentes posible?

8.- En una pizzería se anuncia que ofrecen más de 500 variedades distintas de pizza. Un cliente puede ordenar una pizza con una combinación de uno o más de los siguientes nueve ingredientes: jamón, champiñones, piña, pimentón, salchicha, cebolla, peperoni, salami y aceitunas. ¿Es cierto lo que afirma su publicidad?

9.- El itinerario de un recorrido turístico por Europa incluye cuatro sitios de visita que deben seleccionarse entre diez ciudades. ¿En cuántas formas diferentes puede planearse este recorrido si:

Es importante el orden de las visitas?
No importa el orden de las visitas?

10.- El muy conocido BALOTO electrónico es un juego de azar que consiste en acertar en 6 números de 45 posibles para ganar el premio mayor. Calcule cuántos boletos de juego debe usted comprar para asegurar que tendrá el boleto ganador. La empresa del BALOTO asegura también que usted puede ganar un monto determinado si acierta 3, 4 o 5 veces, calcule también cuántos boletos debe comprar para asegurar 3, 4 y 5 aciertos. ¿Todavía cree en el BALOTO?

11.- En una sala de espera se encuentran 5 personas: 3 hombres y 2 mujeres.

¿De cuántas maneras pueden sentarse en una fila?

¿De cuántas maneras pueden sentarse en fila si los hombres se sientan juntos y las mujeres también?

¿De cuántas maneras pueden sentarse en fila si justamente las mujeres se sientan juntas?

¿De cuántas maneras pueden sentarse en una mesa redonda?

12.- En una urna se tienen 10 bolitas: 5 rojas, 3 blancas y 2 azules. Si se toman 3 con reemplazo, ¿de cuántas maneras se pueden sacar las tres bolitas de modo que todas sean del mismo color?

13.- Una prueba de opción múltiple consta de 15 preguntas y cada una tiene tres alternativas, de las cuales sólo debe marcar una. ¿En cuántas formas diferentes puede marcar un estudiante su respuesta a estas preguntas?

14.- ¿Cuántas placas vehiculares se pueden elaborar en Colombia? Recuerde que éstas constan de tres letras del alfabeto y tres dígitos. Tome 26 letras del alfabeto.

15.- Cuantas formas hay de seleccionar 3 candidatos de un total de 8 recién egresados y con las mismas capacidades para ocupar vacantes en una empresa?

16.- En un estudio realizado en California, se concluyo que al seguir 7 reglas sencillas de salud la vida de un hombre puede alargarse, en promedio 11 años. Las 7 reglas son no fumar, hacer ejercicio regularmente, tomar alcohol solo en forma moderada, dormir 7 horas , conservar un peso apropiado, desayunar y no comer entre alimentos. En cuantas formas puede una persona adoptar 5 de estas reglas, a) si actualmente las viola todas; b) Si nunca toma bebidas alcohólicas y siempre desayuna.

17.- Un Testigo de un accidente de tránsito en el que el causante huyó le indica al policía que el numero de matricula tenia las letras RHL seguida por tres dígitos el primero de los cuales era cinco, el testigo no puede recordar los otros dos pero esta seguro que los tres números eran diferentes, encuentre el numero máximo de registros que debe verificar la policía

18.- Seis alumnos de último año de bachillerato participan en un concurso de ensayo literario. No puede haber empates. ¿Cuántos resultados diferentes son posibles? ¿Cuántos grupos de primero, segundo y tercer puesto puede haber?

19.- Un psicólogo tiene 14 pacientes entre los cuales debe seleccionar nueve para un experimento en grupo. ¿Cuántos grupos de nueve se puede hacer?

CAPITULO TRES

PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS PROBABILIDADES

En la vida cotidiana nos hemos acostumbrado a hacer y a oír afirmaciones que llevan implícito el concepto de probabilidades: los pronósticos meteorológicos nos señalan las probabilidades de lluvia; los médicos nos dicen que probabilidad hay de que nuestras enfermedades se curen por medio de determinados tratamientos; los consejeros escolares, en el colegio, especulan sobre nuestras posibilidades de éxito en la universidad, los encuestadores políticos nos dicen que oportunidad tiene de ganar en las elecciones nuestro candidato favorito.

En forma muy simple se puede definir la probabilidad como un número de 0 a 1, que le asignamos a suceso para indicar su posibilidad de ocurrir. Las probabilidades se expresan como fracciones o como decimales que están entre uno y cero o también en valor porcentual entre 0 y 100. Tener una probabilidad de cero significa que algo nuca va a suceder; una probabilidad de uno indica que algo va a suceder siempre. Casi todo el mundo estará de acuerdo en que si se lanza un apelota al aire la probabilidad de que vuelva a caer es 1. Por el contrario, la probabilidad de que una persona pueda sobrevivir en el planeta Mercurio sin ninguna clase de protección es 0.

En el presente capítulo se examinarán las diferentes interpretaciones que se tienen de la probabilidad: la *clásica*, la de *frecuencias relativas* y la *subjetiva* o *a priori*. Las dos primeras son muy similares por cuanto se basan en la repetición de experimentos realizados bajo las mismas condiciones; mientras que la tercera representa una medida del grado de creencia con respecto a una proposición.

Después de definida la probabilidad de un evento, se verá a continuación los axiomas que deben satisfacer las probabilidades de cualquier experimento aleatorio. Posteriormente, se tratarán las reglas de adición y de multiplicación para probabilidades, apoyadas en la teoría de conjuntos, de donde se derivan conceptos como la probabilidad condicional, la independencia de eventos y el Teorema de Bayes.

3.1.- INTERPRETACIONES DE LA PROBABILIDAD

Existen tres diferentes formas de definir la probabilidad de un evento. Cada una de estas formas de interpretación tiene su lugar en el estudio de la Probabilidad y ninguna de ellas por separado cubre completamente todos los casos.

Antes de iniciar con estas definiciones, se hace importante acordar una notación que se seguirá a lo largo del texto, y que usted encontrará comúnmente en otros textos académicos relacionados con la probabilidad. Los eventos serán enunciados en letras mayúsculas así: *A, B, C*,…; la letra mayúscula *P* denotará una probabilidad y *P(A)* indicará, entonces, la probabilidad de que ocurra el evento *A*.

3.1.1.- DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD O A PRIORI

Cuando un experimento aleatorio tiene *n* resultados, y todos ellos con igual posibilidad de ocurrencia, entonces se emplea el ***método clásico*** de la probabilidad para estimar la posibilidad de ocurrencia de cada uno de ellos. Le corresponde pues, a cada resultado, una probabilidad igual a 1/n.

Considere, por ejemplo, un dado de 6 caras, ¿cuál es la probabilidad de que caiga el número 5 después de un lanzamiento? Un dado balanceado (esto es, no recargado) tiene 6 resultados posibles: 1, 2, 3, 4, 5, 6. La probabilidad de que caiga el número 5 es igual a la probabilidad que tiene cualquier otro de los valores, y esta es igual a 1/6.

Resumiendo, la probabilidad de que ocurra un evento *A* cualquiera, que tiene la misma posibilidad de ocurrencia que cualquier otro evento dentro del espacio muestral de tamaño *n*, se define como:

$$P(A) = \frac{1}{n}$$

Este planteamiento de la probabilidad tiene serios problemas cuando intentamos aplicarlo a los problemas de toma de decisiones menos previsibles. El planteamiento clásico supone un mundo que no existe, supone que no existen situaciones que son bastante improbables pero que podemos concebir como reales. La probabilidad clásica supone también una especie de simetría en el mundo.

3.1.2.- DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD SEGÚN EL CONCEPTO DE FRECUENCIA RELATIVA O PROBABILIDAD FRECUENTISTA

En el siglo XIX, los estadísticos británicos, interesados en la fundamentación teórica del cálculo del riesgo de pérdidas en las pólizas de seguros de vida y comerciales, empezaron a recoger datos sobre nacimientos y defunciones. En la actualidad, a este planteamiento se le llama frecuencia relativa de presentación de un evento y define la probabilidad como:

- ✓ La frecuencia relativa observada de un evento durante un gran número de intentos, o
- ✓ La fracción de veces que un evento se presenta a la larga, cuando las condiciones son estables.

Este método utiliza la frecuencia relativa de las presentaciones pasadas de un evento como una probabilidad. Determinamos qué tan frecuente ha sucedido algo en el pasado y usamos esa cifra para predecir la probabilidad de que suceda de nuevo en el futuro.

Un experimento aleatorio se caracteriza porque repetido muchas veces y en idénticas condiciones el cociente entre el número de veces que aparece un resultado (suceso) y el número total de veces que se realiza el experimento tiende a un número fijo. Esta propiedad es conocida como ley de los grandes números, establecida por Jacob Bernouilli. Tiene el inconveniente de variar la sucesión de las frecuencias relativas de unas series de realizaciones a otras, si bien el valor al que se aproximan a medida que el número de realizaciones aumenta se mantiene estable.

La frecuencia relativa del suceso A:

$$f_r(A) = \frac{\text{número de veces que aparece } A}{\text{número de veces que se realiza el experimento}}$$

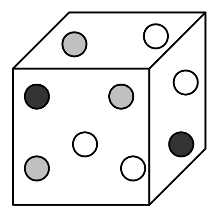
Cuando utilizamos el planteamiento de frecuencia relativa para establecer probabilidades, el número que obtenemos como probabilidad adquirirá mayor precisión a medida que aumentan las observaciones. Una dificultad presente con este planteamiento es que la gente lo utiliza a menudo sin evaluar el número suficiente de resultados.

Para un espacio muestral de tamaño *n* y para un evento cualquiera *A* con frecuencia *f*, se tiene que su probabilidad de ocurrencia es:

$$P(A) = \frac{f}{n}$$

EJEMPLO 3.12

En una urna se tienen 9 bolitas de diferentes colores: 4 blancas, 3 grises y 2 negras. Si se selecciona de la urna una bolita, sean:



B: Evento para el cual la bolita seleccionada es blanca.
G: Evento para el cual la bolita seleccionada es gris.
N: Evento para el cual la bolita seleccionada es negra.

Determinar la probabilidad de ocurrencia de cada evento.

Tamaño de la muestra: $n = 9$
Frecuencia de *B*: $f_B = 4$
Frecuencia de *G*: $f_G = 3$
Frecuencia de *N*: $f_N = 2$

$$P(B) = \frac{f_B}{n} = \frac{4}{9} = 0.44 = 44.4\%$$

$$P(G) = \frac{f_G}{n} = \frac{3}{9} = 0.33 = 33.3\%$$

$$P(N) = \frac{f_N}{n} = \frac{2}{9} = 0.22 = 22.2\%$$

Intuitivamente, se puede pensar que la probabilidad de ocurrencia de un evento está asociada a la cantidad de veces en que se repite un procedimiento o fenómeno. Por ejemplo, en un típico experimento aleatorio como lanzar una moneda, se tienen dos resultados probables: cara o sello. Ambos resultados son igualmente probables (siempre y cuando la moneda no esté recargada). Pero perfectamente en un experimento con 10 lanzamientos de la moneda, se podría tener un resultado como 8 caras y 2 sellos. Este es un resultado normal. Sin embargo, si el experimento fuera de 100 lanzamientos, sería muy extraño encontrar un resultado como 80 caras y 20 sellos; o bien, con 1000 lanzamientos 800 caras y 200 sellos. Entonces, no se puede garantizar cuál será el resultado en un lanzamiento, o pocos lanzamientos, pero se puede ver que con una gran cantidad de lanzamientos los resultados de que la moneda caiga cara serán muy similares al número de veces para sello.

Con lo anterior, puede concluirse que al calcular probabilidades con el método de frecuencias relativas, se obtiene un *estimado* y no un valor exacto. Conforme el número de observaciones se incrementa, los estimados correspondientes tienden a acercarse a la probabilidad real. Esta propiedad es conocida comúnmente como la ***ley de los grandes números***.

3.1.1.- PROBABILIDADES SUBJETIVAS.

Las probabilidades subjetivas están basadas en las creencias de las personas que efectúan la estimación de probabilidad. La probabilidad subjetiva se puede definir como la probabilidad asignada a un evento por parte de un individuo, basada en la evidencia que se tenga disponible. Esa evidencia puede presentarse en forma de frecuencia relativa de presentación de eventos pasados o puede tratarse simplemente de una creencia meditada.

Las valoraciones subjetivas de la probabilidad permiten una más amplia flexibilidad que los otros dos planteamientos. Los tomadores de decisiones puede hacer uso de cualquier evidencia que tengan a mano y mezclarlas con los sentimientos personales sobre la situación. Las asignaciones de probabilidad subjetiva se dan con más frecuencia cuando los eventos se presentan sólo una vez o un número muy reducido de veces.

Por ejemplo, una mujer en embarazo asegura que el bebé que tendrá será varón por la cantidad de pataditas recibidas en el vientre, mientras que su cuñada le refuta este argumento, pues afirma que la forma de su barriga le asegura que tendrá una niña. Ambas mujeres parten de una experiencia o una práctica personal para atreverse a asegurar el sexo del ser que viene en camino. Sin embargo, la probabilidad de que sea niño es igual a la probabilidad de que sea niña, y eso es igual a 0.5 (ó 50%).

Otro ejemplo común es el de las predicciones meteorológicas, en las que el científico debe usar su conocimiento experto de las condiciones del tiempo para desarrollar un estimado de la probabilidad de buen o mal tiempo. Como casi todas las decisiones sociales y administrativas de alto nivel se refieren a situaciones específicas y únicas, los responsables de tomar decisiones hacen un uso considerable de la probabilidad subjetiva.

Se trata pues de una conjetura entrenada, basada siempre en la práctica, en la comprensión de fenómenos similares o en las circunstancias que rodea al evento, y no como presunciones lanzadas sin un conocimiento de las causas o como corazonadas.

Este método es usado, por ejemplo, cuando un médico estima la probabilidad de recuperación para un enfermo grave o también cuando un ingeniero estima rápida y subjetivamente la resistencia de un puente al paso de una carga superior a la establecida en los diseños.

Es importante entender que el método de la probabilidad *a priori* o subjetiva no debe menospreciarse frente a los otros métodos (frecuencia relativa y clásica), ya que es frecuente no tener registros del comportamiento de cierta variable para determinar una probabilidad relacionada, pues simplemente no es posible repetir el experimento.

Por ejemplo, las aseguradoras no pueden darse el lujo de repetir el ensayo del daño de un carro, del robo de una valiosa obra de arte, del secuestro de una persona o del accidente de un avión. Éstas solo pueden basarse en experiencias adquiridas para estimar su probabilidad de ocurrencia y así determinar el costo del seguro que ofrece. De la misma manera, no se podría determinar la probabilidad de que una ciudad sea bombardeada por meteoritos, por que simplemente no hay registros históricos para hacer una estimación. Sólo se puede hacer un estimado subjetivo.

EJEMPLO 3.13

Suponga que usted es un astrónomo que quiere determinar la probabilidad de que un gran asteroide destruya el planeta Tierra. ¿Qué método usaría para este cálculo?

Observe que no puede usarse el método clásico, porque los resultados posibles no tienen la misma posibilidad de ocurrir.
Tampoco se aplica el método de las frecuencias relativas, ya que es imposible realizar ensayos y no hay datos históricos de una destrucción de ese tipo.
Sólo puede aplicarse el método de la probabilidad subjetiva apoyándose, por ejemplo, en el número de asteroides reportados con un tamaño suficiente y tan cercanos a nuestro planeta como para destruirlo, también en el conocimiento de las órbitas de estos asteroides.
Los astrónomos desarrollaron la probabilidad subjetiva de que el planeta Tierra fuera destruido por una colisión con un asteroide en algún momento en los próximos 100 años: la probabilidad es aproximadamente de 1 / 5000.

3.2. Axiomas de probabilidad

Conocida ahora la probabilidad de un evento, se pueden reunir ciertas características conocidas como axiomas de probabilidad que satisfacen la probabilidad de cualquier experimento aleatorio. Estos axiomas no determinan las probabilidades, lo que hacen es facilitar el cálculo de las probabilidades de algunos eventos a partir del conocimiento de las probabilidades de otros.

Entendiendo la probabilidad de cualquier evento como un número entre 0 y 1, ella satisface las siguientes propiedades:

Si ***S*** es el espacio muestral y ***A*** es cualquier evento del experimento aleatorio, entonces:

1. $P(S) = 1$

2. $0 \leq P(A) \leq 1$

Estos axiomas implican los siguientes resultados.

- La probabilidad de un evento imposible es 0 ó *P(Ø)=0*.
- La probabilidad de que un evento ocurra con certeza es 1.
- Para cualquier evento ***A***, $P(A') = 1 - P(A)$ **.**
- Si el evento $\boldsymbol{A_1}$ está contenido en el evento $\boldsymbol{A_2}$, entonces: $P(A_1) \leq P(A_2)$

La probabilidad de un evento compuesto, generado al aplicar las operaciones básicas de los conjuntos a los eventos individuales que lo componen (unión, intersección y complemento de eventos), se puede obtener a partir de las probabilidades de los eventos individuales. En estos casos, las operaciones básicas de los conjuntos también son útiles para determinar la probabilidad de un evento compuesto

3.2.1. REGLA DE LA ADICIÓN

a.- Regla de la adición para eventos mutuamente excluyentes.

A menudo, estamos interesados en la probabilidad de que una cosa u otra suceda; es decir nos interesa la probabilidad de la unión de dos eventos. Si estos dos eventos son mutuamente excluyentes, podemos expresar esta probabilidad haciendo uso de la regla de adición para eventos mutuamente excluyentes:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Existe un caso especial, para cualquier evento A, tenemos que éste sucede o no sucede. De modo que los eventos A y A' son mutuamente excluyentes y exhaustivos:

$P(A) + P(A') = 1$

$P(A') = 1 - P(A)$

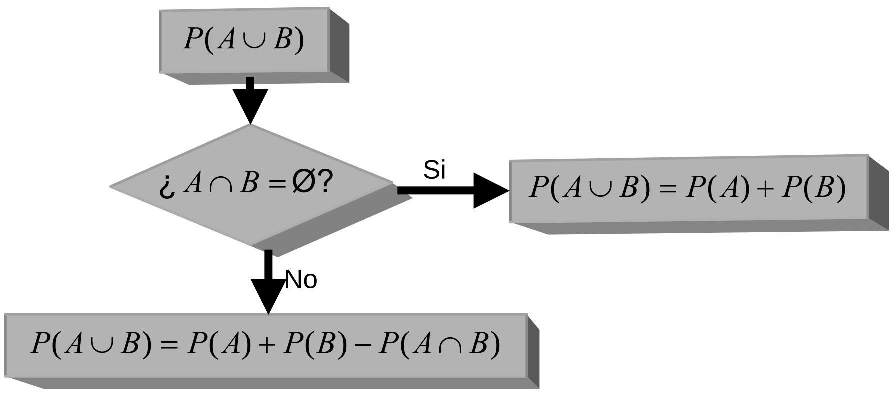
b.- Regla de adición para eventos que no son mutuamente excluyentes.

Si dos eventos no son mutuamente excluyentes, es posible que ambos se presenten al mismo tiempo. En tales casos, debemos modificar la regla de la adición para evitar el conteo doble:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

El siguiente diagrama de flujo[5], resume las reglas de adición para el cálculo de la probabilidad de dos eventos dados *A* y *B*.

Figura 3.7
Diagrama de flujo de la regla de adición



EJEMPLO 3.14:

Las siguientes son las características de las orquídeas de un vivero:

		Tamaño de pétalo	
		Grande	Pequeño
Color	Lila	40	4
	Blanca	2	3

Sea el evento ***A***: la orquídea es de pétalo grande. Entonces:

$$P(A) = 42/49$$

Y sea el evento ***B***: la orquídea es de color lila. Entonces:

$$P(B) = 44/49$$

De otro lado, $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que la orquídea sea de pétalo grande y al mismo tiempo de color lila. Entonces:

$$P(A \cap B) = 40/49$$

El evento $A \cup B$ es aquel donde la orquídea es de tamaño de pétalo grande o de color lila o ambos. La tabla indica rápidamente, al igual que su diagrama de Venn, el valor de $P(A \cup B) = 46/49$.

La otra manera de calcularlo es:

[5] Modificado de *Probabilidad y estadística*, Mario F. Triola. Novena edición. Pearson & Addison Wesley. México. 2004.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = 42/49 + 44/49 - 40/49$$
$$P(A \cup B) = 46/49$$

Sea el evento ***E*** donde la orquídea no es de pétalo grande y tampoco es de color lila. La tabla también indica el valor de $P(E) = 3/49$

Otra alternativa para el cálculo de $P(E)$, es hacer uso adecuado de operaciones entre conjuntos. Se tiene que:

$$E = (A \cup B)'$$

Por tanto,

$$P(E) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 46/49 = 3/49$$

3.2.2 REGLAS DE MULTIPLICACIÓN

En el tema anterior se presentó la regla de la adición para calcular $P(A \cup B)$. En esta sección se desarrollará una regla para determinar $P(A \cap B)$, esto es, la probabilidad de que el evento A ocurra en un primer experimento y el evento B ocurra en un segundo experimento.

a.- Probabilidades bajo condiciones de independencia estadística.

Cuando se presentan dos eventos, el resultado del primero puede tener un efecto en el resultado del segundo, o puede no tenerlo. Esto es, los eventos pueden ser dependientes o independientes. Existen tres tipos de probabilidades que se presentan bajo independencia estadística:

- Marginal.
- Conjunta.
- Condicional.

Probabilidades marginales bajo independencia estadística.

- Una probabilidad marginal o incondicional es la probabilidad simple de presentación de un evento.

- Probabilidades conjuntas bajo condiciones de independencia estadística.

La probabilidad de dos o más eventos independientes que se presentan juntos o en sucesión es el producto de sus probabilidades marginales:

P (A ∩ B) = P(A) X P(B)

Probabilidades condicionales bajo independencia estadística.

Simbólicamente, la probabilidad condicional se escribe P(B/A) y se lee "la probabilidad de que se presente el evento B, dado que el evento A se ha presentado". La probabilidad condicional es la probabilidad de que un segundo evento (B) se presente, si un primer evento (A) ya ha sucedido.

Para eventos estadísticamente independientes, la probabilidad condicional de que suceda el evento B dado que el evento A se ha presentado, es simplemente la probabilidad del evento B:

$P(B/A) = P(B)$

b.- Probabilidades bajo condiciones de dependencia estadística.

La dependencia estadística existe cuando la probabilidad de que se presente algún suceso depende o se ve afectada por la presentación de algún otro evento. Los tipos de probabilidad bajo condiciones de dependencia estadística son:

- Condicional.
- Conjunta.
- Marginal.

Probabilidad condicional bajo dependencia estadística.

$P(B / A) = P(B \cap A) / P(A)$

Probabilidades conjuntas bajo condiciones de dependencia estadística.

$\mathbf{P(B \cap A) = P(B / A) \times P(A)}$

O

$\mathbf{P(B \cap A) = P(A / B) \times P(B)}$

Ejemplo 3.1.5
Retome el ejemplo de las características de las orquídeas de un vivero y calcule la probabilidad de que la orquídea que se seleccione sea de color lila dado que se ha tomado una orquídea de tamaño de pétalo grande.

		Tamaño de pétalo	
		Grande	Pequeño
Color	Lila	40	4
	Blanca	2	3

Sean los eventos:
A: la orquídea es de pétalo grande.
B: la orquídea es de color lila.

Se pide entonces: $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$P(B \cap A) = 40/49$

$P(A) = 42/49$

Así: $P(B/A) = \dfrac{40/49}{42/49} = 0{,}952 = 95{,}2\%$

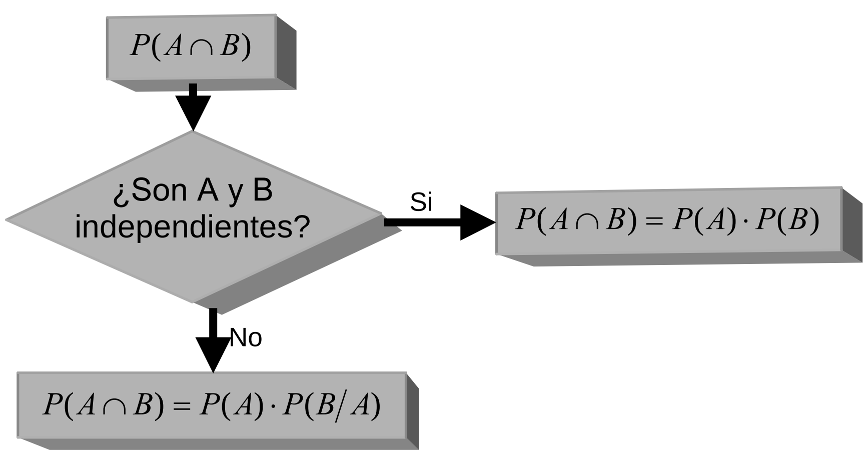
Calcule ahora la probabilidad de que la orquídea seleccionada sea de pétalo grande dado que es de color lila.
Observe que esta probabilidad es diferente a la calculada arriba, se pide:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(A/B) = \frac{40/49}{44/49} = 0{,}909 = 90{,}9\%$$

En este caso, $P(A)$ y $P(A/B)$ son las probabilidades del mismo evento (la orquídea es de pétalo grande) pero calculadas bajo dos diferentes estados de conocimiento: la primera, sin la condición de su color y la segunda, condicionada a que su color sea lila. De manera similar, $P(B)$ y $P(B/A)$ son las probabilidades del mismo evento (la orquídea es de color lila) calculadas bajo dos estados diferentes de conocimiento: sin condicionar su tamaño de pétalo para la primera y la segunda condicionada a que su tamaño de pétalo sea grande.

La regla de la multiplicación se puede resumir en el siguiente diagrama de flujo[6] para el cálculo de la probabilidad de la intersección de dos eventos dados *A* y *B*.

Figura 3.8.
Diagrama de flujo de la regla de multiplicación



[6] Modificado de *Probabilidad y estadística*, Mario F. Triola. Novena edición. Pearson & Addison Wesley. México. 2004.

RECOMENDACIONES PRÁCTICAS:

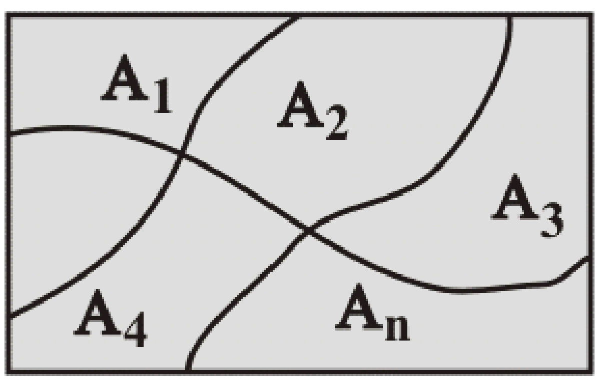
- Cuando se aplica la regla de la adición de probabilidades, determinar previamente si los eventos son excluyentes o no.
- Cuando se usa la regla de la multiplicación, determinar si los eventos son dependientes o independientes.
- Siempre que sea posible, apoyar la interpretación del problema mediante el empleo de diagramas de Venn.
- La probabilidad es un número que nunca puede tener valor negativo, ni ser mayor que 1.

3.3. PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES.

La regla de multiplicación es útil para determinar la probabilidad de un evento que depende de otros. En esta sección se verá otro modo de calcular la probabilidad de un evento considerando a este como el resultado de la unión de otros eventos. Para esto es necesario definir el concepto de partición.

Se llama ***partición*** al conjunto de eventos A_i tales que $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ y $A_i \cup A_j =$ Ø; es decir un conjunto de eventos mutuamente excluyentes y que componen todo el espacio muestral S. en general, se dice que una colección de conjuntos A_1, A_2,…, A_n es ***exhaustiva*** si $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. La siguiente figura presenta el diagrama de Venn que corresponde a la partición de un espacio muestral S en A_n eventos.

Figura 3.10
Diagrama de Venn indicando la partición de un espacio muestral

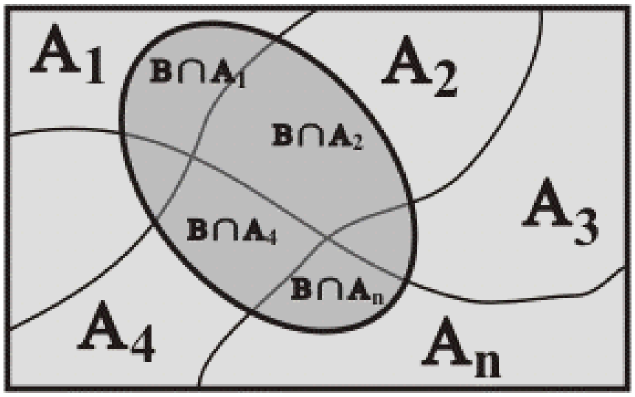


Para cualquier evento B, éste puede definirse como un evento compuesto de varios subconjuntos mutuamente excluyentes (ver figura 3.6.), esto es:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$$

Figura 3.11

Diagrama de Venn de un evento en varios subconjuntos mutuamente excluyentes



La ***probabilidad total*** de un evento es la suma exhaustiva de las probabilidades de todos los casos mutuamente excluyentes que conducen a dicho evento., Es así como la ***regla de probabilidad total*** afirma:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + (B \cap A_n)$$
$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

Algunos autores resumen esta definición como una sumatoria, así:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

La regla de probabilidad total para dos eventos se simplifica considerando que el evento B puede describirse como la unión de la parte de B que está en A y la parte de B que está en A'. Esto es:

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$$

De manera que para cualquier par de eventos A y B:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') \quad \Leftrightarrow \quad P(B) = P(B/A) \cdot P(A) + P(B/A') \cdot P(A')$$

Ejemplo 3.16

Una compañía dedicada al transporte público tiene tres líneas en una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determine la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

Recuerde que el primer paso en el cálculo de probabilidades es la adecuada definición de los eventos que intervienen. Así, se definen los siguientes eventos:

L1: evento para el cual el autobús cubre el servicio de la primera línea.
L2: evento para el cual el autobús cubre el servicio de la segunda línea.
L3: evento para el cual el autobús cubre el servicio de la tercera línea.
A: evento donde el autobús se avería.

Con esto, se ve claramente que la probabilidad pedida es ***P(A)***. Usando la regla de probabilidad total, se tiene:

$$P(A) = P(A \cap L1) + P(A \cap L2) + P(A \cap L3)$$
$$P(A) = P(A/L1) \cdot P(L1) + P(A/L2) \cdot P(L2) + P(A/L3) \cdot P(L3)$$
$$P(A) = (0{,}02 \times 0{,}6) + (0{,}04 \times 0{,}3) + (0{,}01 \times 0{,}1)$$
$$P(A) = 0{,}025$$

De manera que la probabilidad de que en un día un autobús de la compañía se averíe es del 2,5%.

3.3.1 TEOREMA DE BAYES

En el año 1763, dos años después de la muerte de Thomas Bayes (1702-1761), se publicó una memoria en la que aparece, por vez primera, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados. El cálculo de dichas probabilidades recibe el nombre de teorema de Bayes.

Sea A_1, A_2, ...,A_n un sistema completo de sucesos, tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquier del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$. entonces la probabilidad $P(A_i/B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B / A_n)}$$

donde el denominador corresponde a encontrar la Probabilidad Total de B.

En los problemas relacionados con la probabilidad, y en particular con la probabilidad condicionada, así como con la probabilidad total y el teorema de Bayes, es aconsejable que, con la información del problema, construyas una tabla de contingencia o un diagrama de árbol.

EJEMPLO 3.17

Tres máquinas, A, B y C, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%.

a. Seleccionamos una pieza al azar; calcula la probabilidad de que sea defectuosa.
b. Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina B.
c. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

Solución:

Sea D= "la pieza es defectuosa" y N= "la pieza no es defectuosa". La información del problema puede expresarse en el diagrama de árbol adjunto.

a. Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, P(D), por la propiedad de la probabilidad total,

   $P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$
   $= 0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05 = 0.038$

b. Debemos calcular P(B/D). Por el teorema de Bayes,

$$P(B/D) = \frac{P(B)\cdot P(D/B)}{P(A)\cdot P(D/A) + P(B)\cdot P(D/B) + P(C)\cdot P(D/C)} =$$
$$= \frac{\mathbf{0.30\cdot 0.04}}{\mathbf{0.45\cdot 0.03 + 0.30\cdot 0.04 + 0.25\cdot 0.05}} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{38}} = \mathbf{0.316}$$

c. Calculamos P(A/D) y P(C/D), comparándolas con el valor de P(B/D) ya calculado. Aplicando el teorema de Bayes, obtenemos:

$$P(A/D)=\frac{0.45\cdot 0.03}{0.45\cdot 0.03+0.30\cdot 0.04+0.25\cdot 0.05}=\frac{135}{380}=0.355$$

$$P(C/D)=\frac{0.25\cdot 0.05}{0.45\cdot 0.03+0.30\cdot 0.04+0.25\cdot 0.05}=\frac{125}{380}=0.329$$

La máquina con mayor probabilidad de haber producido la pieza defectuosa es A

EJEMPLO 3.18

Tenemos tres urnas: A con 3 bolas rojas y 5 negras, B con 2 bolas rojas y 1 negra y C con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna A

Solución:

Llamamos R= "sacar bola roja" y N= "sacar bola negra". En el diagrama de árbol adjunto pueden verse las distintas probabilidades de ocurrencia de los sucesos R o N para cada una de las tres urnas.

La probabilidad pedida es P(A/R). Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$P(A/R)=\frac{P(A)\cdot P(R/A)}{P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)+P(C)\cdot P(R/C)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{45}{173}=0.260$$

EJERCICIOS CAPITULO 3

1- Sea P(A) = 0.6 P(AP B) = 0.25 P(B´)= 0.7
a.- Encontrar P (B/A) b.- Son A y B independientes, compruebe? c.- Encontrar P(A´)

2.- Se extrae una carta al azar de una baraja de 40 cartas. a.- ¿Cuál es la probabilidad de que sea dos o sea un siete? B.- Cual es la probabilidad de que sea oro o un 6?

3.- Consideremos el lanzamiento de un dado, usted gana si el resultado es impar o divisible por dos. ¿cuál es la probabilidad de ganar?

4.- En el curso de estadística la probabilidad de que los estudiantes tengan computador es de 0.60, la probabilidad de que tengan auto es de 0.25 y ambas cosas es de 0.15. Cual es la probabilidad de que un estudiante escogido al azar tenga computador o auto?

5.- De entre 20 tanques de combustible fabricados para el transbordador espacial, tres se encuentran defectuosos. Si se seleccionan aleatoriamente 4 tanques: a.- cual es la probabilidad de que ninguno de los tanques sea defectuoso b.- Cual es la probabilidad de que uno de los tanques tenga defectos.

6.- En la tabla aparecen 1000 estudiantes universitarios clasificados de acuerdo con los puntajes que obtuvieron en un examen de admisión a la universidad. También muestra la clasificación de los colegios en donde se graduaron de bachilleres:

	Colegio			
Puntaje	Inferior (I)	Regular (R)	Superior (S)	Total
Bajo (B)	100	50	50	200
Medio (M)	75	175	150	400
Alto (A)	25	75	300	400
Total	200	300	500	1000

Calcular la Probabilidad de que un estudiante escogido al azar: a) haya obtenido un puntaje bajo en el examen. b) Se haya graduado en un colegio de nivel superior c) haya obtenido un puntaje bajo en el examen y se haya graduado en un colegio de nivel superior d) haya obtenido un puntaje bajo en el examen dado que se haya graduado en un colegio de nivel inferior e) si el estudiante escogido termino en un colegio de grado regular encontrar la probabilidad de que tenga un puntaje alto en el examen.

7.- Fabián y Pilar estudian en un mismo curso. La probabilidad de que Fabián no pierda ninguna materia es del 85% y la de Pilar es del 90%. a) Cual es la probabilidad de que los dos no pierdan ninguna materia. b) Cual es la probabilidad de que Fabián pierda una materia y Pilar ninguna. C) Cual es la probabilidad de que los dos pierdan una materia.

8.- Cuatro amigos se dirigen a un lugar y toman 4 rutas diferentes de acuerdo al riesgo de tener un accidente. Las probabilidades de riesgo de cada ruta son 0.2, 0.15, 0.25, 0.10 respectivamente. Cual es la probabilidad de que ninguno sufra un accidente.

9.- El consejero escolar de un colegio estimó las probabilidades de éxito en la universidad para tres alumnos de último año en 0.9, 0.8 y 0.7 respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres tengan éxito en la universidad?

10.- Una maquina que produce un determinado artículo fue adquirida bajo la condición de que el 3% de los artículos producidos son defectuosos. Si el proceso se realiza bajo control, es decir independiente cual es la probabilidad de que a.- dos artículos seguidos sean defectuosos, b.- dos artículos seguidos no sean defectuosos, c.- el primero sea defectuoso y el segundo bueno.

11.- La probabilidad de que un doctor diagnostique en forma correcta una determinada enfermedad es de 0.7. Dado que el doctor hace un diagnostico incorrecto, la probabilidad de que un paciente presenta una demanda es de 0.9. ¿cuál es la probabilidad de que el doctor haga un diagnostico incorrecto y el paciente presente una demanda?

12.- En una empresa, la probabilidad de que un empleado escogido al azar tenga más de 30 años es de 0.55. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado escogido al azar tenga 30 años o menos?

13.- En una ciudad grande el 70% de los hogares compra un periódico matutino y el 90% uno vespertino. Si se supone que los dos eventos son independientes cual es la probabilidad de que un hogar escogido al azar sea uno de los que compra ambos periódicos?

14.- La tabla muestra el resultado de 500 entrevistas hechas durante una encuesta. Los datos se clasificaron según el sector de la ciudad donde se aplico el cuestionario.

	Resultado de la entrevista			
Sector	Contesto (C)	No contesto (N)	No estaba (S)	Total
M	100	5	20	125
N	115	5	5	125
O	50	15	60	125
P	35	40	50	125
Total	300	65	135	500

Si se selecciona un cuestionario. Cual es la probabilidad de a) No se haya contestado b) La persona no estaba en casa c) el cuestionario se haya contestado y la persona viva en el sector N d) Dado que la persona viva en el sector O, no haya contestado el cuestionario e) La persona viva en el sector M ó Conteste el cuestionario. F) Si la persona no estaba cual es la probabilidad de que viva en el sector O.

15.- En el ejercicio anterior, el resultado de la entrevista es independiente del sector de la ciudad donde vive la persona? Comprobar la respuesta

16.- El 70% de los estudiantes aprueba una asignatura A y el 60% aprueba otra asignatura B. Sabemos además, que el 35% del total de los estudiantes aprueba ambas. Elegido un estudiante al azar, calcular las probabilidades de:
a.- haya aprobado la asignatura B sabiendo que ha aprobado la A
b.- haya aprobado la asignatura B sabiendo que no ha aprobado la A
c.- no haya aprobado la asignatura B sabiendo que ha aprobado la A
d.- no haya aprobado la asignatura B sabiendo que no ha aprobado la A

17.- Los pedidos nuevos de los productos de una compañía varían en valor monetario, según el siguiente cuadro

Monto venta	0-1000	1001-2000	2001-3000	3001-4000	4001-5000
Probabilidad	0.10	0.35	0.25	0.20	0.10

a) cual es la probabilidad de que un nuevo pedido sea mayor a $2.000
b) cual es la probabilidad de que un nuevo pedido sea igual o menor a $2000 dado que el pedido excede a $1.000
c) cual es la probabilidad de que un nuevo pedido sea mayor a $3.000 dado que la venta excede a $2.000

18.- Una compañía encontró que el 82% de las personas seleccionadas para su programa de entrenamiento de vendedores termino el curso. De estos solamente 60% se convirtieron en vendedores productivos. Si un aspirante nuevo llega al curso cual es la probabilidad de que termine el curso y se convierta en un vendedor productivo.

19- En un centro médico, los fumadores que se sospecha tenían cáncer pulmonar, el 90% lo tenía, mientras que el 5% de los no fumadores lo padecía. Si la proporción de fumadores es del 45% a) Cuál es la probabilidad de que un paciente con cáncer seleccionado al azar sea fumador? B) Cual es la probabilidad de que la persona tenga cáncer..

20.- Un investigador de una clínica de especialistas ha descubierto que durante un periodo de varios años, el 20% de los pacientes que llegaron a la clínica tenían la enfermedad D1, el 30% la enfermedad D2, y el 50% la enfermedad D3. El investigador descubrió también que un conjunto de síntomas bien definidos al que denomino S, se encontraba en un 25% de los pacientes con la enfermedad D1, 60% de los que tenían la enfermedad D2, y 80% de los que tenían la enfermedad D3. El investigador quiere utilizar esta información para hacer rápidamente el diagnostico a los pacientes recién llegados. Supongamos que ha sido admitido un paciente con el conjunto de síntomas S, cual es la probabilidad de que tenga la enfermedad D3, cual es la probabilidad de que tenga la enfermedad D1.

21.- Un científico ha descubierto en un hospital para enfermedades crónicas que el 15% de los pacientes permanecen en el hospital menos de 30 días, mientras que el 85% de los pacientes permanece 30 días o más. También ha descubierto que el 20% de los que se quedan menos de 30 días y el 60% de los que se quedan 30 días o más, presentan cierto grupo de características. Cual es la probabilidad de que un paciente que llega al hospital con esas características permanezca menos de 30 días?.

22.- A un sospechoso se le aplica un suero de la verdad que se sabe que es confiable en 90% cuando la persona es culpable y en 99% cuando la persona es inocente. En otras palabras el 10% de los culpables se consideran inocentes cuando se usa el suero y el 1% de los inocentes se juzgan culpables. Si el sospechoso se escogió de un grupo del cual solo 5% han cometido alguna vez un crimen y el suero indica que la persona es culpable, cual es la probabilidad de que sea inocente?

23.- Con los jugadores de un club de fútbol se forman dos equipos para jugar un partido de entrenamiento; entre los dos equipos se reúnen 6 defensas, 8 medios, 6 delanteros y 2 porteros. El entrenador sabe que en estos partidos, la probabilidad de que se lesione un jugador es 0.22 si es delantero, 0.11 si es medio, 0.055 si es defensa y 0 si es portero.
a.- Calcular la probabilidad de que se lesione uno cualquiera de los jugadores en este partido.
b.- Si se sabe que un jugador se ha lesionado, determinar la probabilidad de que haya sido un defensa.

23.- Tras un estudio estadístico en una ciudad se observa que el 70% de los motoristas son varones y, de estos, el 60% llevan habitualmente casco. El porcentaje de mujeres que conducen habitualmente con casco es del 40%. Se pide:
a.- Calcular la probabilidad de que un motorista elegido al azar lleve casco.
b.- Se elige un motorista al azar y se observa que lleva casco. ¿Cuál es la probabilidad de que sea varón?

24.- Los alumnos de Primero de Biología tienen que realizar dos pruebas, una teórica y otra práctica. La probabilidad de que un estudiante apruebe la parte teórica es de 0.6, la probabilidad de que apruebe la parte práctica es de 0.8 y la probabilidad de que apruebe ambas pruebas es 0.5.
a.- ¿Son independientes los sucesos aprobar la parte teórica y la parte práctica?
b.- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno no apruebe ninguno de los dos exámenes?
c.- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe solamente uno de los dos exámenes?
d.-Se sabe que un alumno aprobó la teoría. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe también la práctica?

25.- En una caja hay x bolas blancas y 1 bola roja. Al extraer de la caja dos bolas al azar sin reemplazamiento, la probabilidad de que sean blancas es 1/2. Calcula el número de bolas blancas que debe tener la caja.

26.- El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que de los no ingenieros y no economistas solamente el 20% ocupan un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

Unidad Dos

VARIABLES ALEATORIAS
DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN A LA UNIDAD

Con los principios de Probabilidad, las propiedades básicas y leyes, se definen las variables aleatorias y se establece la diferencia entre variables aleatorias discretas y continuas, en términos de su función de probabilidad, valor esperado, varianza y desviación estándar y se desarrolla la desigualdad de Chébyshev que se aplica a cualquier variable aleatoria discreta o continua.

Posteriormente se inicia el estudio de las distribuciones de probabilidad, es pertinente comentar que en todo fenómeno, los datos obtenidos tienen un comportamiento específico, es así como el análisis de las distribuciones de probabilidad permite determinar que distribución de probabilidad es la pertinente para un conjunto de datos.

Las distribuciones de probabilidad son de tipo discreto y continuo, según la variable aleatoria que este en cuestión, luego en este aparte se estudiaran dichas distribuciones, sus principios, la función que la identifica, sus propiedades y los campos de aplicación de las mismas.

Bienvenidos a el mundo de las distribuciones de probabilidad, será un camino muy interesante y ameno, por los ejemplos propuestos y las situaciones analizadas.

OBJETIVO GENERAL

Comprender e interiorizar los tipos de distribuciones de probabilidad que existen, sus características, sus parámetros y los campos de aplicación que tienen dichas distribuciones.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conceptualizar variable aleatoria discreta y continua.
- Conceptualizar función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.
- Definir función de densidad de una variable aleatoria continua.
- Obtener probabilidades de eventos haciendo uso de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.
- Establecer las propiedades de la función de distribución de probabilidad acumulada de una variable aleatoria discreta.
- Obtener y graficar la función de probabilidad acumulada de una variable aleatoria discreta y continua, dada su función de probabilidad.
- Obtener probabilidades de eventos que involucren variables aleatorias discretas o continuas, haciendo uso de su función de distribución acumulada.
- Definir y obtener el valor esperado y varianza de una variable aleatoria, tanto discreta como continua.
- Aplicar adecuadamente el teorema de Chébyshev para cualquier variable aleatoria discreta o continua.
- Describir las principales características y propiedades de las distribuciones de probabilidad discreta y continua.
- Identificar y diferenciar las distribuciones de probabilidad discretas más comunes, como son: distribución uniforme discreta, binomial, geométrica, binomial negativa, hipergeométrica y Poisson.
- Calcular e interpretar parámetros estadísticos, tales como Media, varianza y desviación estándar, de las diferentes distribuciones de probabilidad discreta y continua.
- Reconocer cuándo un experimento aleatorio es un ensayo de Bernoulli.
- Identificar y diferenciar las distribuciones de probabilidad continuas más comunes, como son: distribución uniforme continua, normal, exponencial, Weibull, Erlang, Gamma, Ji-cuadrada, t-student y F de Fisher.
- Estandarizar una variable aleatoria.
- Emplear la distribución normal para aproximar las probabilidades de una variable aleatoria binomial y Poisson.
- Interpretar y utilizar correctamente las tablas existentes para cada una de las distribuciones de probabilidad discretas y continuas.

CAPITULO UNO

VARIABLES ALEATORIAS

En el capítulo anterior se examinaron los conceptos básicos de probabilidad con respecto a eventos que se encuentran en un espacio muestral, en este capítulo se verá la importancia de cuantificar los resultados de un experimento aleatorio sabiendo que ellos pueden ser cualitativos o cuantitativos.

En un experimento aleatorio lo que más interesa es conocer el número total de veces que se obtiene un mismo resultado en un determinado número de ejecuciones (es decir, cuantificar) y no en cuál ejecución se obtiene un determinado resultado. Es por esto que en la teoría de la probabilidad, se hace necesaria la cuantificación de los resultados cualitativos de un espacio muestral para luego, mediante el empleo de medidas numéricas, estudiar su comportamiento aleatorio.

Para facilitar estos cálculos se acude a una función que ubica el espacio muestral en el conjunto de los números reales, la cual es conocida como variable aleatoria.

Una ***variable aleatoria*** es pues, una función que asigna un número real a cada resultado en el espacio muestral de un experimento aleatorio. Ellas se denotan con una letra mayúscula, tal como X.

Se dice que X es aleatoria porque involucra la probabilidad de los resultados del espacio muestral, y se define X como una función porque transforma todos los posibles resultados del espacio muestral en cantidades numéricas reales.

Ejemplo 1.1.

Considere el lanzamiento de una moneda. El espacio muestral de este experimento aleatorio está constituido por dos resultados: cara y sello.

Si se define X(cara)=0 y X(sello)=1, se transforman los dos posibles resultados del espacio muestral en cantidades numéricas reales.

De esta manera P(X=0) representa la probabilidad de que el resultado al lanzar la moneda es cara.

EJEMPLO 1.2

Considere el lanzamiento de dos dados[7]. El espacio muestral de este experimento aleatorio está constituido por 36 posibles resultados.
Se define como variable aleatoria X la suma de los valores de las dos caras de los dados. La siguiente tabla relaciona los 36 resultados con los valores correspondientes de la variable aleatoria X definida en este ejemplo.

Tabla 1.1.
Correspondencia entre los resultados del lanzamiento de un par de dados y la variable aleatoria que representa la suma de las caras.

Resultado	Valor de la variable aleatoria	Número de ocurrencias	Probabilidad
(1,1)	2	1	1/36
(1,2) (2,1)	3	2	2/36
(1,3) (2,2) (3,1)	4	3	3/36
(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	5	4	4/36
(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	6	5	5/36
(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	7	6	6/36
(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	8	5	5/36
(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	9	4	4/36
(4,6) (5,5) (6,4)	10	3	3/36
(5,6) (6.5)	11	2	2/36
(6,6)	12	1	1/36

Se pueden definir variables aleatorias cuyos valores sean contables o no, y al ser una caracterización cuantitativa de los resultados de un espacio muestral, ellas pueden ser discretas o continuas. En los dos temas siguientes se desarrollan los conceptos de variable aleatoria discreta y variable aleatoria continua y sus estadísticos asociados.

1.1.-VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Se dice que una variable aleatoria X es ***discreta*** si el número de valores que puede tomar es finito (o infinito contable).

Frecuentemente el interés recae en la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor particular, para ello se requiere primero definir claramente la variable aleatoria. Será importante pues, acordar la siguiente simbología: $\{X = x\}$

[7] Tomado de *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*, George C. Canavos. McGraw Hill. México. 1988.

denotará el evento formado por todos los resultados para los que $X = x$ y $P(X = x)$ será la probabilidad de dicho evento.

La ***distribución de probabilidad*** de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ es una descripción del conjunto de posibles valores de $\boldsymbol{X}$, junto con la probabilidad asociada con cada uno de estos valores. Esta distribución bien puede ser una gráfica, una tabla o una ecuación que da la probabilidad de cada valor de la variable aleatoria y se considera como el resumen más útil de un experimento aleatorio.

Toda distribución de probabilidad debe satisfacer cada uno de los dos requisitos siguientes:

- $\sum P(X = x) = 1$
- $0 \le P(X = x) \le 1$

EJEMPLO 1.3

Determine si la siguiente tabla describe una distribución de probabilidad

$\boldsymbol{x}$	0	1	2
P($\boldsymbol{X}$=$\boldsymbol{x}$)	0,04	0,32	0,64

Para ser una distribución de probabilidad, P($\boldsymbol{X}$=$\boldsymbol{x}$) debe satisfacer los dos requisitos.

$$\sum P(X = x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$\sum P(X = x) = 0{,}04 + 0{,}32 +, 0{,}64$$
$$\sum P(X = x) = 1$$

De manera que la tabla de probabilidades de la variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ satisface el primer requisito. Observe, además, que cada uno de los valores de P($\boldsymbol{X}$=$\boldsymbol{x}$) se encuentran entre 0 y 1. Como ambos requisitos se satisfacen, la tabla de probabilidades de la variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ es una distribución de probabilidad de $\boldsymbol{X}$.

Cuando la distribución de probabilidad se describe a partir de una ecuación, se le denomina ***función de probabilidad***. Esta función $f(x) = P(X = x)$ va del conjunto de los valores posibles de la variable aleatoria discreta $\boldsymbol{X}$ (denominado ***rango de*** $\boldsymbol{X}$) al intervalo [0,1] y satisface las siguientes propiedades:

- $f(x) \ge 0 \quad \forall x$
- $\sum f(x) = 1$

Ejemplo 1.4

Determine si la función $f(x) = P(X = x) = \frac{x}{3}$ (donde x puede ser 0, 1 ó 2) es una función de probabilidad.

En la siguiente tabla se resumen los posibles valores de la variable aleatoria ***X***.

X	0	1	2
$f(x)=P(X=x)$	0	1/3	2/3

Observe que todos los valores de ***f(x)*** son todos positivos, esto es ≥ 0. Además se cumple el segundo requisito:

$$\sum f(x) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Por lo tanto, la función ***f(x)*** es una función de probabilidad.

En ocasiones, es útil poder expresar probabilidades acumuladas, esto es, valores para los que ***X*** son menores o iguales a un valor específico ***x***. El uso de probabilidades acumuladas es una alternativa para describir la distribución de probabilidad de una variable aleatoria.

La ***función de distribución acumulada*** de una variable aleatoria discreta ***X***, denotada por ***F(x)*** es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Para una variable aleatoria discreta ***X***, ***F(x)*** satisface las siguientes propiedades:

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $Si\ x \leq y,\ entonces\ F(x) \leq F(y)$
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$

Además, puede establecerse que para variables aleatorias discretas de valor entero se tiene:

- $P(X = x) = F(x) - F(x-1)$
- $P(x_i \leq X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1)$

La función de distribución acumulada también proporciona probabilidades. El siguiente ejemplo ilustra cómo emplear la función de distribución acumulada para determinar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

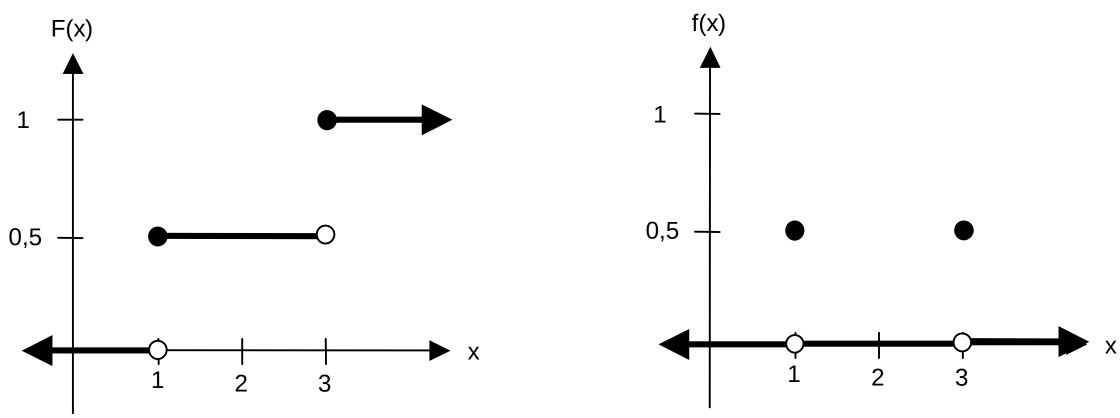
EJEMPLO 1.5

Suponga que la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ es:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0{,}5 & 1\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$

Determine la función de probabilidad de $\boldsymbol{X}$.

Figura 1.1.
(a) Función de distribución acumulada del ejemplo 4.5.
(b) Función de probabilidad del ejemplo 4.5.



(a) **(b)**

En la figura 1.1. (a), se representa una gráfica de la función ***F(x)***. Se puede ver que los únicos puntos que tienen una probabilidad distinta de cero son 1 y 3. Para todo valor de $\boldsymbol{x}$ menor que 1, $P(X\le x)=0$ y f(1)=0,5. Para valores de $\boldsymbol{x}$ entre 1 y 3 y mayores de 3, sin incluir este último, $P(X\le x)=0$ y f(3)=0,5. De manera que la función de probabilidad de $\boldsymbol{X}$ se puede escribir como:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0{,}5 & x=1\\ 0 & 1<x<3\\ 0{,}5 & x=3\\ 0 & 3>x\end{cases}$$

La figura 1.1. (b) representa la gráfica de la función de probabilidad de ***X***. Observe también que la función que se acaba de definir cumple los dos requisitos: $f(x) \geq 0$ y $\sum f(x) = 1$. Compruébelo.

Ahora bien, observe como se usan las propiedades de la función de distribución acumulada de ***X*** para calcular las siguientes probabilidades:

a. $P(X \leq 3) = F(3) = 1$
b. $P(X \leq 2) = F(2) = 0{,}5$
c. $P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$
d. $P(X > 2) = 1 - F(2) = 0{,}5$

El ***valor esperado*** (también llamado *media* o *esperanza matemática*) de una variable aleatoria discreta ***X*** es una medida de posición para la distribución de ***X***. Se simboliza con μ y se calcula al sumar el producto de cada valor de ***X*** con su probabilidad correspondiente. En otras palabras, la media o valor esperado de una variable aleatoria discreta ***X*** es:

$$\mu_X = E(X) = \sum_x [x \cdot f(x)]$$

EJEMPLO 1.6.

Considere la siguiente distribución de una variable aleatoria ***X***.

X	0	1	2
f(x)	0,04	0,32	0,64

La media está dada por:

$$\mu_X = E(X) = (0 \times 0{,}04) + (1 \times 0{,}32) + (2 \times 0{,}64) = 1{,}6$$

EJEMPLO 1.7

Determine el valor esperado de la suma de las caras de dos dados al ser lanzados.

Sea ***X*** la variable aleatoria que representa la suma de las caras de los dos dados. Tomando de referencia la tabla 4.1. en la que se relacionan los resultados del lanzamiento de los dados y la suma de las caras, se tiene:

$$\mu_X = E(X) = (2 \times 1/36) + (3 \times 2/36) + (4 \times 3/36) + \ldots + (11 \times 2/36) + (12 \times 1/36) = 7$$

De manera que el valor esperado al lanzar dos dados es 7.

La ***varianza*** de una variable aleatoria es una medida de la dispersión de la distribución de probabilidad de ésta. Se calcula ponderando el cuadrado de cada desviación con respecto a la media, con la probabilidad asociada con la desviación. En otras palabras, la varianza de una variable aleatoria discreta X con media μ_X y función de probabilidad f(x), es:

$$\sigma_X^2 = V(X) = E(X - \mu_X)^2 = \sum_x [(x - \mu_X)^2 \cdot f(x)]$$

O de un modo equivalente,

$$\sigma_X^2 = V(X) = \sum_x [(x^2 - f(x)] \cdot \mu_X^2$$

EJEMPLO 1.8

Determine ahora la varianza de la variable aleatoria definida en el ejemplo 4.7.

$$\sigma_X^2 = [(2^2 - 1/36) + (3^2 - 2/36) + (4^2 - 3/36) + ... + (12^2 - 1/36)] \times 7^2 = 2{,}05$$

Otra alternativa para medir la variabilidad, que con frecuencia es más fácil de interpretar pues sus unidades son idénticas a las de la variable aleatoria X, es la ***desviación estándar*** denotada por σ_X y que corresponde a la raíz cuadrada positiva de la varianza.

1.2.- VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

En el tema anterior se presentó el concepto de variable aleatoria como una función de valor que asigna un número real finito (o infinito contable) a cada resultado en el espacio muestral de un experimento aleatorio; variables aleatorias que han sido denominadas *discretas*. En este tema, donde las variables aleatorias pueden tomar valores en una escala continua, el procedimiento es casi el mismo.

Se dice que una variable aleatoria X es ***continua*** si el número de valores que puede tomar están contenidos en un intervalo (finito o infinito) de números reales. Dichos valores pueden asociarse a mediciones en una escala continua, de manera que no haya huecos o interrupciones.

En algunos casos, la variable aleatoria considerada continua en realidad es discreta, pero como el rango de todos los valores posibles es muy grande, resulta más conveniente utilizar un modelo basado en una variable aleatoria continua.

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua X está caracterizada por una función $f(x)$ que recibe el nombre de ***función de densidad de probabilidad***. Esta función $f(x)$ no es la misma función de probabilidad de una variable aleatoria discreta. La gráfica de la función $f(x)$ es una curva que se obtiene para un número muy grande de observaciones y para una amplitud de intervalo muy pequeña. Recuerde que la gráfica de una función de probabilidad de una variable aleatoria discreta es escalonada, dando la sensación de peldaños en ascendencia (ver figura 1.1. (a)).

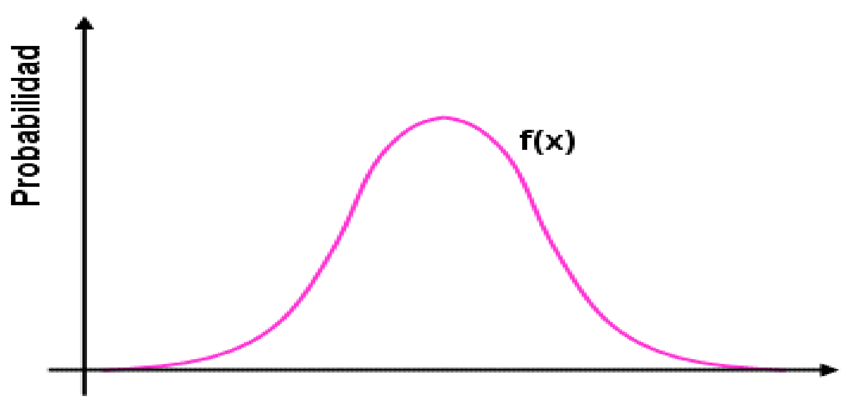
Esta función de densidad de probabilidad $f(x)$ permite calcular el área bajo la curva que representa la probabilidad de que la variable aleatoria continua X tome un valor entre el intervalo donde se define la función.

Formalmente, la función de densidad de probabilidad $f(x)$ de una variable aleatoria continua, se define como tal si para cualquier intervalo de números reales [a,b] se cumple que:

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Puesto que el área total bajo $f(x)$ es uno, la probabilidad del intervalo [a,b] es el área acotada por la función de densidad y las rectas X=a y X=b, como se muestra en la figura siguiente.

Figura 1.2.
Probabilidad ilustrada como el área bajo la curva de densidad



El modelo de variable aleatoria continua implica lo siguiente:

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

Además, para cualquier valor en el rango de la variable aleatoria continua $\boldsymbol{X}$, se cumple que P($\boldsymbol{X}$=$\boldsymbol{x}$)=0. Este resultado se desprende de las propiedades del cálculo integral[8]:

$$\int_x^x f(x)dx = 0$$

EJEMPLO 1.9

Suponga que $f(x) = e^{-x}$ para x>0. Calcule las siguientes probabilidades:

a. $P(X > 1) = \int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^\infty = -e^{-\infty} + e^{-1} = 0{,}368$

b. $P(1 < X < 2{,}5) = \int_1^{2,5} f(x)dx = \int_1^{2,5} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^{2,5} = -e^{-2,5} + e^{-1} = 0{,}286$

c. $P(X = 3) = 0$

d. $P(X < 4) = 1 - P(X > 4) = 1 - \int_4^{-\infty} e^{-x}dx = 1 - \left\{-e^{-4} + e^{\infty}\right\} = 1 - 0{,}018 = 0.982$

e. $P(3 \le X) = P(X \ge 3) = \int_3^\infty f(x)dx = \int_3^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_3^\infty = -e^{-\infty} + e^{-3} = 0{,}05$

Al igual que en el caso de una variable aleatoria discreta, la ***función de distribución acumulada*** de una variable aleatoria continua $\boldsymbol{X}$ es la probabilidad de que $\boldsymbol{X}$ tome un valor menor o igual a algún $\boldsymbol{x}$ específico. Esto es,

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad \text{para} \quad -\infty < x < \infty$$

[8] Se parte de la premisa de que el estudiante maneja el cálculo diferencial, o por lo menos tiene un conocimiento básico de este. Se recomienda al estudiante que consulte el módulo de Cálculo Integral o cualquier otro texto. Sin embargo, en el tratamiento de las distribuciones de probabilidad el cálculo de integrales complejas no es común y, como se verá en la siguiente Unidad Didáctica, las distribuciones de probabilidad más comunes están definidas por funciones poco complejas y permiten así un tratamiento sencillo.

Por lo tanto, la función de distribución acumulada ***F(x)*** es el área acotada por la función de densidad que se encuentra a la izquierda de la recta ***X=x***, como se ilustra en la figura 4.3.

La función de distribución acumulada ***F(x)*** cumple las siguientes propiedades:

- $F(x) = P(X \leq x) = P(X < x)$
- $F(-\infty) = 0$
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
- $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

EJEMPLO 1.10
Suponga la siguiente función de distribución acumulada de la variable aleatoria ***X*** y determine:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}2x & 0 \leq x < 5 \\ 1 & 5 \leq x \end{cases}$$

a. $P(X < 2{,}8) = F(2{,}8) = 0{,}2 \times 2{,}8 = 0{,}56$
b. $P(X > 1{,}5) = 1 - P(X < 1{,}5) = 1 - F(1{,}5) = 1 - (0{,}2 \times 1{,}5) = 0{,}70$
c. $P(X < -2) = F(-2) = 0$
d. $P(X > 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - F(6) = 1 - 1 = 0$
e. $P(4 < X < 6) = F(6) - F(4) = 1 - (0{,}2 \times 4) = 0{,}2$

La ***media*** y la ***varianza*** de una variable aleatoria continua se definen de manera similar al caso de la variable aleatoria discreta. En las definiciones, la integración sustituye a la sumatoria.

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[(x - \mu_X)^2 f(x)\right] dx$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

Así mismo, la ***desviación estándar*** de X es $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$

EJEMPLO 1.11

Suponga que $f(x)=0,125x$ para $0<x<4$. Calcule la media y la varianza de X.

$$\mu_X = \int_0^4 (x \cdot 0{,}125x)dx = \frac{1}{8}\int_0^4 x^2 dx = \frac{1}{24}\cdot x^3 \Big|_0^4 = \frac{8}{3}$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = \frac{1}{8}\int_0^4 x^3 dx - \frac{64}{9} = 0{,}88$$

1.3.- TEOREMA DE CHÉBYSHEV

Para demostrar cómo la desviación estándar es indicadora de la dispersión de la distribución de una variable aleatoria, el matemático ruso Pafnuty Lvovich Chébyshev desarrolló un teorema en el que ofrece una garantía mínima acerca de la probabilidad de que una variable aleatoria asuma un valor dentro de k desviaciones estándar alrededor de la media.

Para cualquier variable aleatoria X con media μ y desviación estándar σ, la probabilidad de que X tome un valor contenido en k desviaciones estándar de la media, siendo k una constante positiva cualquiera, es cuando menos $1-\frac{1}{k^2}$.

Simbólicamente, el teorema se expresa de cualquiera de las siguientes maneras:

$$P(|X-\mu| \le k\sigma) \ge 1-\frac{1}{k^2} \qquad ó \qquad P(|X-\mu| > k\sigma) \le \frac{1}{k^2}$$

La desigualdad de Chébyshev es muy importante, ya que permite determinar los límites de las probabilidades de variables aleatorias discretas o continuas sin tener que especificar sus funciones de probabilidad. Este teorema asegura que la probabilidad de que una variable aleatoria se aleje de la media no más de k desviaciones estándar, es menor o igual a $1/k^2$ para algún valor de k >1.

Aunque la garantía no siempre es muy precisa, la ventaja sobre este teorema es su gran generalidad por cuanto es aplicable a cualquier variable aleatoria con cualquier distribución de probabilidad, ya sea discreta o continua.

EJEMPLO 1.12

El número de licencias de conducción expedidas en una ciudad durante el mes de junio puede considerarse como una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad se desconoce, pero se estima que su media sea aproximadamente $\mu=124$ y su desviación estándar $\sigma=7,5$. Según el teorema de Chébyshev, ¿con qué probabilidad se puede afirmar que se expedirán entre 64 y 184 licencias de conducción en esa ciudad durante el mes de junio?

Para dar solución a este problema se debe conocer cuál es ese valor de k. Para ello se parte de la definición de una desigualdad menor que de un valor absoluto:

$$P(-k\sigma \leq X-\mu \leq k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad P(-k\sigma+\mu \leq X \leq k\sigma+\mu) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

Tomando el factor de la izquierda, se tiene

$$P(-k\sigma+\mu \leq X \leq k\sigma+\mu) \qquad \Leftrightarrow \qquad P(64 \leq X \leq 184)$$

Esto quiere decir que: $-k\sigma+\mu=64$ o bien que $k\sigma+\mu=184$. Al despejar $\boldsymbol{k}$ de cualquiera de ellas se tiene:

$$k=\frac{\mu-64}{\sigma}=\frac{124-64}{7,5}=8$$

De manera que la desigualdad de Chébyshev queda planteada:

$$P(64 \leq X \leq 184) \geq 1-\frac{1}{8^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad P(64 \leq X \leq 184) \geq 0,9844$$

De modo que se puede afirmar que se expedirán entre 64 y 184 licencias de conducción en esa ciudad durante el mes de junio con una probabilidad del 98,44%.

EJERCICIOS CAPÍTULO 1.

1.- Una urna contiene cuatro balotas con los números 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Si se toman dos balotas de la urna sin sustitución y X es la suma de los números de las dos balotas extraídas, determine la distribución de probabilidad de X y represéntela por medio de un histograma.

2.- Para las siguientes tablas de datos, determine si se trata de una distribución de probabilidad. En los casos en que sea así, identifique los requisitos que no se satisfacen. En los casos en que si se describa una distribución de probabilidad, calcule su media y desviación estándar.

a.

x	0	1	2	3
$f(x)$	0,125	0,375	0,375	0,125

b.

x	0	1	2	3	4
$F(x)$	0,502	0,365	0,098	0,011	0,001

c.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,0000	0,0001	0,0006	0,0387	0,9606

3.- El espacio muestral de un experimento aleatorio es $\{a, b, c, d, e, f\}$, y cada resultado es igualmente probable. Se define una variable aleatoria de la siguiente manera:

resultado	a	b	c	d	e	f
x	0	0	1,5	1,5	2	3

Determine:

a. La función de probabilidad de X.

b. $P(X = 1{,}5)$

c. $P(0{,}5 < X < 2{,}7)$

d. $P(X > 3)$

e. $P(0 \leq X < 2)$

f. $P(X = 0 \;\; ó \;\; X = 2)$

g. $\mu_X \;\; y \;\; \sigma_X^2$

4.- Sea X una variable aleatoria discreta. Determine el valor de k para que la función $f(x) = k / x$, x = 1, 2, 3, 4, sea la función de probabilidad de X. Determine además $P(1 \leq X \leq 3)$.

5.- El rango de la variable aleatoria X es [0, 1, 2, 3, x], donde x es una incógnita. Si cada valor es igualmente probable y la media de X es 6, calcule x.

6.- Compruebe que la siguiente función es función de distribución acumulada de la variable aleatoria discreta ***X*** y calcule la función de probabilidad y las probabilidades pedidas.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -0{,}1 \\ 0{,}25 & -0{,}1 \le x < 0{,}3 \\ 0{,}75 & 0{,}3 \le x < 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 \le x \end{cases}$$

a. $P(X \le 0{,}5)$

b. $P(X \le 0{,}4)$

c. $P(0{,}4 \le X \le 0{,}6)$

d. $P(X < 0)$

e. $P(0 \le X < 0{,}1)$

f. $P(-0{,}1 < X < 0{,}1)$

7.- Verifique que la siguiente función es una función de probabilidad y calcule las probabilidades pedidas.

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

a. $P(X \le 2)$

b. $P(X > -2)$

c. $P(-1 \le X \le 1)$

d. $P(X \le -1 \text{ ó } X = 2)$

e. Determine μ_X y σ_X^2

8.- Dada la siguiente función de probabilidad acumulada de la variable aleatoria discreta ***X***,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1/4 & -1 \le x < 1 \\ 1/2 & 1 \le x < 3 \\ 3/4 & 3 \le x < 5 \\ 1 & x \ge 5 \end{cases}$$

Obtenga:

a. $P(X \le 3)$

b. $P(X \ge 1)$

c. $P(X < 3)$

d. $P(X = 3)$

e. $P(-0{,}4 < X < 4)$

f. $P(X = 5)$

9.- Sea X una variable aleatoria que representa el número de clientes que llega a un almacén en una hora. Dada la siguiente información:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	0,05	0,10	0,10	0,10	0,20	0,25	0,10	0,05	0,05

Encuentre ***E(X)*** y ***V(X)***.

10.- Demuestre que las siguientes funciones son funciones de densidad de probabilidad para algún valor de ***k***; determine el valor de ***k***. Calcule la media y varianza de cada una de las tres funciones de densidad.

- $f(x) = kx^2$ para $0 < x < 4$
- $f(x) = k(1+2x)$ para $0 < x < 2$
- $f(x) = ke^{-x}$ para $0 < x$

11.- La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua ***X*** está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/5 & 2 < x < 7 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

a. Demuestre que el área bajo la curva de esta función es igual a 1.
b. Determine $P(3 < X < 5)$

12.- Sea ***X*** una variable aleatoria continua.

a. Determine el valor de ***k***, de manera que la función ***f(x)*** sea la función de densidad de probabilidad de ***X***.

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

b Determine la función de distribución acumulada de ***X***.

c. Calcule $P(X \ge 1/2)$ y $P(-1/2 \le X \le 1/2)$.

13.- La función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua ***X*** está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Determine:

a. $f(x)$ **b.** $P(X < 1/2)$ **c.** $P(X > 3/4)$

14.- Suponga que la función de distribución acumulada de la variable aleatoria continua ***X*** es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0{,}25x + 0{,}5 & -2 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

Determine:

a. $P(X < 1{,}8)$

b. $P(X > -1{,}5)$

c. $P(X < -2)$

d. $P(-1 < X < 1)$

15. Suponga que $f(x) = 0{,}25$, para $0 < x < 4$. Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria continua $\boldsymbol{X}$.

16.- Sea $\boldsymbol{X}$ la variable que representa la cantidad de lluvia caída de una semana en una región determinada. Suponga que $\mu=1{,}0$ y $\sigma=0{,}25$ pulgadas. ¿Sería extraño que esta región registre más de dos pulgadas de agua durante una semana?

17.- Sea X el número de casos de rabia registrados en un mes en una ciudad determinada. Suponga que $\mu=1/2$ y $\sigma^2=1/25$. ¿Podría considerarse infrecuente registrar dos casos de rabia en un mes en esa ciudad?

18.- Se lleva a cabo un estudio de un fármaco destinado a mantener un ritmo cardíaco constante en pacientes que ya han sufrido un infarto. Sea $\boldsymbol{X}$ el número de latidos por minuto, registrado durante la utilización de este fármaco con la siguiente función de probabilidad:

x	40	60	68	70	72	80	100
$f(x)$	0,01	0,04	0,05	0,80	0,05	0,04	0,01

Utilizando la desigualdad de Chébyshev, ¿entre qué valores oscilará el ritmo cardíaco del 75% de los pacientes tratados?

19.- ¿Cuál es el valor mínimo de $\boldsymbol{k}$ en el teorema de Chébyshev para el cual la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor entre que $\mu-k\sigma$ y $\mu+k\sigma$ sea:

a. cuando menos 0,95?

b. cuando menos 0,99?

CAPITULO DOS

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETA

En este capítulo se examinan con detalle seis familias de distribuciones de probabilidad discreta y se hacen comentarios sobre su aplicación. Estas son: las distribuciones uniforme discreta, binomial, geométrica, binomial negativa, hipergeométrica y Poisson. También se estudian sus parámetros estadísticos más usados; es decir, la media o valor esperado, la varianza y la desviación estándar.

2.1. DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA

La variable aleatoria discreta más sencilla es aquella que toma sólo un número finito de valores posibles n, cada uno con la misma probabilidad. Ella se denomina entonces ***variable aleatoria discreta uniforme*** y su ***distribución uniforme discreta*** está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{n}$$

Para una variable aleatoria discreta uniforme X, que puede tomar los valores 1, 2, …, n, la media es:

$$\mu_X = E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Y su desviación estándar es:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

Otros autores expresan estos parámetros en términos del rango de la variable aleatoria discreta uniforme [a,b].

$$\mu_X = E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma_X = \sqrt{\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}}$$

No hay reparos para usar una u otra fórmula, queda a criterio del estudiante. Lo importante es que éste entienda que son equivalentes.

EJEMPLO 2.1.

La variable aleatoria X tiene una distribución discreta uniforme sobre los enteros $91 \leq x \leq 100$. Determine la media y la varianza de X.

$$\mu_X = E(X) = \frac{100+91}{2} = 95{,}5$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = \frac{(100-91+1)^2 - 1}{12} = 8{,}25$$

EJEMPLO 2.2

Un jugador lanza un dado corriente. Si sale un número primo, gana el valor en dólares pero si no sale el número, entonces pierde igual cantidad en dólares. Determine si el juego es favorable o desfavorable para el apostador.

Solución:
Los posibles valores que se obtienen al lanzar un dado son los números del 1 al 6, de ellos sólo tres son números primos, a saber: 2, 3 y 5. Estos números corresponden a las ganancias posibles en dólares del apostador. Las posibles pérdidas serán entonces: 1, 4 y 6. La siguiente tabla relaciona los posibles resultados de la variable aleatoria X (cantidad de dólares ganados al lanzar un dado) con sus respectivas probabilidades, que para este caso son iguales pues el dado no se encuentra cargado hacia una cara determinada.

x	-1	2	3	-4	5	-6
$f(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Observe que los números 1, 4 y 6 son negativos, pues corresponden al hecho de que el jugador pierde si no sale un número primo.
Como cada valor de la variable aleatoria tiene igual probabilidad, la distribución de probabilidad es uniforme discreta. Pero tenga en cuenta que los valores que toma X no son consecutivos, por tanto no se aplica la definición de valor esperado y debe recurrirse a la definición original Esto es:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x) = \frac{1}{6} \cdot (-1+2+3-4+5-6) = -\frac{1}{6}$$

Como el valor esperado es negativo, el juego es desfavorable para el apostador.

Si todos los valores del rango de la variable aleatoria X se multiplican por una constante (sin cambiar ninguna de las probabilidades), entonces la media y la desviación estándar de X quedan multiplicadas por la misma constante.

2.2.- DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Las distribuciones binomiales son las más útiles dentro de las distribuciones de probabilidad discretas. Sus áreas de aplicación incluyen inspección de calidad, ventas, mercadotecnia, medicina, investigación de opiniones, entre otras. Estas distribuciones permiten enfrentar circunstancias en las que los resultados pertenecen a dos categorías relevantes: que ocurra un evento determinado o que no lo haga. Este tipo de experimento aleatorio particular es denominado ***ensayo de Bernoulli***. Sus dos resultados posibles son denotados por "éxito" y "fracaso" y se define por p la probabilidad de un éxito y $1-p$ la probabilidad de un fracaso.

En general, un experimento aleatorio que consiste de n ensayos repetidos tales que:

- Los ensayos son independientes
- Cada ensayo es de tipo Bernoulli. Esto es, tiene sólo dos resultados posibles: "éxito" o "fracaso".
- La probabilidad de éxito de cada ensayo, denotada por p, permanece constante.

recibe el nombre de ***experimento binomial***.

La variable aleatoria X, de un experimento binomial, que corresponde al número de ensayos donde el resultado es un éxito, tiene una ***distribución binomial*** con parámetros p y n = 1, 2,… y su función de probabilidad es[9]:

$$\boxed{f(x;p,n)=\binom{n}{x}\cdot p^{x}\cdot(1-p)^{n-x} \qquad para\ x=0,1,\ldots,n}$$

Si se denota la probabilidad de fracaso como $q=1-p$, la función de probabilidad binomial se simplifica de la siguiente manera:

$$f(x;p,n)=\binom{n}{x}\cdot p^{x}\cdot q^{n-x}$$

En muchos casos es conveniente denotar la función de probabilidad binomial como $b(x;p,n)$.

La función de ***distribución binomial acumulada*** se expresa como:

---

[9] Recuerde que la notación $\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$ es una *combinación* y está desarrollada en el capítulo 2 de la Unidad Didáctica Uno del presente módulo.

$$P(X \le x) = F(x;p,n) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

EJEMPLO 2.3

La variable aleatoria X tiene una distribución binomial con n = 10 y p = 0,5. Calcule las probabilidades siguientes.

Antes de determinar las probabilidades pedidas, debe definirse la distribución binomial con los parámetros dados.

$$P(X = x) = f(x;0.5,10) = \binom{10}{x} \cdot 0.5^x \cdot (1-0.5)^{10-x} = \binom{10}{x} \cdot 0.5^{10}$$

a. $P(X = 5) = f(5;0.5,10) = \binom{10}{5} \cdot 0.5^{10} = 0{,}246$

b. $P(X \le 2) = F(2;0.5,10) = \binom{10}{1} \cdot 0.5^1 + \binom{10}{2} \cdot 0.5^2 = 0{,}055$

c. $P(X \ge 9) = 1 - P(X \le 8) = 1 - \sum_{i=0}^{8} \binom{10}{i} \cdot 0.5^i = 1 - 0{,}989 = 0{,}011$

d. $P(3 \le X < 5) = \sum_{i=3}^{4} \binom{10}{i} \cdot 0.5^i = 0{,}322$

e. $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - 0{,}055 = 0{,}945$

La ***media*** y la ***varianza*** de una variable aleatoria binomial dependen sólo de los parámetros $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{n}$. Y ellas se definen:

$$\mu_X = E(X) = np \qquad y \qquad \sigma_X^2 = np(1-p) = npq$$

EJEMPLO 2.4

La probabilidad de que un futbolista profesional haga gol de tiro libre es del 70%. En un entrenamiento, este futbolista hace 14 tiros libres. Calcule la probabilidad de que éste haga por lo menos 7 goles, la probabilidad de que falle entre 3 y 6 inclusive, la probabilidad de que no haga ningún gol y la probabilidad de que en todos sus tiros él acierte. Calcule también, el promedio de goles esperados.

Sea X el número de goles hechos por un futbolista en 14 tiros. Observe que X es una variable aleatoria que se distribuye como una binomial con p = 0.7 y n = 14.

$$b(x;p,n) = f(x;0.7,14) = \binom{14}{x} \cdot 0.7^x \cdot 0.3^{14-x}$$

Se pide la probabilidad de que haga por lo menos 7 goles, esto es:

$$P(X \geq 7) = \sum_{i=7}^{14} f(i;0.7,14) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - \sum_{i=0}^{6} \binom{14}{i} \cdot 0.7^i \cdot 0.3^{14-i} = 1 - 0{,}0315 = 0{,}9685$$

La probabilidad de que falle entre 3 y 6 equivale a que este haga entre 8 y 11 goles inclusive. Pues si falla 3 goles, es por que ha acertado en 11 y si falla en 6, ha hecho 8 goles. Recuerde que se ha definido la variable aleatoria como el número de aciertos o de goles hechos y no el número de fallas. De manera que la probabilidad pedida es:

$$P(8 \leq X \leq 11) = \sum_{i=8}^{11} \binom{14}{i} \cdot 0.7^i \cdot 0.3^{14-i} = 0{,}7459$$

La probabilidad de que el futbolista no haga ningún gol en sus 14 tiros libres está dada por:

$$P(X = 0) = \binom{14}{0} \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^{14} = 4{,}783 \times 10^{-8} \approx 0$$

Es casi imposible, en condiciones normales, que un futbolista con la destreza de 7 goles por cada 10 de tiro libre no pueda hacer un sólo gol en 14 oportunidades

Por último, la probabilidad de que éste haga los 14 goles será:

$$P(X = 14) = \binom{14}{14} \cdot 0.7^{14} \cdot 0.3^0 = 6{,}782 \times 10^{-3} \approx 0{,}0068$$

Esto quiere decir que nuestro futbolista tiene una probabilidad menor del 1% de acertar en todos sus 14 tiros libres.

Ahora bien, el promedio de goles que se esperan es:

$$\mu_X = E(X) = 14 \times 0.7 = 9.8$$

Con una desviación estándar de 1,71 goles. Compruébelo.

La distribución binomial se ha tabulado de manera extensa para distintos valores de n y p. En la tabla del archivo anexo “Tablas estadísticas”, se proporcionan las probabilidades acumuladas para distintos valores de los parámetros n y p. El procedimiento para su cálculo es el siguiente:

(1) Localice el valor de n, indicado en la primera columna de la tabla en mención.
(2) Ubique el valor correspondiente de x en la segunda columna.
(3) Identifique el renglón o fila de números, resultado de los pasos (1) y (2).

(4) En la primera fila de la tabla, que corresponde al valor de p, ubique el valor de su búsqueda.
(5) Haga coincidir o cruzar la fila que obtuvo en el paso (3) con la columna del paso (4).
(6) El valor correspondiente a la intersección obtenida en el paso (5) será la probabilidad acumulada deseada.
En el siguiente ejemplo se indica cómo hacer este cálculo.

EJEMPLO 1.5

Sea X una variable aleatoria binomial con n = 13 y p = 0.3. Haciendo uso de la tabla A.1. del anexo A, calcule la probabilidad de que X pueda ser cuatro.

La siguiente tabla es extraída de la tabla de distribución binomial acumulada, correspondiente al valor de n = 13.

Tabla 2.1.
Distribución binomial acumulada para *n* =13

		P				
n	***x***	***0.1***	***0.2***	***0.25***	***0.3***	***0.4***
13	0	0.2542	0.0550	0.0238	0.0097	0.0013
	1	0.6213	0.2336	0.1267	0.0637	0.0126
	2	0.8661	0.5017	0.3326	0.2025	0.0579
	3	0.9658	0.7473	0.5843	0.4206	0.1686
	4	0.9935	0.9009	0.7940	0.6543	0.3530
	5	0.9991	0.9700	0.9198	0.8346	0.5744
	6	0.9999	0.9930	0.9757	0.9376	0.7712
	7	1.0000	0.9988	0.9944	0.9818	0.9023
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.

En la figura siguiente se indican gráficamente uno a uno los pasos para el cálculo

de $$\boxed{P(X \leq 4) = F(4;0.3,13) = \sum_{i=0}^{13} \binom{13}{i} \cdot 0.3^{i} \cdot 0.7^{13-i} = 0,6543}$$

Figura 2.1.
Esquema gráfico para el uso de la tabla de distribución binomial acumulada

(4)

	n	*x*	*p* = 0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	
(1)	13	0	0.2542	0.0550	0.0238	0.0097	0.0013	
		1	0.6213	0.2336	0.1267	0.0637	0.0126	
		2	0.8661	0.5017	0.3326	0.2025	0.0579	
		3	0.9658	0.7473	0.5843	0.4206	0.1686	
(2)		4	0.9935	0.9009	0.7940	0.6543	0.3530	(3)
		5	0.9991	0.9700	0.9198	0.8346	0.5744	
		6	0.9999	0.9930	0.9757	0.9376	0.7712	
		7	1.0000	0.9988	0.9944	0.9818	0.9023	
		.	.	.	.	.	.	
		.	.	.	.	.	.	
		.	.	.	.	.	.	

(5)

De la misma manera, puede hacerse uso de esta tabla para determinar las probabilidades individuales puesto que la variable aleatoria binomial tiene un valor entero y se aplica la propiedad:

$$b(x;n,p) = F(x;n,p) - F(x-1;n,p)$$

Para ilustrarlo, sea $n=10$ y $p=0.3$, la probabilidad de que X sea exactamente cinco es:

$$P(X=5) = F(5) - F(4) = 0{,}9527 - 0{,}8497 = 0{,}1030$$

Nota:
En el siguiente link se puede encontrar un programa sencillo que permite calcular probabilidades de variables aleatorias discretas, simplemente conociendo los valores de los parámetros de cada una

[*http://www.pwpamplona.com/wen/calcu/calcu1.htm*](http://www.pwpamplona.com/wen/calcu/calcu1.htm)

2.3 DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

Considere ahora una serie de ensayos Bernoulli con una probabilidad constante de éxitos p, en la que el número de ensayos no es fijo como en la distribución binomial si no que éstos se realizan hasta que se obtiene el primer éxito. Sea entonces, la variable aleatoria X el número de ensayos realizados hasta obtener un éxito, ella tiene una ***distribución geométrica*** con parámetro p y se expresa:

$$f(x;p)=(1-p)^{x-1}\cdot p \qquad x=1,2,...$$

Tomando $q=1-p$ y denotando la distribución geométrica como $g(x;p)$, ella se simplifica de la siguiente manera:

$$\boxed{g(x;p)=q^{x-1}\cdot p}$$

La función de ***distribución geométrica acumulada*** se expresa como:

$$P(X\leq x)=F(x;p)=\sum_{i=0}^{x}q^{i-1}\cdot p$$

La ***media*** y la ***varianza*** de una variable aleatoria geométrica son:

$$\mu_X=E(X)=\frac{1}{p} \qquad \sigma_X^2=V(X)=\frac{q}{p^2}$$

EJEMPLO 1.6

Suponga que cada una de las llamadas que hace una persona a una estación de radio muy popular tiene una probabilidad de 2% de que la línea no esté ocupada. Suponga que las llamadas son independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llamada que entre sea de la décima persona que la realizó?

Sea X la variable aleatoria correspondiente a encontrar la línea desocupada, en otras palabras, que entre la llamada. Entonces X se distribuye geométricamente con p = 0.02.

$$g(x;0.02)=0.98^{x-1}\cdot 0.02$$

Entonces: $P(X=10)=g(10;0.02)=0.98^9\cdot 0.02=0{,}0167$

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario llamar más de cinco veces para hallar desocupada la línea?

$$P(X>5)=1-P(X\leq 5)=1-\sum_{i=0}^{5}0.98^{i-1}\cdot 0.02$$

$$P(X>5)=1-(0{,}0204+0{,}0200+0{,}0196+0{,}0192+0{,}0188+0{,}0184)=0{,}8836$$

c. ¿Cuál es el número promedio de llamadas que deben hacerse para hallar desocupada la línea?

$\mu_X=E(X)=\dfrac{1}{0.02}=50$ llamadas.

2.4.- DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

En la distribución geométrica, la variable aleatoria estaba definida como el número de ensayos Bernoulli necesarios para obtener el *primer* éxito. Suponga ahora que se desea conocer el número de ensayos hasta obtener r éxitos; en este caso la variable aleatoria es denominada binomial negativa.

La ***distribución binomial negativa*** o ***distribución de Pascal*** es una generalización de la distribución geométrica donde la variable aleatoria X es el número de ensayos Bernoulli efectuados hasta que se tienen r éxitos, con una probabilidad constante de éxito p. Se dice entonces que X tiene una distribución binomial negativa con parámetros p y r = 1, 2, 3,…

$$f(x;p,r)=\binom{x-1}{r-1}\cdot q^{x-r}\cdot p^{r} \qquad x=r,r+1,r+r+2+\ldots$$

Algunos autores denotan esta distribución como $b^{*}(x;p,r)$ Observe que en el caso especial donde r = 1, la variable aleatoria binomial negativa se convierte en una variable aleatoria geométrica.

La tabla siguiente expresa la diferencia entre una variable aleatoria binomial y una variable aleatoria binomial negativa. En este sentido, la variable aleatoria binomial negativa se considera como el opuesto, o el negativo, de una variable aleatoria binomial.

Tabla 2.2.
Comparación entre una variable aleatoria binomial
y una variable aleatoria binomial negativa

Variable aleatoria		Predeterminado	Aleatorio
Binomial	Conteo del número de éxitos en n ensayos Bernoulli,	Número total de ensayos	Número de éxitos.
Binomial negativa	Conteo del número se ensayos necesarios para obtener r éxitos.	Número de éxitos	Número de ensayos.

La media y la varianza de una variable aleatoria binomial negativa X con parámetros p y r son:

$$\mu_X = E(X) = \frac{r}{p} \qquad\qquad \sigma_X^2 = V(X) = \frac{r \cdot q}{p^2}$$

Ejemplo 2.7

Suponga otra vez el caso del jugador de fútbol del ejemplo 1.4. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto tiro que lanza sea precisamente su tercer gol?

Sea X el número de tiros libres hechos por un futbolista para obtener tres goles. Observe que X es una variable aleatoria binomial negativa con p = 0.7 y r = 3.

$$b^*(x;0.7,3) = \binom{x-1}{3-1} \cdot 0.3^{x-3} \cdot 0.7^3$$

La probabilidad pedida es:

$$P(X = 5) = \binom{5-1}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^3 = 0{,}1852$$

La función de ***distribución binomial negativa acumulada*** se expresa como:

$$\boxed{P(X \le x) = F(x;p,r) = \sum_{i=r}^{x} \binom{i-1}{r-1} q^{i-r} \cdot p^r}$$

EJEMPLO 2.8

Suponga que X es una variable aleatoria binomial negativa con p = 0,2 y r = 4. Calcule:

a. La media de X. $\mu_X = E(X) = \dfrac{4}{0.2} = 20$

b. $P(X = 20) = \binom{20-1}{4-1} \cdot 0.8^{20-4} \cdot 0.2^4 = 0{,}0436$

c. $P(X \le 6) = \sum_{i=4}^{6} \binom{i-1}{3} \cdot 0.8^{i-4} \cdot 0.2^4 = 0{,}0170$

d. $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - 0{,}0170 = 0{,}9830$

2.5. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

En la distribución binomial se veía que el muestreo se hacía con reemplazo, asegurando la independencia de los ensayos y la probabilidad constante. Supóngase ahora que el muestreo es *sin reemplazo*, caso en el cual los ensayos no son independientes.

Sea N el número de elementos de un conjunto de los cuales k son determinados como éxitos y N-k como fallas, se trata ahora de determinar la probabilidad de x éxitos en n ensayos de los N elementos del conjunto donde $k \leq N$ y $n \leq N$. Sea también la variable aleatoria X el número de éxitos en la muestra. Entonces, X tiene una ***distribución hipergeométrica*** y su función de distribución de probabilidad está dada por:

$$f(x; N, k, n) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = 0,1,2,\ldots mín(k, n)$$

La expresión $mín(k,n)$ corresponde al valor menor entre el tamaño de la muestra k y el número máximo de éxitos que puede presentarse en la muestra n. La distribución hipergeométrica suele expresarse como $h(x; N, k, n)$.

La función de ***distribución hipergeométrica acumulada*** se expresa como:

$$P(X \leq x) = F(x; N, k, n) = \sum_{i=0}^{x} \frac{\binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

El área donde más aplicaciones tiene la distribución hipergeométrica es el control estadístico de calidad y la aceptación de muestreo, el siguiente ejemplo es muestra de ello.

EJEMPLO 2.9
Un lote de 75 quesos contiene cinco en los que la variabilidad de su peso es inaceptable. Se toma una muestra al azar de 10 quesos, sin reemplazo. Determine las siguientes probabilidades.

Antes de iniciar con el cálculo de las probabilidades, se debe identificar el tipo de variable aleatoria que interviene en el problema y sus respectivos parámetros. Sea $\boldsymbol{X}$ el número de quesos inaceptables en una muestra de 10, tomados de un lote de 75 quesos de los cuales 5 son inaceptables. Esto es, $\boldsymbol{X}$ es una variable aleatoria hipergeométrica con parámetros N=75, k=5 y n=10 y su distribución de probabilidad es:

$$h(x;75,5,10) = \frac{\binom{5}{x}\binom{70}{10-x}}{\binom{75}{10}}$$

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los quesos inaceptables se encuentren e la muestra?

$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{70}{10}}{\binom{75}{10}} = 0{,}4786$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los quesos inaceptables se encuentre en la muestra?

$$P(X \le 1) = F(0) + F(1) = \frac{\binom{5}{0}\binom{70}{10}}{\binom{75}{10}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{70}{9}}{\binom{75}{10}} = 0{,}4786 + 0{,}3923 = 0{,}8709$$

c. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los quesos inaceptables se encuentre en la muestra?

$$P(X=1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{70}{9}}{\binom{75}{10}} = 0{,}3923$$

La media y la varianza de una variable aleatoria hipergeométrica $\boldsymbol{X}$ con parámetros N, k y n son:

$$\mu_X = E(X) = np \qquad\qquad \sigma_X^2 = V(X) = npq \cdot \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

$$donde \;\; p = \frac{k}{N} \;\; y \;\; q = 1 - p = \frac{N-k}{N}$$

Observe que el valor de la media para una variable aleatoria hipergeométrica es similar al resultado correspondiente a una variable aleatoria binomial. Además, el valor de su varianza difiere entre ambas distribuciones por el factor: $\frac{N-n}{N-1}$, que se conoce como ***factor de corrección de población finita***. Esta corrección se hace sobre la varianza binomial debido a que el muestreo en la distribución hipergeométrica es *sin reemplazo* de un conjunto finito de tamaño N.

Si n es pequeño respecto a N, entonces la corrección es pequeña y la distribución hipergeométrica es similar a la binomial. De esta forma, la distribución hipergeométrica tiende a la binomial conforme el cociente de n/N se vuelve más pequeño. De manera general, la función de probabilidad binomial aproximará de manera adecuada a la distribución de probabilidad hipergeométrica si se tiene que $n<0,1N$.

EJEMPLO 2.10

Un fabricante asegura que sólo el 1% de su producción total se encuentra defectuosa. De un lote de 1000 artículos y se seleccionan 25 al azar para inspeccionarlos. Si lo que afirma el fabricante es cierto, ¿cuál es la probabilidad de observar dos o más artículos defectuosos en la muestra?

Sea $\boldsymbol{X}$ el número de artículos defectuosos de una muestra de 25, tomados de un lote de 1000 con 10 artículos defectuosos. Entonces $\boldsymbol{X}$ es una variable aleatoria hipergeométrica con parámetros N=1000, k=10 y n=25. Dado que el cociente n/N=0,025<0,1 puede emplearse la distribución binomial para aproximar la probabilidad deseada.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_b(1;0.01,25)$$

$P(X \geq 2) = 1 - \left[\binom{25}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0.01 \cdot 0.99^{24} \right]$ Donde F_b es la distribución

$$P(X \geq 2) = 1 - (0,7778 + 0,1964) = 0,0258$$

Como se ve, la probabilidad de tener dos o más artículos en el lote es demasiado pequeña. Esto quiere decir que se debe rechazar el lote si se encuentran más de dos artículos defectuosos, pues habría serias dudas de que el fabricante esté diciendo la verdad frente a su producción.

2.6. DISTRIBUCIÓN POISSON

Esta es otra distribución de probabilidad discreta útil en la que la variable aleatoria representa el número de eventos independientes que ocurren a una velocidad constante. La distribución de Poisson, llamada así en honor a Simeón Denis Poisson probabilista francés que fue el primero en describirla, es el principal modelo de probabilidad empleado para analizar problemas de líneas de espera, confiabilidad y control de calidad; como el número de personas que llegan a un lugar determinado en un tiempo definido, los defectos en piezas similares para el material, el número de bacterias en un cultivo, el número de goles anotados en un partido de fútbol, el número de fallas de una máquina en una hora o en un día, la cantidad de vehículos que transitan por una autopista, el número de llamadas telefónicas por minuto, etc. Como se puede observar se trata de hallar la probabilidad de ocurrencia de cualquier número por unidad de medición (temporal o espacial).

Dado un intervalo de números reales, si éste puede dividirse en subintervalos suficientemente pequeños, tales que:

(1) La probabilidad de más de un acierto en un subintervalo es cero o insignificante.

(2) La probabilidad de una ocurrencia en un subintervalo es la misma para todos los subintervalos, y es proporcional a la longitud de estos.

(3) El conteo de ocurrencias en cada subintervalo es independiente del de los demás subintervalos.

entonces el experimento aleatorio recibe el nombre de ***proceso Poisson*** o ***flujo de procesos de Poisson***.

Un proceso Poisson constituye un mecanismo físico aleatorio en el cual los eventos ocurren al azar en una escala de tiempo (o de distancia). Por ejemplo, la ocurrencia de accidentes en un cruce específico de una carretera sigue dicho proceso. Cabe recordar que no es posible predecir con exactitud la cantidad de accidentes que pueden ocurrir en determinado intervalo de tiempo, pero sí el patrón de los accidentes en gran número de dichos intervalos.

Dado un proceso Poisson donde λ es el número promedio de ocurrencias en el intervalo de números reales donde este se define, la variable aleatoria X correspondiente al número de ocurrencias en el intervalo es llamada ***variable aleatoria Poisson*** y su función de probabilidad está dada por:

$$f(x;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad\qquad x=0,1,2,\ldots \quad \lambda>0$$

La distribución Poisson representa la probabilidad de que un evento aislado ocurra un número específico de veces en un intervalo de tiempo (o un espacio) dado, al fijarse la tasa de acontecimientos en un continuo temporal (o espacial). Su parámetro es λ, el número promedio de ocurrencias del experimento aleatorio. En muchos casos se denota como $\wp(x;\lambda)$.

La probabilidad de que una variable aleatoria Poisson X sea menor o igual a un valor de x se determina por la función de distribución acumulada:

$$P(X\leq x)=F(x;\lambda)=\sum_{i=0}^{x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i!}$$

La distribución Poisson se ha tabulado de manera para distintos valores de λ. En la tabla A.2. del anexo A, se proporcionan las probabilidades acumuladas para distintos valores del parámetro λ. El procedimiento para su cálculo es similar al seguido en el cálculo de probabilidades acumuladas de variables aleatorias binomiales,

(1) Localice el valor de λ, indicado en la primera fila de la tabla.
(2) Identifique la columna de números que se obtienen del paso (1).
(3) Ubique el valor correspondiente de x en la primera columna.
(4) Haga coincidir o cruzar la fila que obtuvo en el paso (3) con la columna del paso (1) para obtener el valor de la probabilidad acumulada deseada.

Se puede hacer uso de esta tabla para determinar las probabilidades individuales puesto que la variable aleatoria Poisson tiene un valor entero y se aplica la propiedad:

$$\wp(x;\lambda)=F(x;\lambda)-F(x-1;\lambda)$$

El número promedio de ocurrencias de un evento por unidad de tiempo (o de espacio) es la media de la variable aleatoria Poisson y se define como:

$$\mu_X=E(X)=\lambda$$

Y la desviación estándar resulta ser: $\sigma_X^2=V(X)=\lambda$

EJEMPLO 2.11

Un equipo de fútbol, en un campeonato local, lleva un promedio de 2,5 goles anotados. Calcule la probabilidad de que en un partido cualquiera el equipo haga:

a. cuatro goles.
b. entre 4 y 6 goles inclusive.
c. no más de tres goles.
d. ningún gol.
e. por lo menos tres goles.

Sea X el número de goles por partido de fútbol jugado anotados por un equipo. Entonces X se distribuye como una Poisson con parámetro $\lambda=2.5$.

$$\wp(x;2.5)=\frac{e^{-2.5}2.5^{x}}{x!}$$

Haciendo uso de las tablas de probabilidades acumuladas de Poisson, se obtiene:

a. $P(X=4)=\sum_{x=0}^{4}\wp(x;2.5)-\sum_{x=0}^{3}\wp(x;2.5)=F(4;2.5)-F(3;2.5)=0{,}8912-0{,}7576=0{,}1336$

b. $$P(4\le X\le 6)=\sum_{x=4}^{6}\wp(x;2.5)=\sum_{x=0}^{6}\wp(x;2.5)-\sum_{x=0}^{3}\wp(x;2.5)$$
$$=F(6;2.5)-F(3;2.5)=0{,}9858-0{,}7576=0{,}2282$$

c. $P(X\le 3)=F(3;2.5)=0{,}7576$

d. $P(X=0)=\sum_{x=0}^{0}\wp(x;2.5)=F(0;2.5)=0{,}0821$

e. $P(X\ge 3)=1-\sum_{x=0}^{2}\wp(x;2.5)=1-F(2;2.5)=1-0{,}5438=0{,}4562$

2.6.1. Distribución Poisson como aproximación a la distribución binomial

La distribución Poisson ofrece una aproximación excelente a la función de probabilidad binomial cuando la probabilidad p de tener un éxito es pequeña y el tamaño n de la muestra es grande. Podría decirse que se tiene una aproximación muy satisfactoria cuando $n\ge 20$ y $n\le 0.05$ y tal aproximación se incrementa a medida que disminuye p. Este resultado se obtiene mediante el siguiente teorema.

Sea X una variable aleatoria con distribución binomial y función de probabilidad:

$$b(x;p,n)=\binom{n}{x}\cdot p^{x}\cdot q^{n-x}$$

Si para $n = 1, 2, \ldots$ la relación $p=\frac{\lambda}{n}$ es cierta para alguna constante $\lambda>0$, entonces:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} b(x;n,p) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad\qquad x = 0,1,2,\ldots$$

De acuerdo al anterior teorema, la media y la varianza de la distribución binomial es:

$$E(X) = V(X) = np = \lambda$$

EJEMPLO 2.12.

Si el 1% de las bombillas fabricadas por una empresa son defectuosas, determine la probabilidad de que en una muestra de 100 bombillas 3 sean defectuosas.

Sea $\boldsymbol{X}$ el número de bombillas defectuosas con $p = 0.01$ y $n = 100$, entonces $\boldsymbol{X}$ es una variable aleatoria binomial que puede aproximarse a una Poisson con parámetro $\lambda = np = (0.01)(100) = 1$ y su función de distribución es:

$$\wp(x;1) = \frac{e^{-1}1^x}{x!}$$

La probabilidad de encontrar 3 bombillas defectuosas es:

$$P(X = 3) = \frac{e^{-1}1^3}{3!} = 0{,}0613$$

EJERCICIOS CAPITULO DOS

1.- Se sabe que el 60% de los alumnos de una universidad asisten a clases el día viernes. En una encuesta a 8 alumnos de la universidad. ¿Cuál es la probabilidad de que a) por lo menos siete asistan a clase el día viernes. b) por lo menos dos no asistan a clase.

2.- Según los registros universitarios fracasa el 5% de los alumnos de cierto curso. ¿cuál es la probabilidad de que de 6 estudiantes seleccionados al azar, menos de 3 hayan fracasado?

3.- En promedio, el 10% de las varillas de madera usadas en cierto producto presentan problemas para ser usadas. ¿cuál es la probabilidad de que en un paquete de 15 varillas, a) encuentre exactamente 5 con defectos. b) por lo menos 10 estén nudosas, c) no mas de 4 estén nudosas.

4.- Una compañía de seguros considera que alrededor del 25% de los carros se accidentan cada año. Cual es la probabilidad de que por lo menos 3 de una muestra de 7 vehículos asegurados, se haya accidentado?

5.- Los registros muestran que 30% de los pacientes admitidos en una clínica, no pagan sus facturas y eventualmente se condona la deuda. Suponga que llegan 4 nuevos pacientes a la clínica, cual es la probabilidad de que se tenga que perdonar la deuda de uno de los cuatro. B) los cuatro pacientes paguen sus facturas.

6.- El conmutador de un hospital recibe en promedio 20 llamadas cada dos minutos. Cual es la probabilidad de que lleguen como máximo dos llamadas en un periodo de 15 segundos.

7.- Los clientes llegan a una exhibición a razón de 6,8 clientes /hora Calcule la probabilidad de que a) en la primera media hora por lo menos lleguen dos clientes; b) en cualquier hora dada llegue mas de uno.

8.- El numero promedio de urgencias que llega a un hospital en una hora es de 12. Cual es la probabilidad de que en un minuto lleguen por lo menos 2 urgencias. Cual es el numero de urgencias esperado por minuto?

9.- Las estadísticas indican que en una fabrica se presentan en promedio 10 accidentes por trimestre. Determine la probabilidad de que no haya mas de 12 accidentes en el último trimestre.

10.- El numero de personas que ingresan a la unidad de cuidados intensivos de un hospital en un día cualquiera, es de 5 personas diarias. Cual es la probabilidad de que el numero de personas que ingresan a la unidad de cuidados intensivos en un día particular sea menor o igual a 2 personas?

11.- Un jefe de almacén sabe que 6 de las 25 bicicletas que tiene para la venta presentan fallas en los frenos y necesitan ajuste. Si el vendedor que no tenía conocimiento de lo anterior vendió en el día 4 bicicletas, ¿cuál es la probabilidad de que vendiera dos de las que requerían ajuste

12.-De un grupo de 20 ingenieros con doctorado, se seleccionan 10 para un alto cargo de una compañía. Cual es la probabilidad de que los 10 seleccionados incluya a los 5 ingenieros que tienen las mejores calificaciones del grupo de 20?

13.- Un almacén contiene diez maquinas impresoras, cuatro de las cuales están defectuosas. Una compañía selecciona al azar cinco de las maquinas, pensando que todas están en condiciones de trabajar, ¿cuál es la probabilidad de que las cinco maquinas estén en buen estado?

14.- En promedio una casa de cada 2000 en cierta zona de Barranquilla se incendia durante el año, si hay 6000 casas en dicha zona ¿Cuál es la probabilidad de que mas de 3 casas se incendien durante el año?

15.- La probabilidad de que un estudiante de aviación pase la prueba escrita para obtener su licencia de piloto privado es de 0.7. encuentre la probabilidad de que una persona pase la prueba antes del cuarto intento.

16.- La experiencia mostró que en promedio, solamente uno de diez pozos perforados llega a producir petróleo. Cual es la probabilidad de que necesite ocho perforaciones para encontrar petróleo.

17.- En un departamento de control de calidad se inspeccionan las unidades terminadas que provienen de una línea de ensamble. Se piensa que la proporción de unidades defectuosas es de 0.05. Cual es la probabilidad de que la vigésima unidad inspeccionada sea la segunda que se encuentre defectuosa?

CAPITULO TRES

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUA

3.1. DISTRIBUCION UNIFORME

Se dice que una variable *X* posee una **distribución uniforme** en el intervalo [*a*,*b*], $X \rightsquigarrow \mathbf{U}(a,b)$ si su función de densidad es la siguiente:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{si } a \leq x \leq b}$$

Con esta ley de probabilidad, la probabilidad de que al hacer un experimento aleatorio, el valor de *X* este comprendido en cierto subintervalo de [*a*,*b*] depende únicamente de la longitud del mismo, no de su posición.

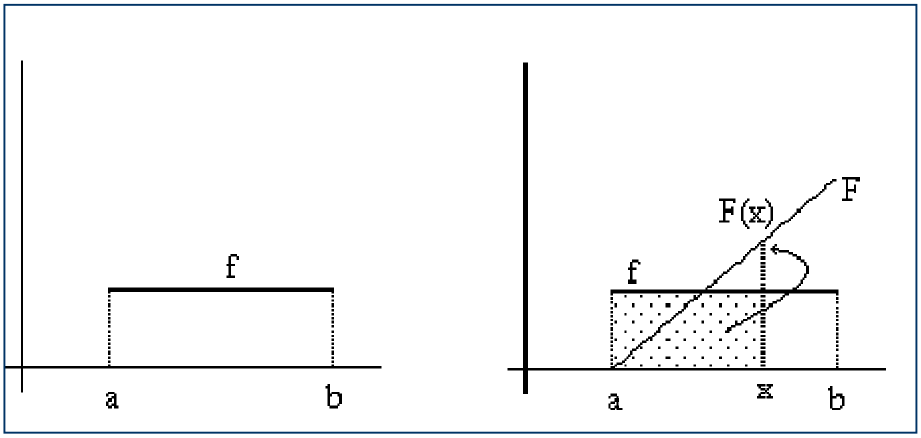
Teniendo en cuenta que si $x \in [a,b]$,

$$\int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \quad t \Big]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

la función de distribución de $X \rightsquigarrow \mathbf{U}(a,b)$ es:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b \leq x \end{cases}}$$

Figura 3.1
Función de Probabilidad y de Distribución de la Variable Uniforme Continua



El **valor esperado** se puede definir:

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{2(b-a)}\left[x^2\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}}$$

La varianza:

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{3(b-a)}\left[x^3\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b+a)^2}{3}$$

$$\boxed{\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Ejemplo 3.1:

El volumen de precipitaciones estimado para el próximo año en la ciudad de Bucaramanga va a oscilar entre 400 y 500 litros por metro cuadrado. Calcular la función de distribución y la precipitación media esperada:

$$f(x) = \frac{1}{500 - 400} = 0{,}01$$

Es decir, que el volumen de precipitaciones esté entre 400 y 401 litros tiene un 1% de probabilidades; que esté entre 401 y 402 litros, otro 1%, etc.

El valor medio esperado es:

$$E(x) = \frac{400 + 500}{2} = 450$$

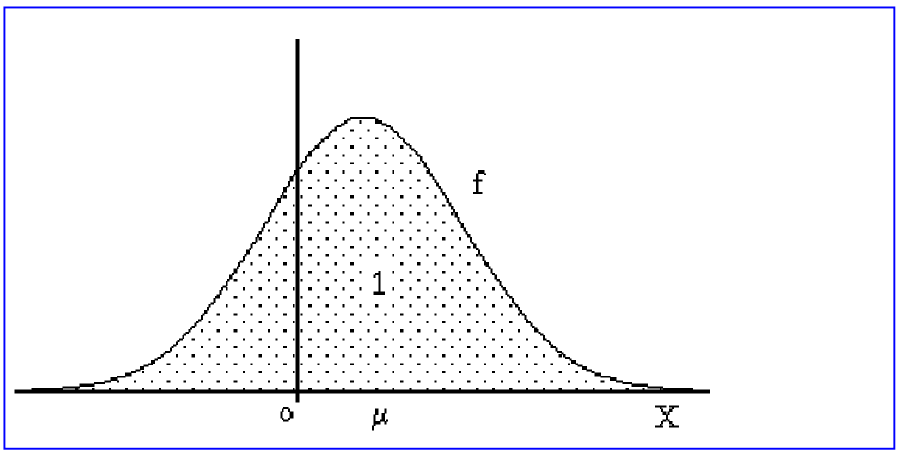
Es decir, la precipitación media estimada en Bucaramanga para el próximo año es de 450 litros.

3.2. DISTRIBUCION NORMAL O GAUSSIANA

Es el **modelo de distribución más utilizado** en la práctica, ya que multitud de fenómenos se comportan según una distribución normal.

Esta distribución de caracteriza porque los valores se distribuyen formando una **campana de Gauss**, en torno a un valor central que coincide con el valor medio de la distribución:

Figura 3.2
Función de densidad de una variable aleatoria de distribución normal



La *distribución gaussiana*, recibe también el nombre de *distribución normal*, ya que una gran mayoría de las variables aleatorias continuas de la naturaleza siguen esta distribución. Se dice que una variable aleatoria *X* sigue una **distribución normal** si su función de densidad es:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Esta distribución viene definida por **dos parámetros**: **X: N (μ, σ²)**

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \mu \\ \mathbf{Var}[X] &= \sigma^2 \end{aligned}$$

μ: es el valor medio de la distribución y es precisamente donde se sitúa el centro de la curva (de la campana de Gauss).

σ^2 : es la varianza. Indica si los valores están más o menos alejados del valor central: si la varianza es baja los valores están próximos a la media; si es alta, entonces los valores están muy alejados de ella. Se representa por **σ^2** porque su raiz cuadrada, **σ**, es la denominada desviación estandar.

3.2.1 Distribución normal estándar o tipificada

Cuando la media de la distribución normal es 0 y la varianza es 1, se denomina **"normal tipificada**", y su ventaja reside en que hay tablas, o rutinas de cálculo que permiten obtener esos mismos valores, donde se recoge la probabilidad acumulada para cada punto de la curva de esta distribución.

$$\boxed{Z \rightsquigarrow \mathbf{N}(0,1) \qquad \Longleftrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \forall z \in \mathbb{R}}$$

Además, **toda distribución normal se puede transformar en una normal tipificada:**

En el caso de que tengamos una distribución diferente, $X \rightsquigarrow \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$

se obtiene *Z* haciendo el siguiente cambio:

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathbf{N}(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathbf{N}(0,1)}$$

La **distribución normal tipificada** tiene la ventaja, como ya hemos indicado, de que las probabilidades para cada valor de la curva se encuentran recogidas en una tabla. (Ver tabla completa en el archivo anexo de Tablas estadísticas)

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5723
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7090	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549

0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7813	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8416	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

¿Cómo se lee esta tabla?

La columna de la izquierda indica el valor cuya probabilidad acumulada queremos conocer. La primera fila nos indica el segundo decimal del valor que estamos consultando.

Ejemplo 3.2.

Queremos conocer la probabilidad acumulada en el valor 2,75. Entonces buscamos en la columna de la izquierda el valor 2,7 y en la primera fila el valor 0,05. La casilla en la que se interceptan es su probabilidad acumulada (0,99702, es decir 99.7%).

Atención: la tabla nos da la probabilidad acumulada, es decir, la que va desde el inicio de la curva por la izquierda hasta dicho valor. No nos da la probabilidad concreta en ese punto. En una distribución continua en el que la variable puede tomar infinitos valores, la probabilidad en un punto concreto es prácticamente despreciable.

Ejemplo 3.3.

Imaginemos que una variable continua puede tomar valores entre 0 y 5. La probabilidad de que tome exactamente el valor 2 es despreciable, ya que podría tomar infinitos valores: por ejemplo: 1,99, 1,994, 1,9967, 1,9998, 1999791, etc.

Veamos **otros ejemplos**:

a.- Probabilidad acumulada en el valor 0,67: la respuesta es 0,7486

b.- Probabilidad acumulada en el valor 1,35: la respuesta es 0,9115

c,- Probabilidad acumulada en el valor 2,19: la respuesta es 0,98574

Veamos ahora, como podemos **utilizar esta tabla con una distribución normal**:

Ejemplo 3.4.

El salario medio de los empleados de una empresa se distribuye según una distribución normal, con media $ 500.000. y desviación típica $100.000 Calcular el porcentaje de empleados con un sueldo inferior a $700.000

Solución:

Lo primero que haremos es transformar esa distribución en una normal tipificada, para ello se crea una nueva variable (Z) que será igual a la anterior (X) menos su media y dividida por la desviación típica

$$Z = \frac{700.000 - 500.000}{100.000}$$

Esta nueva variable se distribuye como una normal tipificada. La variable Z que corresponde a una variable X de valor 700.000 es:

$$Z = 2$$

Ya podemos consultar en la tabla la probabilidad acumulada para el valor 2 (equivalente a la probabilidad de sueldos inferiores a $700.000.). Esta probabilidad es 0,97725

Por lo tanto, el porcentaje de empleados con salarios inferiores a $700.000 es del 97,725%.

EJEMPLO 3.3.

La renta media de los habitantes de un país es de 4 millones de pesos/año, con una varianza de 1,5. Se supone que se distribuye según una distribución normal. Calcular el Porcentaje de la población con una renta inferior a 3 millones de pesos.

Solución:

Lo primero que tenemos que hacer es calcular la normal tipificada:

$$Z = \frac{3-4}{\sqrt{1.5}}$$

Recordemos que el denominador es la desviación típica (raíz cuadrada de la varianza)

El valor de Z equivalente a 3 millones de pesos es -0,816.

$P(X < 3) = P(Z < -0{,}816)$

Ahora tenemos que ver cuál es la probabilidad acumulada hasta ese valor. Tenemos un problema: la tabla de probabilidades sólo abarca valores positivos, no obstante, este problema tiene fácil solución, ya que la distribución normal es simétrica respecto al valor medio.

Por lo tanto:

$P(Z < -0{,}816) = P(Z > 0{,}816)$

Por otra parte, la probabilidad que hay a partir de un valor es igual a 1 (100%) menos la probabilidad acumulada hasta dicho valor:

$P(Z > 0{,}816) = 1 - P(Z < 0{,}816) = 1 - 0{,}7925 = 0{,}2075$

Luego, el 20,75% de la población tiene una renta inferior a 3 millones pesos.

EJEMPLO 3.4

La vida media de los habitantes de un país es de 68 años, con una varianza de 25. Se hace un estudio en una pequeña ciudad de 10.000 habitantes:
a) ¿Cuántas personas superarán previsiblemente los 75 años?
b) ¿Cuántos vivirán menos de 60 años?

Solución:
a) ¿Cuántas personas superarán previsiblemente los 75 años? Calculamos el valor de la normal tipificada equivalente a 75 años

$P(X > 75) = P(Z > 1{,}4) = 1 - P(Z < 1{,}4) = 1 - 0{,}9192 = 0{,}0808$

Luego, el 8,08% de la población (808 habitantes) vivirán más de 75 años.

b) Personas que vivirán (previsiblemente) menos de 60 años. Calculamos el valor de la normal tipificada equivalente a 60 años

$P(X < 60) = P(Z < -1{,}6) = P(Z > 1{,}6) = 1 - P(Z < 1{,}6) = 0{,}0548$

Luego, el 5,48% de la población (548 habitantes) no llegarán probablemente a esta edad.

EJEMPLO 3.5

La vida media de una lámpara, según el fabricante, es de 68 meses, con una desviación típica de 5. Se supone que se distribuye según una distribución normal En un lote de 10.000 lámparas. a) ¿Cuántas lámparas superarán previsiblemente los 75 meses?. b) ¿Cuántos lámparas se estropearán antes de 60 meses?

Solución:

$Z = (75 - 68)/5 = 1{,}4$

$P(X > 75) = P(Z > 1{,}4) = 1 - P(Z \leq 1{,}4) = 1 - 0{,}9192 = 0{,}0808$

Luego, el 8,08% de las lámparas (808 lámparas) superarán los 75 meses

b) $Z = (60 - 68)/5 = -1{,}6$

$P(X \leq 60) = P(Z \leq -1{,}6) = P(Z > 1{,}6) = 1 - P(Z \leq 1{,}6) = 0{,}0548$

Luego, el 5,48% del lote (548 lámparas) no llegarán probablemente a durar 60 meses

Ejemplo 3.6

El consumo medio bimestral de energía eléctrica en una ciudad es de 59 Kwh., con una desviación típica de 6 Kwh. Se supone que se distribuye según una distribución normal. a) ¿Cuántos Kwh. tendría que consumir bimestralmente para pertenecer al 5% de la población que más consume?. b) Si usted consume 45 Kwh. ¿qué % de la población consume menos que usted?

Solución:

a) Buscamos en la tabla el valor de la variable tipificada cuya probabilidad acumulada es el 0,95 (95%), por lo que por arriba estaría el 5% restante. Este valor corresponde a Z = 1,645. Ahora calculamos la variable normal X equivalente a ese valor de la normal tipificada:

$1{,}645 = (X - 59)/6 \rightarrow X = 67{,}87$

Por lo tanto, tendría usted que consumir más de 67,87 Kwh. bimestralmente para pertenecer al 5% de la población que más consume

b) Vamos a ver en que nivel de la población se situaría usted en función de los 45 Kwh. consumidos.

Calculamos el valor de la normal tipificada correspondiente a 45 Kwh.

$Z = (45 - 59)/9 = -2.333$

$P(X \leq 45) = P(Z \leq -2{,}333) = P(Z > 2{,}333) = 1 - P(Z \leq 2{,}333) = 1 - 0{,}9901 = 0{,}0099$

Luego, tan sólo un 1,39% de la población consume menos que usted

EJERCICIOS CAPITULO 3

1.- Una maquina automática con funcionamiento electrònico hace pernos de 3/8 de pulgada los cuales deben tener una longitud de 3 pulgadas. Si en realidad las longitudes de los pernos de 3/8 se distribuyen uniforme en el intervalo (2,5 : 3,5) pulgadas ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los pernos elegido al azar, de un lote determinado tenga una longitud de:
a.- este entre 2.75 y 3.25 pulgadas
b.- sea mayor de 3.25 pulgadas
c.- sea exactamente igual a 3 pulgadas

2.- Una empresa de productos de hule fabrica pelotas esféricas de hule baratas, cuyos diámetros oscilan entre 4 y 8 cm. Suponga que el diámetro de una pelota elegida al azar es una variable aleatoria que se distribuye de modo uniforme entre dichos valores. ¿Cuál es el valor esperado del volumen de una pelota?

3.- El peso de un bebe recién nacido en un país es una variable aleatoria continua que sigue una distribución normal, con media 3.2 kg y desviación típica de 0.4 kg. Determine el porcentaje de bebes recien nacidos que pesan 3.5 kg o mas.

BIBLIOGRAFÍA

CANAVOS C., George (1986). *Probabilidad y Estadística.* México: McGraw Hil.

CASTILLO GARZÓN, Patricia (1998). *Métodos cuantitativos I en administración.* Santafé de Bogotá: UNAD.

CHRISTENSEN, Howard B. (1999). *Estadística Paso a Paso.* México: Editorial Trillas.

HERNÁNDEZ MAHECHA, Carlo Marcelo (2000). *Introducción a la Probabilidad. Guía de Estudio.* Santa fe de Bogotá: UNAD.

KENNEDY, John B. & NEVILLE, Adam M. (1982). *Estadística para ciencias e ingeniería.* México: Harla S.A.

LIPSCHUTZ, Seymour. *Teoría y problemas de probabilidad. Serie de compendios Schaum.* México: McGraw Hill.

LOPES, Paulo Afonso (2000). *Probabilidad & Estadística: Conceptos, Modelos, Aplicaciones en Excel.* Santa fe de Bogotá: Prentice Hall, Pearson Educación.

MARTÍNEZ BENCARDINO, Ciro (2004). *Estadística Básica Aplicada.* Santa fe de Bogotá: ECOE Ediciones.

MARTÍNEZ BENCARDINO, Ciro (2003). *Estadística y Muestreo.* Santa fe de Bogotá: ECOE Ediciones.

MARTÍNEZ BENCARDINO, Ciro (1992). *Estadística. Apuntes y 614 problemas resueltos.* Santa fe de Bogotá: ECOE Ediciones.

MENDENHALL (1982). *Introducción a la Probabilidad y la Estadística*. EEUU: Iberoamericana

MILTON, J. Susan (1999). *Estadística para biología y ciencias de la salud.* Madrid: McGraw Hill — Interamericana.

MONTGOMERY, Douglas C. & RUNGER, George C. (1997). *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería.* México: McGraw Hill.

ORTEGA, Joaquín y WSCHEBOR, Mario (1994). *Introducción a la Probabilidad.* Santa fe de Bogotá: UNISUR.

PUENTES MEJÍA, Carlos Eduardo (1995). *Elementos de Probabilidad y de Métodos Estadísticos.* Santafé de Bogotá: UNISUR.

SPIEGEL, Murray R. (1991). *Estadística. Serie de compendios Schaum*. México: McGraw Hill.

TRIOLA, Mario F. (2004). *Probabilidad y estadística.* Novena edición. México: Pearson & Addison Wesley.

VELASCO SOTOMAYOR, Gabriel & PIOTR WISNIEWSKI, Marian (2001). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias.* México: Thomson Learning.

VELASCO SOTOMAYOR, Gabriel & PIOTR WISNIEWSKI, Marian (2001). *Problemario de Probabilidad.* México: Thomson Learning.

CIBERGRAFÍA

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html

http://server2.southlink.com.ar/vap/PROBABILIDAD.htm

http://es.wikipedia.org/wiki/Probabilidad

http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Azar_y_probabilidad/

http://www.terra.es/personal2/jpb00000/pprobjunio99.htm

http://www.terra.es/personal2/jpb00000/pprobjunio00.htm

http://www.fvet.edu.uy/estadis/probabilidad.htm

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html

http://www.aulafacil.com/CursoEstadistica/CursoEstadistica.htm

http://www.uantof.cl/facultades/csbasicas/Matematicas/academicos/emartinez/Estadistica/index.html

http://www.cortland.edu/flteach/stats/links.html

http://www.d16acbl.org/U173/Brmx_prob1.html#_1

http://espanol.geocities.com/eprobabilidades/index.htm

http://www.monografias.com/trabajos11/tebas/tebas.shtml#intro