LÓGICA MATEMÁTICA

GEORFFREY ACEVEDO GONZÁLEZ

primera versión 2005: NUBIA JANETH GALINDO PATIÑO

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA - UNAD -
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, TECNOLOGÍA E INGENIERÍA
UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Bogotá D. C, 2008

General

MÓDULO
LÓGICA MATEMÁTICA

SEGUNDA EDICIÓN

10 de febrero de 2008
Editor de texto: OpenOffice2.3.1

ISBN

2008
Bogotá, Colombia

¡OH dicha de entender, mayor que la de imaginar o la de sentir! Borges.

Introducción

Este módulo está concebido para ser un curso introductorio al apasionante mundo de la lógica Matemática, ha sido diseñado para ser un curso transversal a todos los programas académicos de la UNAD.

Para leer el módulo sólo se necesitan los conceptos de conjuntos numéricos, y operaciones algebraicas como destrucción de signos de agrupación, factor común, ecuaciones e inecuaciones de primer grado que pueden ser recordados de manera simultánea.

La intención es que el estudiante pueda aprender de este módulo por sí mismo, en este sentido es un texto escrito más para los estudiantes que para el profesor.

En el primer capítulo, analizaremos las diferentes operaciones entre conjuntos, tales como unión, intersección y complemento, entre otras operaciones, que nos permitirán llegar a la compresión de los conectivos lógicos usados en el lenguaje natural, partiendo de una representación gráfica. A la par desarrollaremos las destrezas lógico matemáticas, dando solución a problemas como éste:

> "*De acuerdo con una encuesta virtual realizada a cincuenta estudiantes de la UNAD, los amantes de la música de Juanes son 15; mientras que los que únicamente gustan de la música de Shakira son 20, ¿Cuántos son fanáticos de los dos artistas si 10 de los encuestados, entre los 25 que no son fanáticos de Shakira, afirman ser fanáticos de Juanes?"*

El segundo capítulo es una herramienta que permite adquirir habilidades para comprender conceptos como los conectivos lógicos que usamos diariamente en nuestro leguaje y que pocas veces nos detenemos a analizar y comprender, por ejemplo, nuestro amigo **"Boole afirma que cuando gane su equipo predilecto hará fiesta",** pasado un tiempo encontramos que Boole está festejando pero que su equipo predilecto ha perdido, ¿Se está contradiciendo el amigo Boole?, en este curso descubriremos y analizaremos el conectivo lógico que ha usado Boole en su afirmación, para concluir sobre este asunto.

Identificar los conectivos lógicos, las premisas y comprender su función en el lenguaje nos permitirá diseñar frases cada vez más complejas sin que se pierda la coherencia en la construcción gramatical.

Posteriormente aprenderemos ha hacer simplificaciones de expresiones complejas o difíciles de descifrar usando el lenguaje natural, para ello utilizaremos leyes expresadas por medio de símbolos. Por ejemplo, al expresar en lenguaje natural que "**Es falso que Augustus no miente**", por medio de la lógica aprendemos a llegar a la simplificación: **"Augustus miente**" utilizando leyes lógicas básicas que nos permiten validar la simplificación hecha con un argumento más allá de la simple intuición.

Otra interesante aplicación de la lógica es en el proceso de validar nuestros argumentos. Por ejemplo, analicemos que puede concluirse de la siguiente afirmación: **"Si llueve hace frío",** posteriormente **"ocurre que hace frío",** ¿es entonces correcto concluir que llueve?, por medio de la lógica transformaremos esta expresión en lenguaje simbólico que posteriormente podremos analizar por medio de una tabla de verdad y descubrir en que caso específico el argumento se contradice.

En el mundo de la argumentación siempre estamos utilizando unos principios lógicos básicos que estudiaremos en este apasionante curso, permitiéndonos mejorar en la construcción de argumentos fuertes, basados en los cimientos de la lógica.

Agradezco a toda la comunidad académica su valiosa colaboración.

Que estas páginas os brinden muchas horas de diversión.

Georffrey Acevedo G.

Contenido

Capitulo 4 Deducción

- El método científico
- Silogismos categóricos
- Forma Estándar de un silogismo categórico
- Argumento deductivo
- Argumento Válido
    - Prueba formal de validez
    - Prueba de invalidez
    - Argumento Invalido
- Inferencias lógicas
    - 9 Reglas de inferencia
- La demostración
    - Demostración directa
    - Demostración indirecta
    - Demostración por recursión
    - Demostración por refutación
    - Refutación por contradicción
    - Refutación por contraejemplo

Capitulo 5 Inducción

- El problema de la inducción:
- Argumento inductivo por analogía
- Evaluación de los argumentos analógicos
- La fuerza de las conclusiones con respecto a sus premisas.
- Refutación por medio de una analogía lógica

Unidad 2 Un Álgebra Booleana

Capitulo 1 Axiomas del Álgebra Booleana

- propiedades o axiomas
- Álgebra booleana en sistemas numéricos
- Álgebra booleana de los conjuntos
- Álgebra booleana de la lógica

Capitulo 2 Expresiones Booleanas
- Forma normal disyuntiva
- Forma normal conjuntiva

Capitulo 3 Simplificación de Expresiones Booleanas

- Simplificación de expresiones booleanas mediante mapas de Karnaugh

Capitulo 4 Definición y representación de los circuitos lógicos

- Circuito de disyunción
- Circuito de negación
- Adición o suma lógica.
- Multiplicación o producto lógico
- Complementación o inversión lógica
- Otras compuertas lógicas

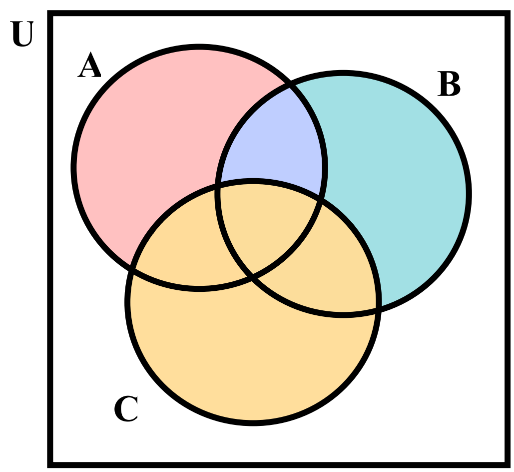
Capitulo 5 Aplicación de los circuitos lógicos

Unidad 1

Teoría de conjuntos y principios de Lógica.

Capítulo 1:

Teoría de conjuntos



Objetivo general

Estudiar, analizar y profundizar los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos, básicos para llegar a la comprensión de los conectivos lógicos y su relación con el lenguaje natural, a la vez que son aplicados en la solución de problemas.

Objetivos específicos

1. Identificar las relaciones entre conjuntos.
2. Distinguir las diferentes clases de conjuntos.
3. Representar gráficamente los conjuntos.
4. Realizar las diferentes operaciones entre conjuntos.
5. Resolver problemas con conjuntos.

Definición y generalidades

Las nociones de conjunto y de elemento son ideas primitivas que se presentan en forma intuitiva. Los conjuntos están relacionados con el proceso de contar y por lo tanto permiten resolver problemas que involucran el concepto de cantidad.

Se puede afirmar que un conjunto es una colección de objetos, símbolos o entidades bien definidas, que reciben el nombre de miembros o elementos del conjunto.

Representación gráfica

Una forma sencilla de visualizar los conjuntos y las relaciones entre ellos, es mediante la utilización de esquemas gráficos llamados **circulos de Euler o diagramas de Venn.** Estos esquemas están compuestos por una región cerrada del plano (generalmente un rectángulo), la cual representa el conjunto universal, y por uno o varios círculos que representan los conjuntos a graficar.

Generalmente, los conjuntos se identifican con letras mayúsculas y sus elementos con minúsculas.

- Para indicar que un elemento es un miembro de un conjunto, se utiliza el símbolo **"$\in$" (se lee pertenece a**) y
- para indicar que no esta en el conjunto se utiliza el símbolo **"$\notin$" (se lee no pertenece a).**

Esta es la representación gráfica correspondiente:

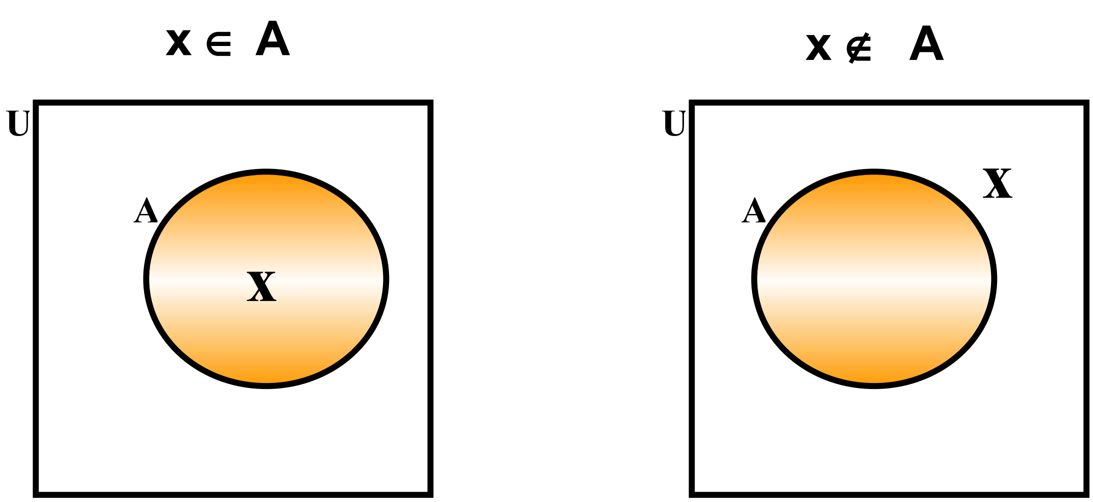


Figura No. 1

Formas para determinar un conjunto:

Básicamente existen dos formas para determinar un conjunto, éstas son:

1. Por extensión:
Un conjunto está determinado por extensión cuando se describe el conjunto nombrando cada uno de sus elementos. Por ejemplo:

A = {2, 4, 6, 8}
B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
C = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19,…}
D = {a, e, i, o, u }

2. Por comprensión:
Un conjunto está determinado por comprensión cuando se nombra una propiedad, una regla o una característica común a los elementos del conjunto. Por ejemplo:

C = {Números impares menores que 10}
D = {Vocales}
B = {Dígitos}

Lenguaje:
E = {x ∈R / 0 ≤ x < 9}, en este caso se utiliza un lenguaje muy específico, el cual se lee así:

*E igual al conjunto de todos los números reales tales que (o que verifican que) cero (**0**) es menor o igual a **x, y, x** a su vez es menor que **9***, esta notación se usa con mucha frecuencia para describir intervalos, para escribir la solución de una inecuación o para representar el dominio de una función real.

Conjuntos Infinitos:
Existen conjuntos como por ejemplo:

A = {x ∈ R / 0 ≤ x < 9} ó **Z = {x ∈ N / x es par}**

Que no se pueden expresar por extensión debido a que nunca se terminaría de escribir la lista de los números reales que pertenecen al conjunto **A**, o, los naturales que pertenecen a **Z**, este tipo de conjuntos, reciben el nombre de **INFINITOS**;

Conjuntos Finitos:
Mientras que otros, como por ejemplo:

$$\mathbf{C = \{x \ / \ x \text{ es vocal}\}} \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{D = \{x \ / \ x \text{ es dígito par}\}}$$

Que están formados por cierto número de elementos distintos, reciben el nombre de conjuntos **FINITOS**.

¿Todos los conjuntos que se nombran por comprensión, se pueden escribir por extensión?

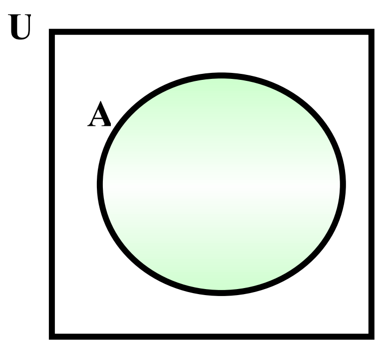
El análisis anterior, permite dar respuesta a esta pregunta, se sugiere buscar más ejemplos que justifiquen la respuesta para que sean analizados con el tutor y luego socializados en los equipos de trabajo.

Conjuntos especiales

Conjunto vacío

Un conjunto que carece de elementos se denomina conjunto vacío y se simboliza así:

$\{ \ \}$ **ó** $\varnothing$



$A = \varnothing$

Figura No. 2.

Naturalmente el conjunto $\varnothing$ forma parte de cualquier conjunto **A**, por lo cual se puede afirmar que:

$$\varnothing \subset \mathbf{A}$$

¿El conjunto **Φ** (vacío) es un subconjunto de todo conjunto?

Ejemplo 1.
Si D = {x ∈ N / x ≠ x), obviamente **D** es un conjunto que carece de elementos, puesto que no existe ningún número natural que sea diferente a sí mismo.

Conjunto unitario:

Se denomina conjunto unitario al conjunto formado por un sólo elemento.

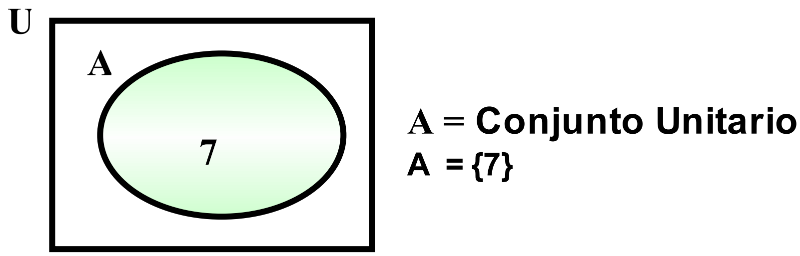


Figura No. 3

Ejemplo:

E = {x / x es un primo par}

El único número que cumple las dos condiciones (ser primo y a la vez par) es el número **2**, por lo tanto **E = {2}** se llama unitario.

Conjunto universal

Cuando se habla o se piensa en los conjuntos, es conveniente establecer la naturaleza de sus elementos, por ejemplo:

Los elementos del conjunto **A = {a, e, i}** pertenecen al conjunto de las vocales, **V = {a, e, i, o, u}**, es decir, **A** $\subset$ **V**, este conjunto **V** constituye el universo del conjunto **A**, por esta razón se dice que **V** es un conjunto Universal.

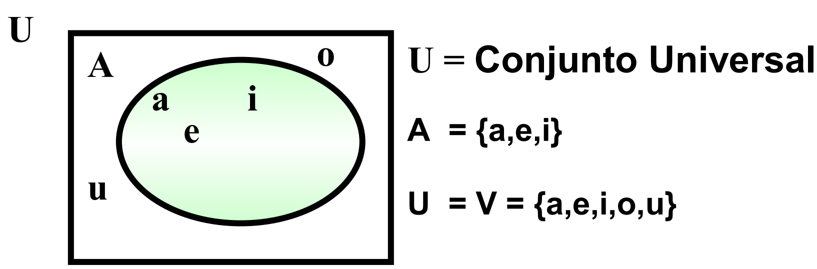


Figura No. 4

Similarmente, si **A = {x $\in$ N / x es primo}** sus elementos son elementos del conjunto de los números naturales “**N**”, **A** $\subset$ **N** y en este caso, **N** se constituye en el conjunto universal. Generalmente, el conjunto universal se simboliza con la letra **U**.

Conjunto de partes o conjuntos de conjuntos

Si A es un conjunto, el conjunto de partes de **A**, escrito como **P(A**) está formado por todos los subconjuntos que se pueden formar del conjunto **A.**

Ejemplo 1.
Si **A = {1, 3, 5}**, entonces el conjunto de partes de **A** esta formado por los siguientes subconjuntos:

$$P(A) = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}, \varnothing\}.$$

$$\varnothing \in P(A) \quad y \quad 2^n \text{ subconjuntos}$$

Note que:
Como ya habíamos analizado, el conjunto vacío está en todo conjunto y este caso no es la excepción, por esta razón $\varnothing \in$ **P(A).** Además, cave anotar que los elementos del conjunto **A** son a su vez conjuntos, por lo que se dice que el conjunto **P(A)** constituye una **familia de conjuntos.**

El número de elementos del conjunto **P(A)** depende del número de elementos de A; en el ejemplo, **A** tiene 3 elementos y **P(A)** tiene $\mathbf{8 = 2^3}$ elementos, en general, "Si **A** tiene n-elementos se pueden formar $\mathbf{2^n}$ subconjuntos del conjunto **A"**.

¿Cuántos y cuáles son los subconjuntos que se pueden formar de un conjunto
A = { 1,3,5} ?

Ejemplo 2.
Sea **B = {2, {1, 3}, 4, {2, 5}}. B** no es una familia de conjuntos porque algunos elementos de **B** son conjuntos y otros no. Para que el conjunto **B** fuera un conjunto de partes o una familia de conjuntos debería estar expresado de la siguiente forma:

$$B = \{ \{2\}, \{1,3\}, \{4\}, \{2,5\} \}.$$

Relaciones entre conjuntos

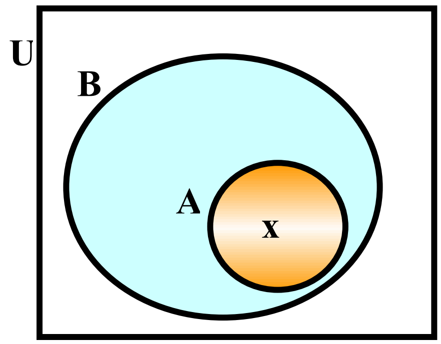
1.1.1 Subconjuntos

Un conjunto **A** es un subconjunto de un conjunto **B**, si todo elemento del conjunto A también es elemento del conjunto **B**.

Simbólicamente esta relación se expresa así:

$A \subset B$ (se lee A esta contenido en B)

si todo elemento x que está en el conjunto A entonces x también está en B, es decir;
$A \subset B$ si todo $x \in A$, entonces $x \in B$



$$A \subset B$$
$$x \in A$$
$$x \in B$$

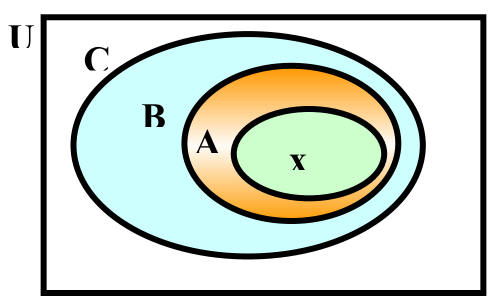
Figura No. 5

Ejemplo 1:
Si **A = {x / x es dígito par}** y **B = {x / x es dígito}**, claramente **A $\subset$ B** ya que todo dígito par es dígito. Por extensión la situación se expresa así:

A = {2, 4, 6, 8} y **B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**
Entonces A es un subconjunto de **B**.

Un resultado muy útil e importante acerca de la contenencia entre conjuntos es el siguiente:
Si **A** es un subconjunto de **B** y **B** es un subconjunto de **C**, entonces, **A** es un subconjunto de **C**; simbólicamente este enunciado se escribe así:

Sí $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces, $A \subset C$



$$A \subset B$$
$$B \subset C$$
$$\overline{}$$
$$A \subset C$$
$$x \in A$$

Figura No. 6

La demostración es la siguiente:

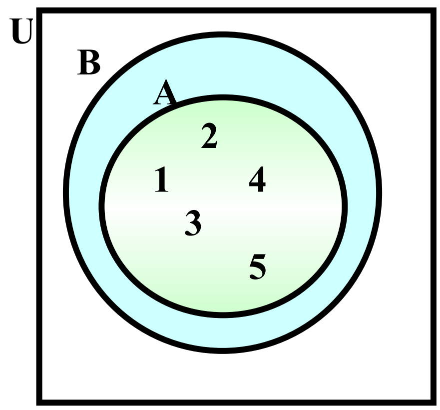
Sí **x** $\in$ **A**; entonces **x** $\in$ **B** porque **A** $\subset$ **B**, pero **x** también esta en n porque **B** $\subset$ **C**; por lo tanto si **x**$\in$**A**, entonces **x** $\in$ **C** y esto se cumple para todo elemento **x** que está en **A**, debido a que el conjunto A esta contenido en el conjunto **B** y **B** a su vez, esta contenido en **C**; por consiguiente queda demostrado que **A** $\subset$ **C**.

Si **A**, **B** y **C** son tres conjuntos no vacíos que verifican las condiciones **A** $\subset$ **B** y **B** $\subset$ **C**, ¿qué se puede concluir de A con respecto a **C**?

1.2.2 Igualdad entre conjuntos

*El conjunto **A** es igual al conjunto **B** si ambos conjuntos tienen los mismos elementos, es decir, si todos los elementos de **A** pertenecen a **B** y si todos los elementos de **B** pertenecen al conjunto A.* La igualdad entre conjuntos se simboliza de la siguiente forma:

$$A = B \textbf{ si } A \subset B \textbf{ y } B \subset A$$

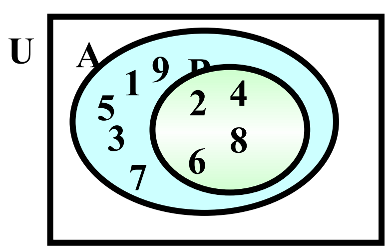


$$\frac{\begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset A \end{array}}{B = A}$$

Figura No. 7.

Ejemplo 1.
Si **M = {1, 1, 0, 2}** y **N = {2, 1, 0, 1}**, claramente se observa que **M** $\subset$ **N** y que **N** $\subset$ **M**, por lo tanto **M = N**.

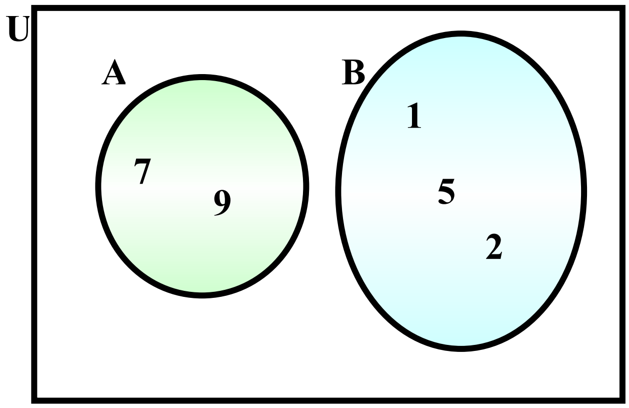
Ejemplo 2.
Si **A = {x / x es dígito}** y **B = {x / x es dígito par},** se puede observar que **B** $\subset$ **A** pero **A** $\not\subset$ **B**, por lo tanto el conjunto **A** no es igual al conjunto **B**, lo cual se escribe, **A** $\neq$ **B**.



$$\frac{\begin{array}{l} B \subset A \\ A \not\subset B \end{array}}{A \neq B}$$

Figura No. 8

Conjuntos Completamente Diferentes o Disyuntos:
Es importante destacar que cuando dos conjuntos son completamente diferentes (no tienen ningún elemento en común) reciben el nombre de conjuntos disyuntos.



$A \not\subset B$ y
$B \not\subset A$ y no hay elementos comunes

Figura No. 9.

Ejemplo 3.
Los conjuntos **A = {x / x es dígito par}** y **B = {x / x es dígito impar}** no tienen ningún elemento en común, es decir **A** y **B** son disyuntos.

1.2.3 Subconjunto propio
Todo conjunto es subconjunto de sí mismo, es decir, $A \subset A$ (con A un conjunto cualquiera), si ese subconjunto se llama B, entonces se puede afirmar que B es un subconjunto propio de A, este hecho se simboliza así:

$B \subseteq A$ (se lee B está contenido o es igual al conjunto A)

Ejemplo 1.
Al considerar los conjuntos **A = {x / x es vocal} y B = {a, e, i, o, u},** se puede afirmar que **A = B**, en particular se observa que **$A \subseteq B$ y $B \subseteq A$,** lo cual permite afirmar que A es subconjunto propio de **A**, y **B** es subconjunto propio de **A**.

Ejemplo 2.
Los conjuntos **A = {1, 2, 3}, B = {1, 3}, C = {0, 2}** y **D = {1}** son todos subconjuntos del conjunto **M = {0, 1, 2, 3},** pero ninguno es un subconjunto propio de **M**, ya que con ninguno se puede establecer alguna de las relaciones siguientes:

$$A \subseteq M,\ B \subseteq M,\ C \subseteq M,\ D \subseteq M$$

Operaciones entre conjuntos

Así como las operaciones suma, resta, multiplicación y división están definidas sobre los números reales, también existen operaciones definidas entre los conjuntos como la unión, intersección, complemento, diferencia, diferencia simétrica y producto cartesiano; éstas se estudiarán en las siguientes secciones.

1.**Unión**

Si **A** y **B** son dos conjuntos no vacíos, se define la unión entre **A** y **B** como el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto **A** o al conjunto **B**.

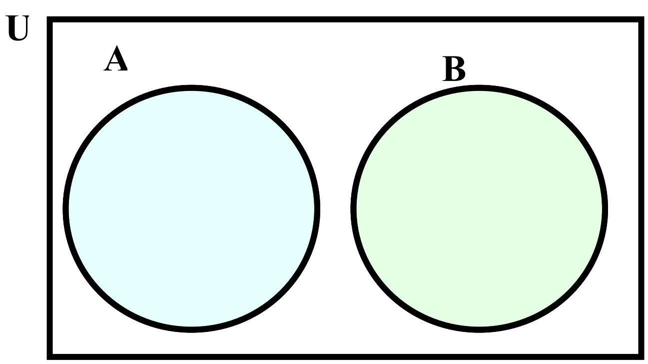
Simbólicamente la unión se define así:

$$\mathbf{A \cup B = \{x \,/\, x \in A, \vee, x \in B\}},$$ donde el símbolo "$\vee$" se lee **"o"**.

Para representar gráficamente una operación entre conjuntos, se debe tener en cuenta la relación que exista entre ellos, según los siguientes casos:

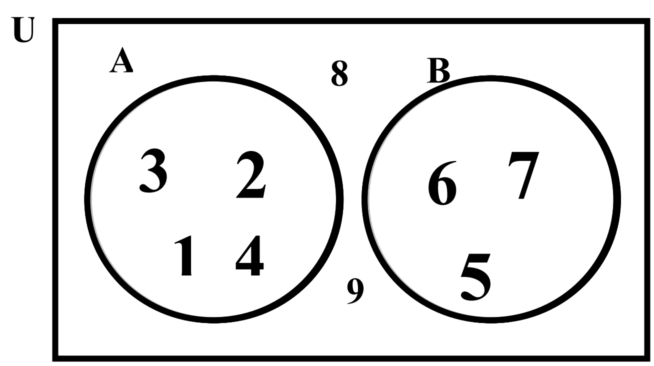
Caso 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (conjuntos disyuntos).

La parte subrayada representa la unión entre los conjuntos **A** y **B**.



$\mathbf{A \cup B}$

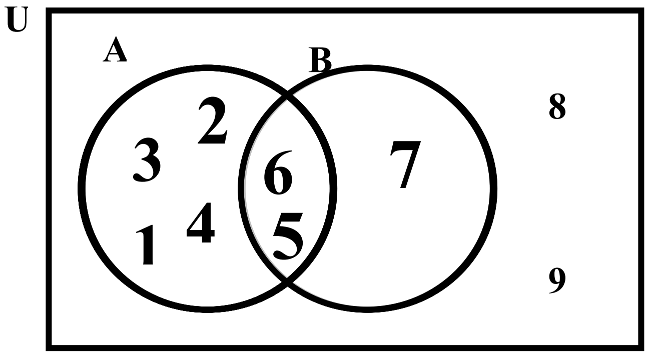
Figura No. 10.



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}

$\mathbf{A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}}$

Caso 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.

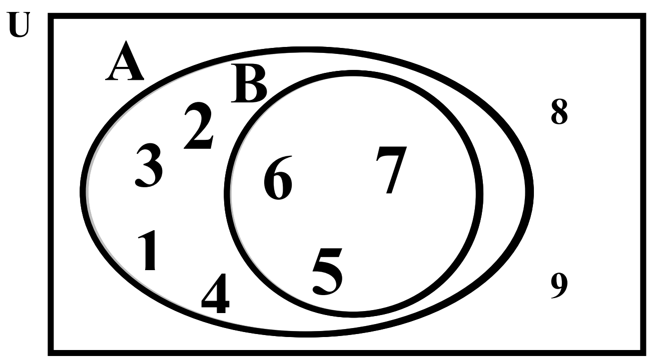


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}
A ∪ B = {1,2,3,4,5,6,7}

Figura No. 11

Caso 3. Que un conjunto este contenido en el otro.

la parte sombreada indica la operación.

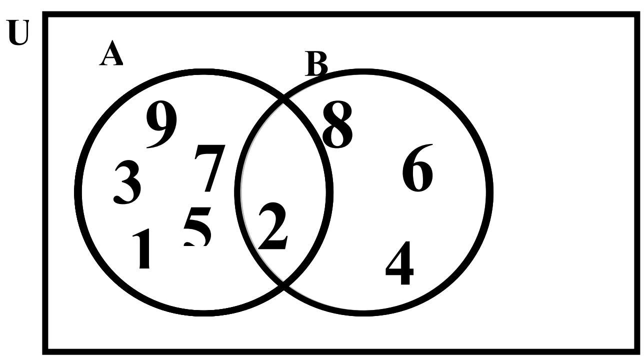


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}
A ∪ B = {1,2,3,4,5,6,7}

Figura No. 12

Ejemplo 1.

Si **A = {x ∈ N / x es dígito par o dígito primo}**, gráficamente la representación de está unión es:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,5,7,9}
B = {2,4,6,8}
A ∪ B = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Figura No. 13

La figura No.3 permite apreciar que el único dígito que es a la vez par y primo es el número 2; esto conlleva a la formulación de la siguiente operación entre conjuntos:

2. **Intersección**

Se define la intersección entre dos conjuntos **A** y **B** como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen simultáneamente al conjunto **A** y al conjunto **B**.

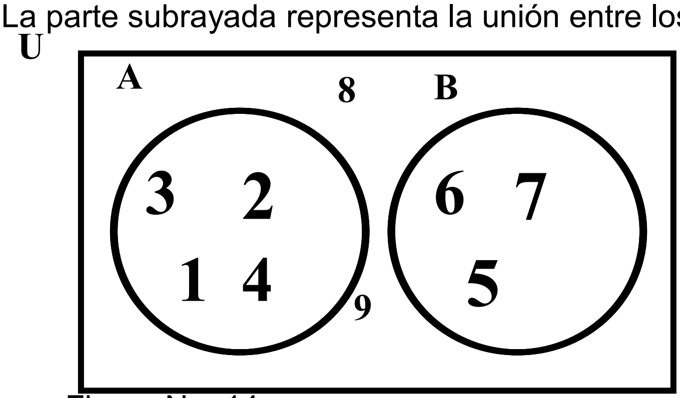
Simbólicamente la intersección se expresa así:

$$\mathbf{A \cap B = \{x \,/\, x \in A, \wedge ,x \in B\}}$$

el símbolo "$\cap$" se lee intersección y el símbolo "$\wedge$" se lee **y**.

Caso 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (conjuntos disyuntos).

La parte subrayada representa la unión entre los conjuntos **A** y **B**.



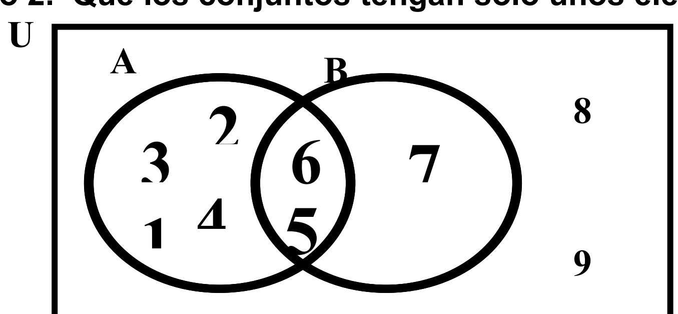
U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}

$$\mathbf{A \cap B = \{\ \}}$$

Figura No. 14.

Se puede observar que cuando dos conjuntos son diferentes, su intersección es vacía y los conjuntos se llaman disyuntos, como ya se había mencionado;

Caso 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.

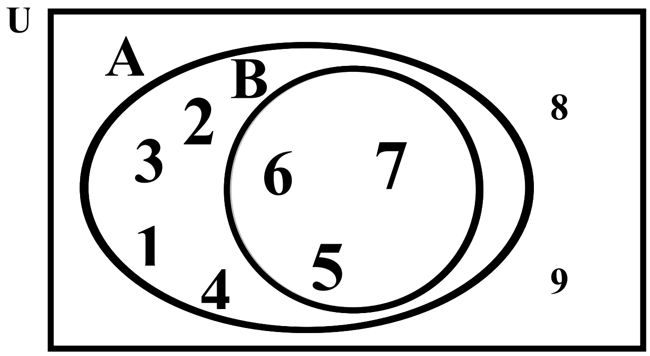


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}

$$\mathbf{A \cap B = \{5.6\ \}}$$

Figura No. 15

Caso 3. Que un conjunto este contenido en el otro.
La parte sombreada indica la operación:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}

A ∩ B = {5,6,7 } = B

Figura No. 16

Esto permite afirmar que si **A ⊂ B**, entonces. **A ∩ B = A**; análogamente se puede inferir que si **B ⊂ A**, entonces, **A ∩ B = B.**

A continuación se realiza la demostración analítica para el caso 3 de la **figura No. 16**, la otra situación si **B ⊂ A,** entonces, **A ∩ B = B**, se deja como ejercicio complementario (se encuentra al final del capítulo), esta demostración es muy similar a la que se hará a continuación, sin embargo la puede consultar en el libro, Teoría de conjuntos de Seymour Lipschutz.

Si **A ⊂ B**, por definición de contenencia entre conjuntos se puede afirmar que todo elemento **x ∈ A**, entonces **x ∈ B**; por definición de intersección, éstos elementos **x** forman el conjunto **A ∩ B** y como todos estos son elementos de **A**, se puede concluir que **A ∩ B = A**.

Ejemplo 1.
Dados los conjuntos:
M = {x ∈ N / x es múltiplo de 2}
N = {x ∈ N / x es múltiplo de 3}
P = {x ∈ N / x es impar}

Se pueden analizar las siguientes intersecciones:

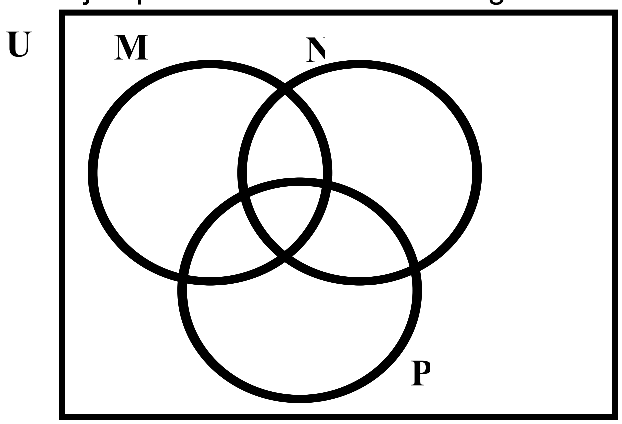
1. **M ∩ N** = {6, 12, 18, 24, 36,…}, escrito por comprensión es:
   M ∩ N = {x ∈ N / x es múltiplo de 6}.
2. **M ∩ P =** ∅, no existe ningún número natural que sea múltiplo de **2** y a la vez impar.
3. ∅ ∩ **M =**∅, El conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto, en particular en **M**, esto es ∅ ⊂ **M**, luego se puede concluir que ∅ ∩ **M =** ∅**.**

4. Para hallar la intersección **M ∩ N ∩ P**, se puede encontrar la intersección de **M** con **N** y luego con el conjunto P, es decir, hay que encontrar los elementos que están en los tres conjuntos: **M, N y P.**

En este caso **M ∩ N = {x ∈ N / x es múltiplo de 6}** y éste intersecado con el conjunto **P** está formado por los múltiplos de 6 que son impares, es decir, **M ∩ N ∩ P = {x ∈ N / x es impar y múltiplo de 6}**, por extensión el conjunto es:

M ∩ N ∩ P = ∅, pues no existe ningún número natural que sea a la vez impar y múltiplo de **6**.

Ejercicio propuesto:
Representa el ejemplo anterior mediante diagramas de Venn



U =
M =
N =

M ∩ N =

M ∩ P =

M ∩ N ∩ P =

Figura No. 17

3. Diferencia

Según los tres casos estudiados, se puede afirmar que al comparar dos conjuntos no vacíos, puede suceder que:

1. No tengan ningún elemento en común, (conjuntos totalmente diferentes).
2. Sólo algunos elementos sean comunes, (conjuntos parcialmente diferentes o parcialmente iguales)
3. Un conjunto este contenido en el otro.
4. Tengan exactamente los mismos elementos, (conjuntos iguales)

En los numerales 1, 2 y 3, se puede formar un conjunto con los elementos que le faltan a un conjunto para ser igual a otro, este conjunto así formado, se denomina diferencia entre conjuntos.

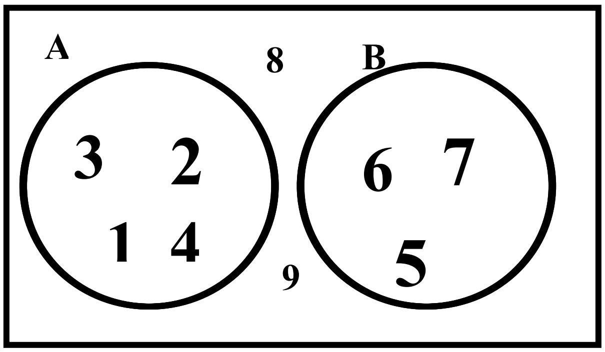
Si **A** y **B** son dos conjuntos no vacíos, entonces se define la diferencia entre **A** y **B** así:

$$\mathbf{A - B = \{x \,/\, x \in A, \wedge, x \notin B\}}$$

Esto se lee: **A** menos **B**, es el conjunto formado por los elementos que están en el conjunto A pero no en el **B**.

En la siguientes gráficas, la parte sombreada representa la diferencia entre los conjuntos **A** y **B**.

Caso 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (conjuntos disyuntos).



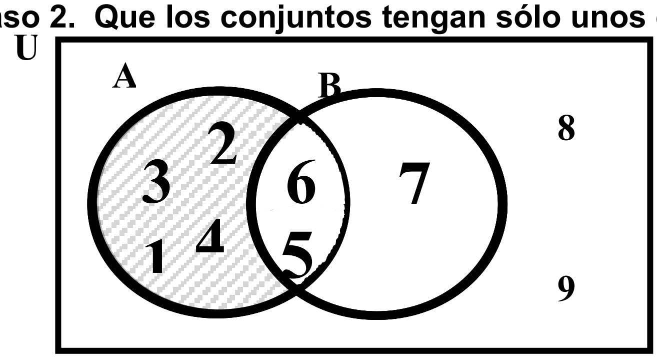
U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}

A - B = A = {1,2,3,4}
B - A = B = {5,6,7}

Figura No. 18.

Se puede observar que cuando dos conjuntos son diferentes, su diferencia es vacía y los conjuntos se llaman disyuntos, como ya se había mencionado;

Caso 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.

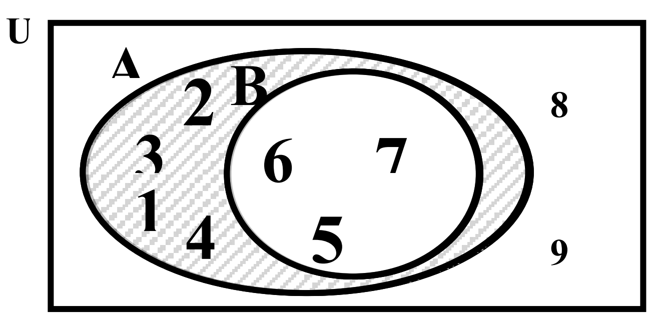


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}

A - B = {1,2,3,4}

Figura No. 19

Caso 3. Que un conjunto este contenido en el otro.
La parte sombreada indica la operación.



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}

A - B = {1,2,3,4}
B - A = { }

Figura No. 20

En la figura 20, se puede observar que todos los elementos que están en **B**, están en **A (debido a que B ⊂ A),** por lo tanto no existe ningún elemento que pertenezca a la diferencia **B – A** y en consecuencia **B – A = ∅.** Surge ahora, la siguiente inquietud:

¿Cuál será la diferencia entre **A** y **B (A – B)** cuando **B ⊂ A**?

Esta pregunta se plantea formalmente en el numeral **4** de los ejercicios complementarios y el propósito es realizar la demostración con el apoyo del tutor.

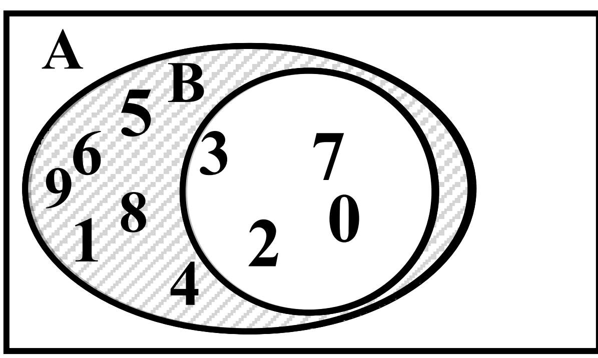
Ejemplo 1.

Dados los conjuntos **A = {x / x es un dígito}** y **B = {0, 2, 3, 7}** hallar **A – B** y **B – A** y hacer la representación gráfica.

Para efectuar estas operaciones se escriben los conjuntos por extensión, así:

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y **B = {0, 2, 3, 7},** entonces:
A – B = {1, 4, 5, 6, 8, 9} y **B – A = ∅,**

U



U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
B = {0,2,3,7}

A - B = {1,4,5,6,8,9}

B - A = { }

Figura No. 21

4 **Diferencia simétrica**

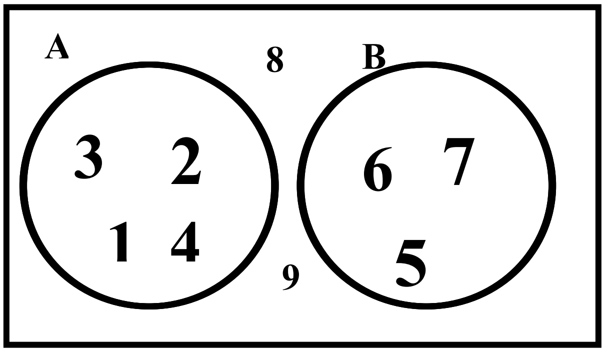
Se define la diferencia simétrica entre dos conjuntos no vacíos **A** y **B**, como el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto **A** o al conjunto **B**, pero no pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos.

Simbólicamente la diferencia simétrica entre **A** y **B** se escribe así:

$$\mathbf{A \triangle B = \{x \,/\, x \in A, \vee, x \in B, \wedge, x \notin A \cap B\}.}$$

En la siguientes gráficas, la parte sombreada representa la diferencia simétrica entre los conjuntos **A** y **B**.

Caso 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (conjuntos disyuntos).

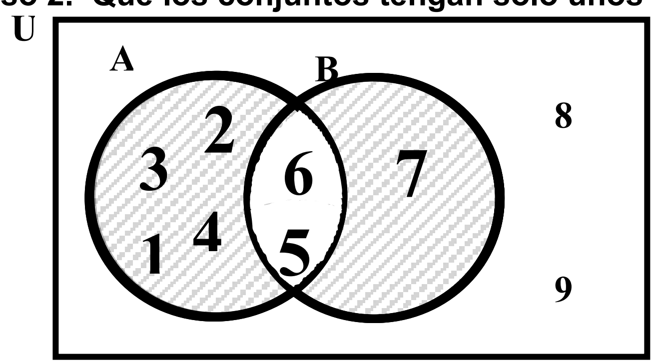


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}
A Δ B = {1,2,3,4,5,6,7}
B Δ A = {1,2,3,4,5,6,7}

Figura No. 22.

Se puede observar que cuando dos conjuntos son diferentes, su diferencia simétrica es vacía y los conjuntos se llaman disyuntos.

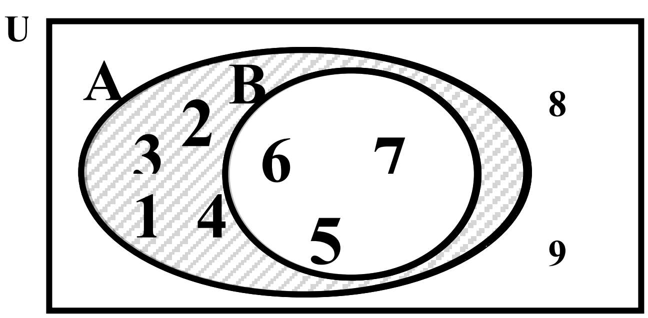
Caso 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}
A Δ B = {1,2,3,4,7}
B Δ A = {1,2,3,4,7}

Figura No. 23

Caso 3. Que un conjunto este contenido en el otro.
La parte sombreada indica la operación.

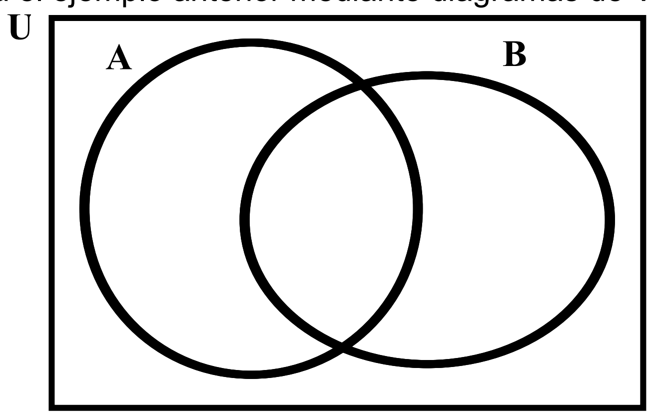


U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}
A Δ B = {1,2,3,4}
B Δ A = {1,2,3,4}

Figura No. 24

Ejemplo 1.
Si **A = {x / x es una letra de la palabra INGENIERIA} y B = {x / x es una letra de la palabra SISTEMAS}**, entonces **A Δ B = {N, G, R, M, S, T}.**

Ejercicio propuesto:
Representa el ejemplo anterior mediante diagramas de Venn

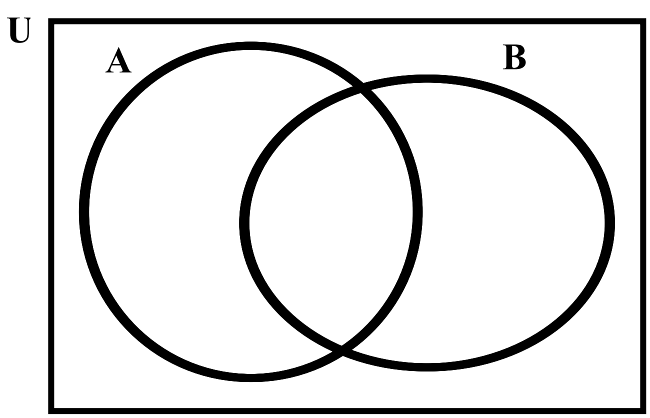


U =
A =
B =
A ∩ B =
A Δ B =
A ∪ B =

Figura No. 25

Ejemplo 2.
Dados los conjuntos **M = {1, 2, 3, 4}** y **N = {4, 5},** la diferencia simétrica entre **M** y **N** es: **M Δ N = {1, 2, 3, 5},** claramente se puede observar que el número 4, no pertenece a la diferencia simétrica porque forma parte de la intersección entre **M** y **N**.

Ejercicio propuesto:
Representa el ejemplo anterior mediante diagramas de Venn



U =
A =
B =
A ∩ B =
A Δ B =
A ∪ B =

Figura No. 26

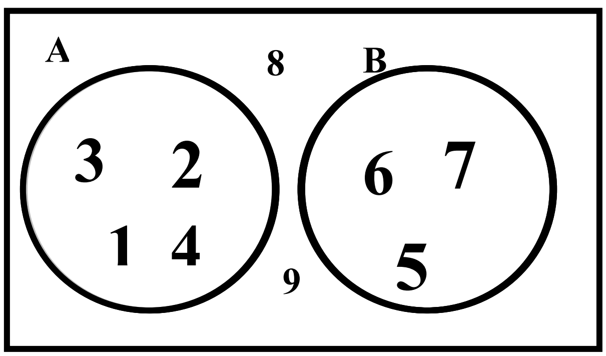
5. **Complemento**

Si **A** es un conjunto no vacío, el complemento de **A**, simbolizado por **A’**, está formado por todos los elementos que no pertenecen al conjunto **A**, es decir,

$$A' = A^{c} = A^{*} = \sim A = \neg A = \overline{A} = \{x \,/\, x \notin A\}$$

En la siguientes gráficas, la parte sombreada representa el complemento del conjunto A.

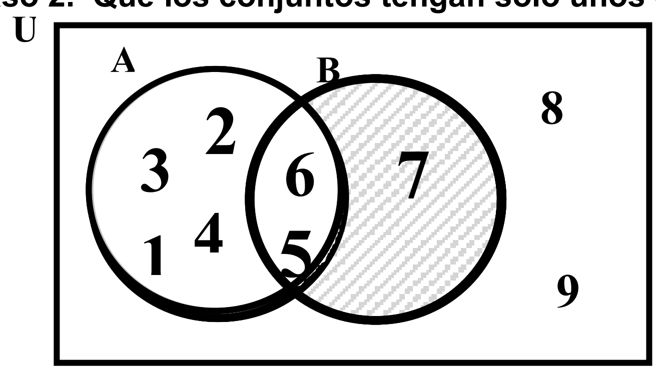
Caso 1. Que los conjuntos no tengan ningún elemento en común. (conjuntos disyuntos).



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}
A’ = {5,6,7,8,9}

Figura No. 27.

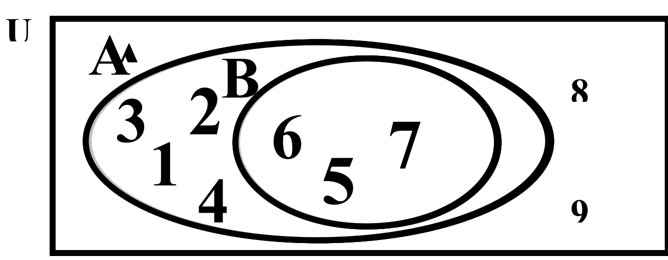
Caso 2. Que los conjuntos tengan sólo unos elementos en común.



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}
A’ = {7,8,9}

Figura No. 28

Caso 3. Que un conjunto este contenido en el otro.
La parte sombreada indica la operación.



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}
A’ = {8,9}

Figura No. 29

Ejemplo 1.
Al considerar el conjunto universal como el conjunto de los estudiantes de Ingeniería de sistemas de la UNAD y **A** como el conjunto de los estudiantes que están en el primer semestre, el complemento del conjunto **A** (**A'**) será el conjunto formado por todos los estudiantes de ingeniería de sistemas de la UNAD que no cursan primer semestre, esto es:

U = {x $\in$ UNAD / x estudia ingeniería de sistemas}.
A = {x $\in$ Ingeniería de sistemas / x $\in$ Primer semestre}.
A' = {x $\in$ Ingeniería de sistemas / x $\notin$ Primer semestre}.

1.4.6 Producto Cartesiano

Par ordenado o pareja ordenada:
La expresión **(x , y)** representa una pareja ordenada , que cumple la condición de que su primera componente, ("**x**") pertenece al conjunto **A** y la segunda componente ("**y**") pertenece al conjunto **B**.

Plano cartesiano:
Los pares ordenados **(x,y), (-x,y), (x,-y), (-x,-y)** se representan en el plano cartesiano como sigue:

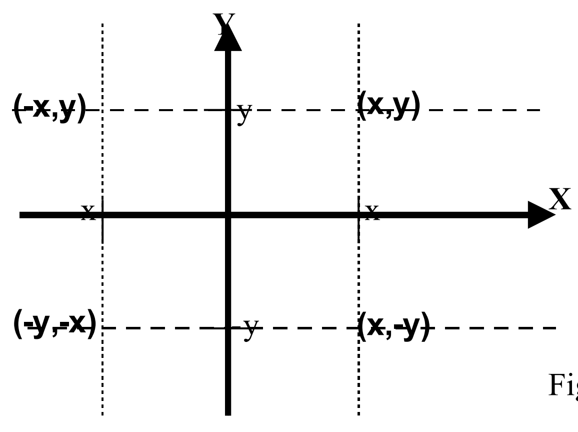


Figura No. 30

Producto Cartesiano:
Si **A** y **B** son dos conjuntos no vacíos, se define el producto cartesiano entre **A** y **B** así:

$$\mathbf{A \times B = \{(x , y) / x \in A , \wedge , y \in B \}.}$$

Ejemplo 1.
Si A = {1, 2,3} y B = {-1, 0, 2} el producto cartesiano de A X B es:
A X B = {(1,-1),(1,0),(1,2),(2,-1),(2,0),(2,2),(3,-1),(3,0),(3,2)} y el producto de **BXA** es

B X A = {(-1,1),(-1,2),(-1,3),(0,1),(0,2),(0,3),(2,1),(2,2),(2,3)}

De donde se observa que el producto cruz no es conmutativo, es decir:

$$\mathbf{A \times B \neq B \times A}$$

Se puede observar que el producto cartesiano entre A y B no es conmutativo, puesto que la pareja ordenada (x, y) es diferente a la pareja ordenada (y, x), en particular, (-1,1) es diferente a (1, -1) y (1,1) es diferente a (-1,-1).
La siguiente gráfica muestra la diferencia.

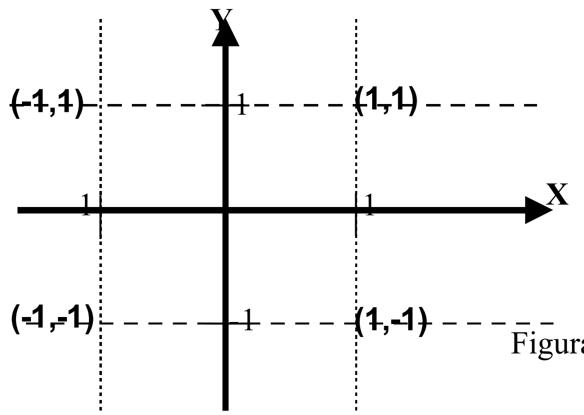


Figura No. 31

Ejercicio propuesto:
Realiza el siguiente producto cartesiano y luego ubica los pares ordenados en el plano cartesiano: Si **A = {2,3} y B = {1, -2} A x B** es:

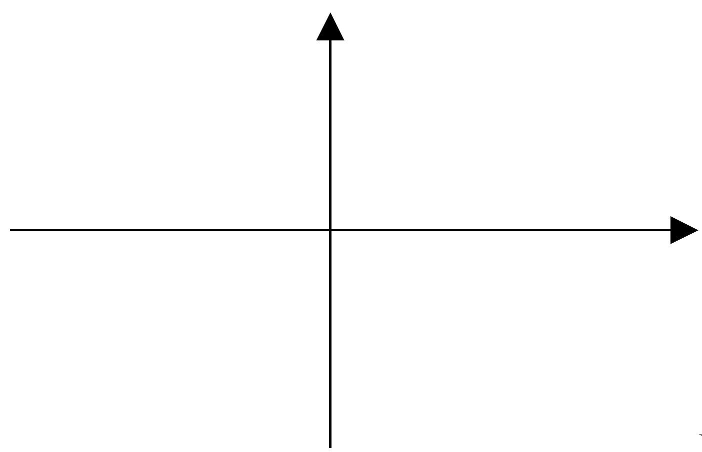


Figura No. 32

Álgebra de conjuntos

Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Las siguientes cuatro propiedades, son válidas para las operaciones de unión e intersección:

a. **Leyes de idempotencia:**

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

b) **Leyes asociativas:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

b. **Leyes conmutativas:**

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

d) **Leyes distributivas:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Las siguientes propiedades están relacionadas con los conjuntos Universal "**U**" y vacío $\varnothing$:

e) **Leyes de identidad:**

$$A \cup U = U \qquad A \cap U = A$$
$$A \cup \Phi = A \qquad A \cap \Phi = \Phi$$

Propiedades con respecto al complemento.

f) **Leyes del complemento:**

$$A \cup A' = U A \cap A' = \Phi$$
$$(A')' = A \qquad \Phi' = U$$

g) **Leyes de D'Morgan:**

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Estas leyes se pueden representar gráficamente de la siguiente forma:

a) **Leyes de idempotencia:**

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

¿Qué obtenemos de interceptar el conjunto A con él mismo?
¿Qué pasa si unimos A con A? :

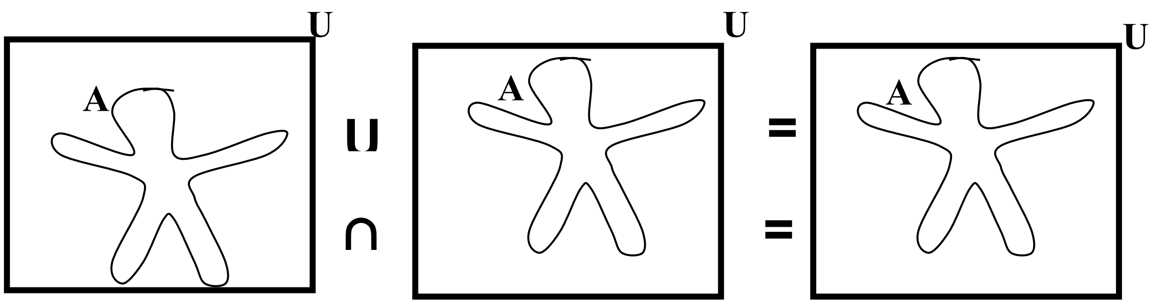


Figura No. 33

b) **Leyes de identidad:** $A \cup U = U$ $\quad A \cap U = A$
$A \cup \Phi = A$ $\quad A \cap \Phi = \Phi$

¿Qué se obtiene de unir el conjunto A con el universo? :

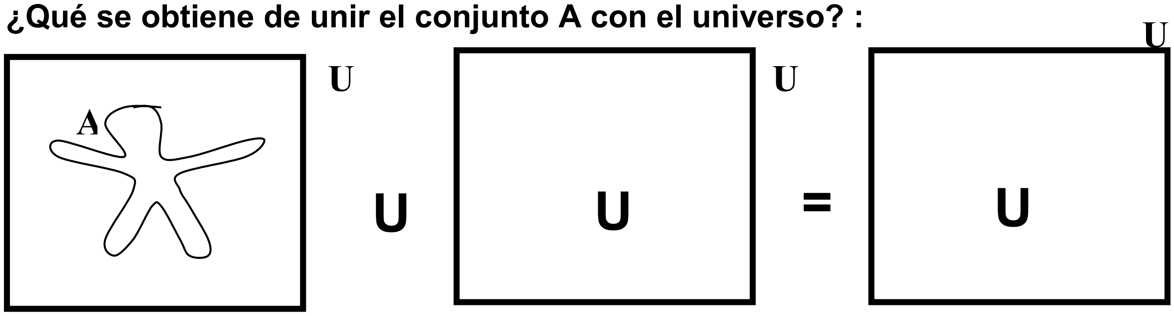


Figura No. 34

¿Qué se obtiene de unir el conjunto A con el vacío? :

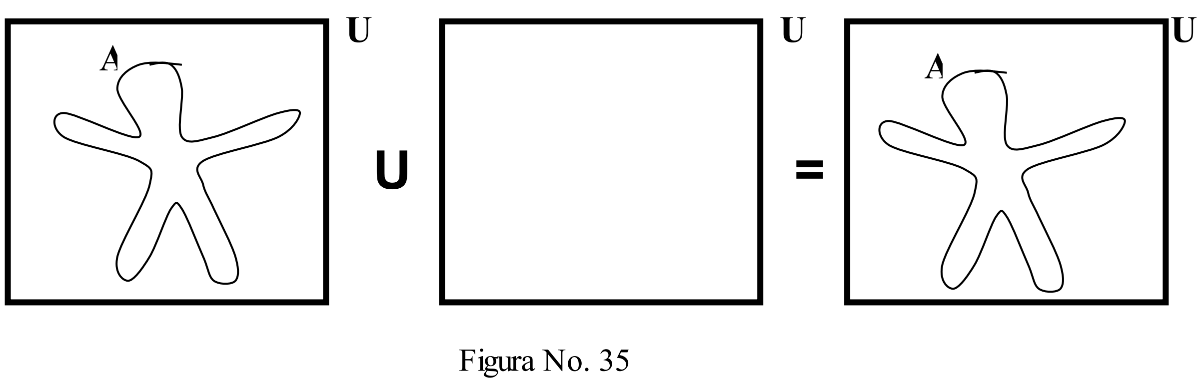


Figura No. 35

¿Qué tienen en común A y el universo?

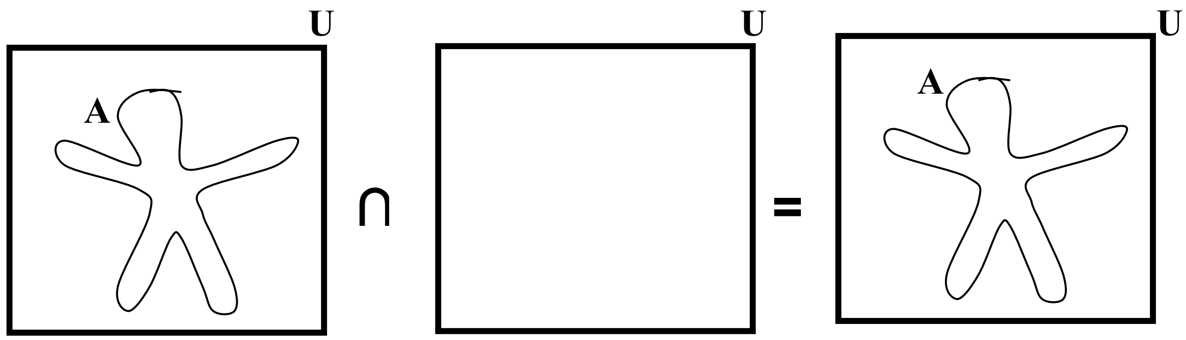


Figura No. 36

¿Qué tienen en común A y el vacío? :

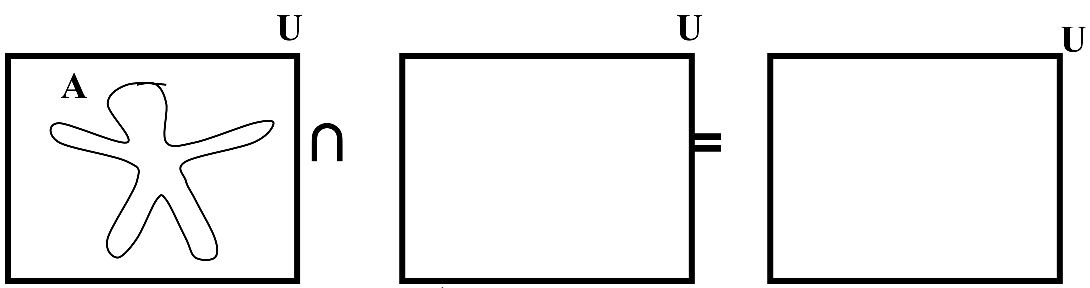


Figura No. 37

c) Leyes del complemento:

$A \cup A' = U \qquad A \cap A' = \Phi$

$(A')' = A \qquad \Phi' = U$

¿Qué se obtiene de unir A con lo que no es A?

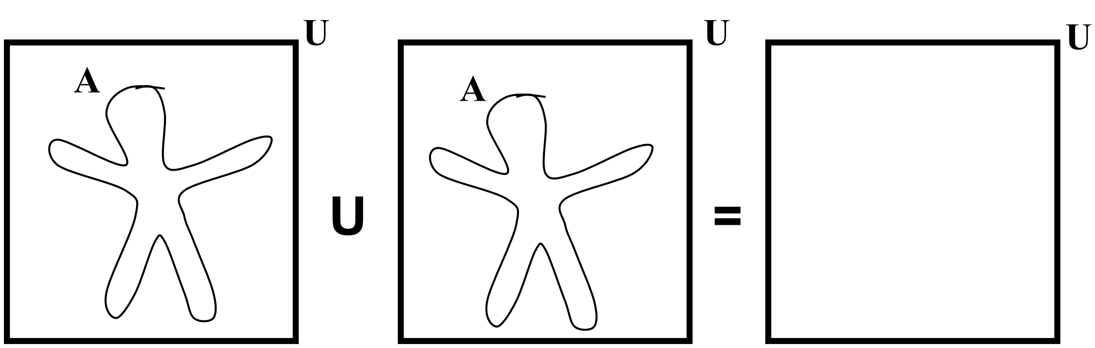


Figura No. 38

¿Qué tienen común A con lo que no es A?

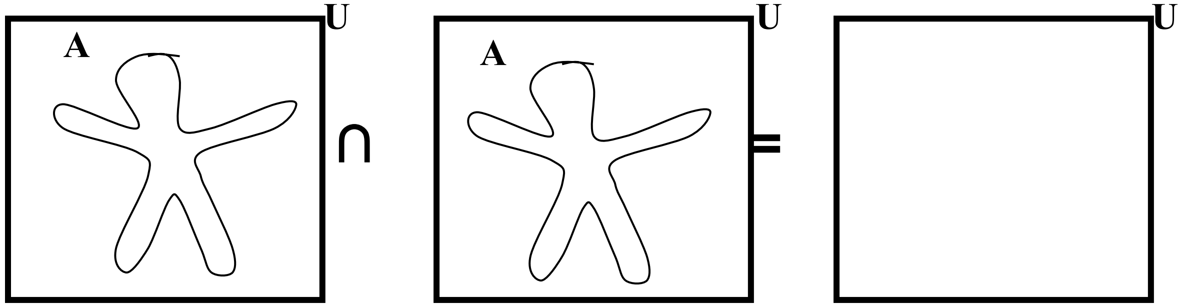
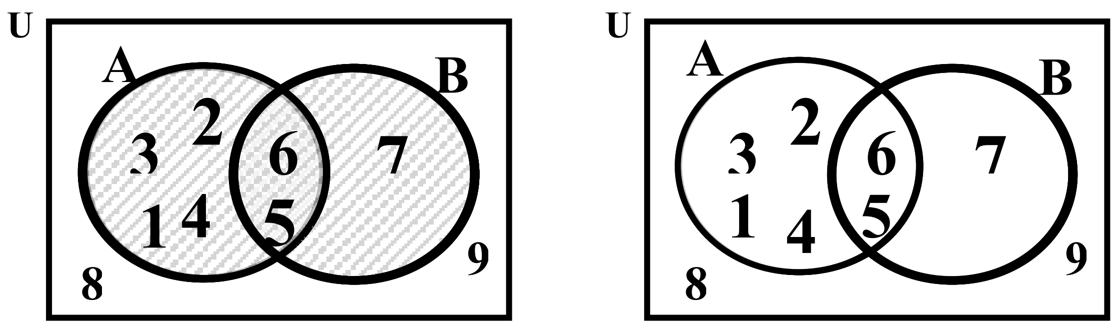


Figura No. 39

d) Leyes de D' Morgan:

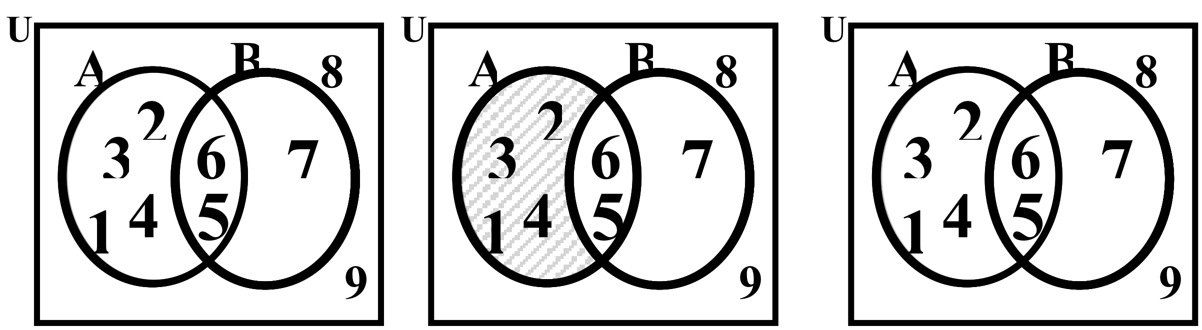
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

La demostración gráfica de (A U B)' = A' ∩ B' es la siguiente:



A U B **(A U B)'**

Así hemos encontrado el área que representa a la primera parte de la igualdad, ahora representamos la segunda parte, se espera que los resultados sean iguales:



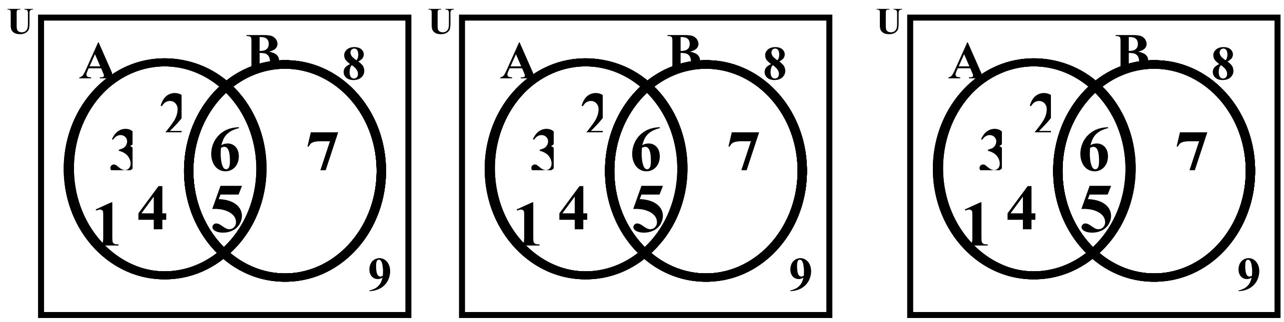
A' **B'** **A' ∩ B'**

Ejercicio propuesto:

Figura No. 40

Realiza la demostración gráfica del teorema de D' Morgan para: **(A ∩ B)' = A' U B'** para ello subraya el área correspondiente.

Primera parte



Segunda parte de la igualdad **A' U B'**:

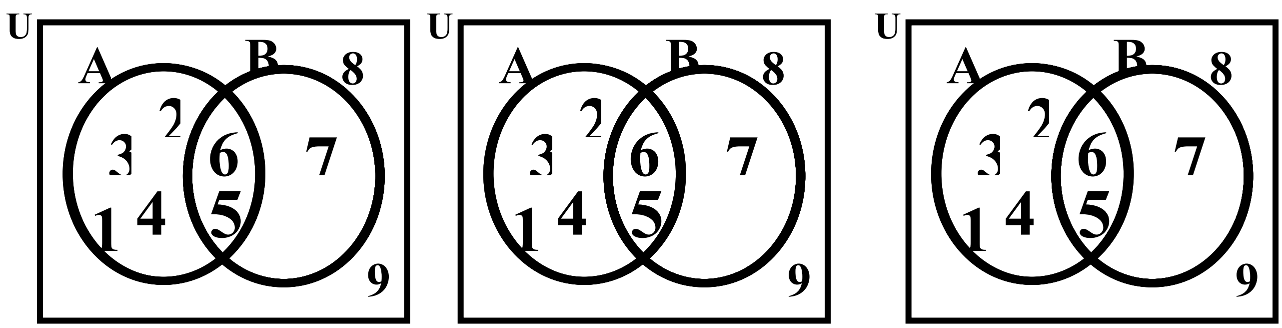


Figura No. 41

Las anteriores leyes están formuladas por pares, lo cual verifica la naturaleza dual de la teoría de conjuntos.

Ejercicio propuesto:
Simplifica usando las leyes del álgebra Booleana

1) **((A ∩ B)')'**
2) **(A') ' ∩ (((B)') ')**
3) **(A' U A') U B'**
4) **(A ∩ Φ)'**
5) **(A ∩ Φ')'**
6) **(A' ∩ U') '**
7) **(A ∩ A)' U (A' U A')**
8) **(A U A') '**
9) **(A' ∩ A') ' U A'**
10) **((A') ' U U')' ∩ A'**

Principio de dualidad

Si se intercambian las operaciones unión **(U)** por intersección **(∩),** como también el conjunto universal (**U**) por el conjunto vacío (**Φ**), en cualquier razonamiento sobre conjuntos, el enunciado resultante se llama **DUAL** del primero.

Ejemplo 1.

Demostrar que el dual de;

$$\mathbf{(U \cup B) \cap (A \cup \Phi) = A} \textbf{ es:}$$
$$\mathbf{(\Phi \cap B) \cup (A \cap U) = A}$$

Tomando la primera parte y por las leyes de identidad se tiene que:

$$\mathbf{(U \cup B) \cap (A \cup \Phi)}$$
$$\mathbf{U \quad \cap \quad A \quad = \quad A}$$

Ahora, considerando la segunda y nuevamente aplicando las leyes de identidad se tiene que:

$$\mathbf{(\Phi \cap B) \cup (A \cap U)}$$
$$\mathbf{\Phi \quad \cup \quad A \quad = \quad A}$$

Con lo cual queda demostrado.

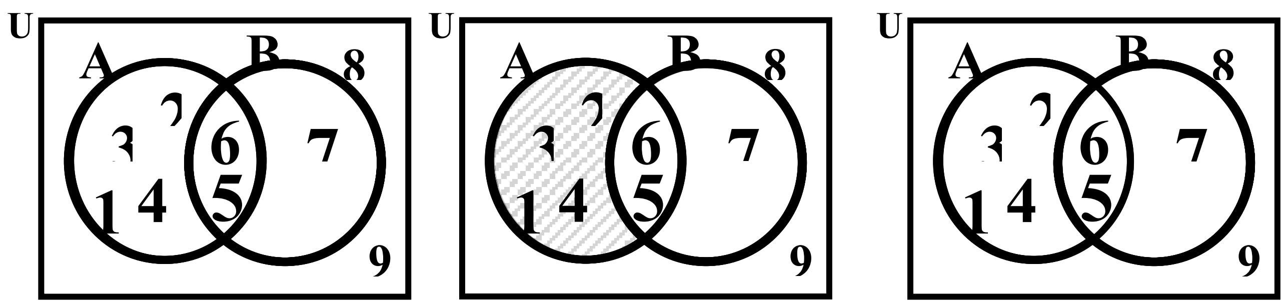
Ejemplo 2.

Demostrar que el dual de

(A ∩ B) U (A ∩ B') = A es
(A U B) ∩ (A U B') = A

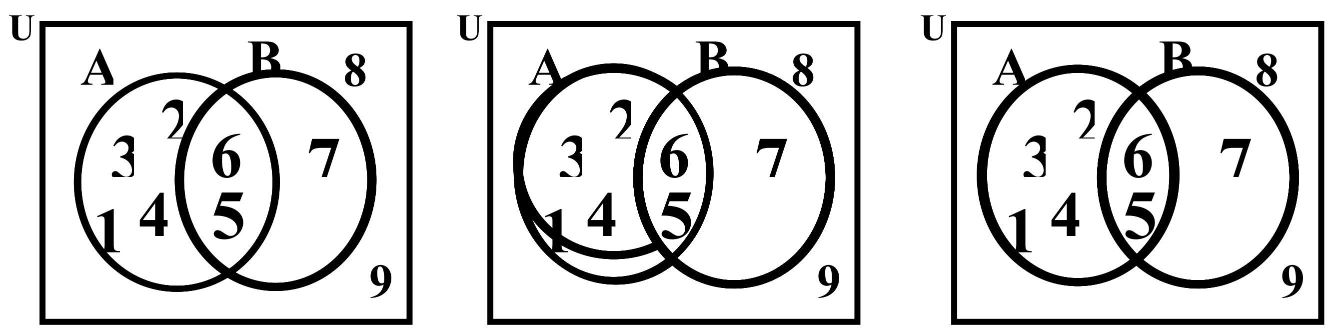
En este caso se puede hacer la demostración en forma gráfica así:

i) La primera parte se puede representar de la siguiente forma:



A **B’** **A ∩ B'**

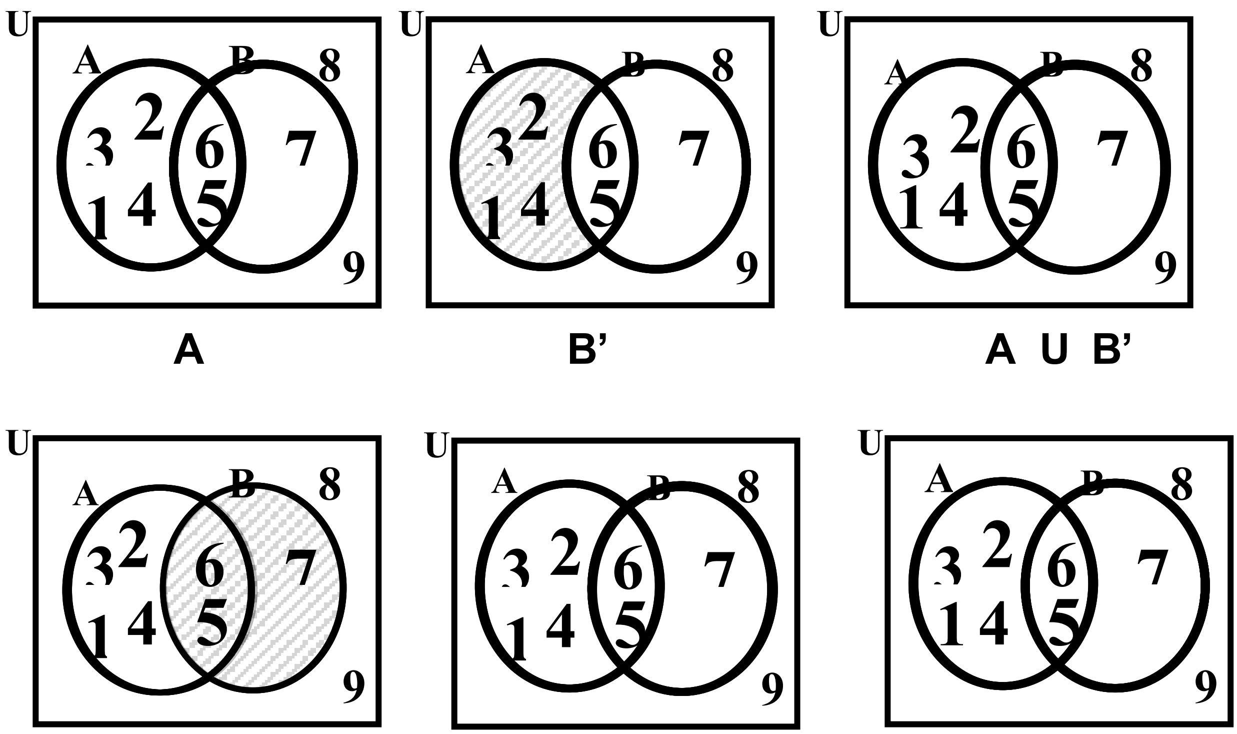
Figura No.42 primera parte



(A ∩ B) **U** **(A ∩ B')** **=** **A**

Segunda parte: **(A U B) ∩ (A U B') = A**

i) La primera parte se puede representar de la siguiente forma:



A　　　B'　　　A U B'

(A U B)　∩　A U B'　=　A

Figura No.43 segunda parte **(A U B)** ∩ **(A U B') = A**

Capítulo 2

Principios de lógica.

y	$\wedge$
o	$\vee$
No	$\sim$
Si … entonces	$\rightarrow$
Sí y sólo si	$\leftrightarrow$

Principios de la lógica

Objetivo general

Establecer el valor de verdad de muchos de los enunciados lógicos, utilizando las leyes de la lógica y las de las inferencias, ya sea para determinar la conclusión, o para determinar la consistencia interna de un razonamiento.

Utilizar las diferentes leyes de la lógica con el fin de obtener precisión, claridad y generalidad en diferentes razonamientos.

Objetivos específicos

1. Conocer la historia de la lógica y su clasificación.
2. Establecer la relación entre lógica y lingüística.
3. Aprender los conectivos lógicos: disyunción, conjunción, negación, implicación y equivalencia.
4. Elaborar la tabla de verdad de enunciados o expresiones lógicas.
5. Aplicar las leyes del álgebra de proposiciones para realizar demostraciones.
6. Determinar la conclusión de un grupo de premisas utilizando las inferencias lógicas.
7. Definir y diferenciar conceptos tales como razonamiento, demostración y argumento.

Historia y clasificación

Etimológicamente la **lógica** es la ciencia del logos. Originalmente logos significa palabra o discurso, por lo que en un principio se definió la lógica como la rama de la gramática que se ocupaba de ciertas formas de lenguaje.

Como la palabra es la expresión, o manifestación del pensamiento y el pensamiento racional es la base de la filosofía, puede decirse en general, que la lógica es la ciencia del pensamiento racional; es de aclarar que la lógica no se ocupa del contenido de los pensamientos sino de la manera o forma de los pensamientos.

En respuesta a la necesidad de construir argumentos, para defender o refutar pensamientos de los demás, **Aristóteles,** considerado por los griegos. "El padre de la lógica", creo métodos sistemáticos para analizar y evaluar dichos argumentos, para lo cual desarrolló la lógica proposicional estableciendo procedimientos para determinar la verdad o falsedad de proposiciones compuestas.

El gran matemático **Gottfried Leibniz** en 1646 fue el primero en intentar reformar la lógica clásica, planteando que la dependencia lógica entre proposiciones es demostrada, reduciendo argumentos complejos en simples, para lo cual propuso representar el conocimiento, en una forma que pudiera ser usado por un razonamiento mecánico y a éste esquema (lógica simbólica) lo llamó una **característica universal.**

El proceso de la lógica continuó en el siglo XIX. En 1847 el matemático inglés **George Boole** en compañía de **Augustus de Morgan** hizo notar el parentesco entre las operaciones lógicas con las matemáticas, pues a partir de los operadores aritméticos de adición, multiplicación y sustracción crearon los operadores lógicos equivalentes de unión, intersección y negación; además formularon los principios del razonamiento simbólico y el análisis lógico. A **Boole** se le atribuye la invención de las tablas de verdad para comprobar la veracidad de proposiciones compuestas.

Este trabajo fue retomado por Bertrand Russell y Alfred Whitehead en 1910 en su obra "Principio Matemático", quienes codificaron la lógica simbólica en su presente forma definiéndola como la "**Ciencia de todas las operaciones conceptuales posibles**", por esta razón la fundación de la lógica formal moderna se le atribuye a ellos.

Clasificación de la lógica

La lógica se puede clasificar como:

1. **Lógica tradicional o no formal.**
2. **Lógica simbólica o formal.**

En la lógica tradicional se consideran los procesos psicobiológicos del pensamiento lógico, y los métodos de inferencia que están relacionados con la destreza para interpretar y distinguir el razonamiento correcto del incorrecto; se puede considerar que la lógica no formal resume las experiencias humanas obtenidas del conocimiento y de la observación del mundo circundante.

La lógica como ciencia constituye la lógica formal o simbólica, la cual se encarga de investigar, desarrollar y establecer los principios fundamentales que siguen la validez de la inferencia; es considerada como uno de los sistemas mediante el cual se llega a formas puras y rigurosas. En el pensamiento simbólico, las palabras se manipulan, según las reglas establecidas, como si fueran simples signos sin preocuparse por su sentido.

Conceptualización

La lógica ofrece métodos que enseñan cómo formar proposiciones, evaluar sus valores de verdad y determinar si unas conclusiones se pueden deducir correctamente a partir de proposiciones supuestas; además, la lógica es una ciencia que se interesa por las relaciones existentes entre las proposiciones, con el fin de obtener precisión, claridad y generalidad en los razonamientos.

La precisión la logra mediante el uso de símbolos, los cuales tienen como función primordial eliminar las ambigüedades que la estructura del lenguaje ordinario no puede evitar con facilidad.

La claridad y generalidad, la consigue en la medida en que el usuario se familiariza con los elementos básicos de un argumento lógico, tanto en su representación simbólica como en su significado para luego establecer un lenguaje simbólico artificial, que le permita simplificar argumentos lógicos complicados; de esta manera, el símbolo permite concentración sobre lo esencial de un contexto dado, incrementando la fiabilidad con que se aplica el conocimiento.

Lógica y lingüística

Por su origen y desarrollo natural, han sido reconocidos dos tipos básicos de lenguajes: los lenguajes naturales y los lenguajes formales o artificiales.

Los lenguajes naturales no se establecieron a través de ninguna teoría, entre ellos están el castellano, el francés y el inglés. Las teorías y gramáticas de lenguajes naturales, fueron establecidas a posteriori, es decir después de que el lenguaje ya había madurado.

Los lenguajes formales como las matemáticas y la lógica, fueron desarrollados, generalmente, a partir del establecimiento de una teoría, la cual da las bases para que a través de dichos lenguajes se pueda desarrollar la misma teoría.

Los lenguajes naturales y formales tienen puntos en común, en principio, se tiene la existencia de un conjunto finito llamado alfabeto, el cual esta constituido de símbolos simples llamados comúnmente letras. En los lenguajes naturales se tienen como ejemplos los alfabetos: latino, griego y árabe-persa, entre otros. En los formales como la lógica se tiene el léxico del cálculo proposicional y de predicados.

Mediante la concatenación de las letras del alfabeto se forman los monemas, fonemas o palabras que se encuentran en el interior de un enunciado, de tal forma que un lenguaje se considera como un conjunto infinito de oraciones o enunciados que se forman con palabras del diccionario.

En los sistemas formales los enunciados del lenguaje consisten en una lista de símbolos, (lógicos o matemáticos) sujetos a diversas interpretaciones. En un lenguaje formal, las palabras y las oraciones están perfectamente definidas, una palabra mantiene el mismo significado prescindiendo del contexto o de su uso. Los lenguajes formales son, por esto, necesariamente exentos de cualquier componente semántico fuera de sus operadores y relaciones, y es gracias a esta ausencia de significado especial, que los lenguajes formales pueden ser usados para modelar una teoría de la ingeniería de sistemas, mecánica, eléctrica, entre otras.

Simbolización : proposiciones

La lógica utiliza un lenguaje exacto que no da lugar a imprecisiones, para tal fin toma como elemento básico de análisis a la proposición, que no es otra cosa que una oración del lenguaje cotidiano con un significado mucho más limitado, en tales condiciones, se puede considerar una proposición como una excepción lingüística que tiene la propiedad de ser verdadera o falsa, y para simplificar la escritura de argumentos lógicos complicados; crea un lenguaje simbólico artificial, en donde establece un conjunto de reglas claras, bien definidas y que no presentan las ambigüedades ni vaguedades del lenguaje corriente.

Es importante tener en cuenta que las proposiciones representan oraciones declarativas, las cuales contienen un sujeto perfectamente definido o dado por el contexto, un predicado y una conjugación del verbo ser.

Las proposiciones se representan simbólicamente mediante el uso de letras minúsculas del alfabeto tales como **p, q, r, s, ..., x, y, z**, las cuales reciben el nombre de letras o variables proposicionales, de esta forma, el lenguaje proposicional se hace más simple y exacto que el lenguaje natural.

Los siguientes ejemplos ilustran cómo se pueden simbolizar las proposiciones:

- **p** : Hoy es sábado.
- **q** : Estudio ingeniería de sistemas.
- **r** : New York es llamada la capital del mundo.
- **s** : 1 no es un número primo.
- **x** : 4 + 3 = 10.

Es decir, se puede establecer una relación biunívoca entre el lenguaje natural y el lenguaje formal. Estas proposiciones generalmente se llaman frases.

En el lenguaje cotidiano se encuentran expresiones como por ejemplo:

- Las rosas son rojas **y** tienen espinas.
- ¿La selección Colombia ganó **o** perdió?
- En el país **no** hay violencia.
- **Si** estudio lógica matemática **entonces** seré un destacado ingeniero de sistemas.
- 4 es un número par **si y sólo si** se puede dividir por 2.

Estas expresiones se denominan oraciones y para su formación se utilizaron las letras **y, o, no, si … entonces, sí y sólo si**, que sirvieron para unir o enlazar los enunciados.

Conectivos Lógicos

Estos términos de enlace reciben el nombre de **Conectivos lógicos** y al igual que a las proposiciones, también se les asignan un lenguaje simbólico, así:

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE FORMAL
y	$\wedge$
o	$\vee$
No	$\sim$
Si … entonces	$\rightarrow$
Sí y sólo si	$\leftrightarrow$

Vemos varios ejemplos de notación simbólica de las proposiciones:

p : Las rosas son rojas.
q : Las rosas tienen espinas.
p $\wedge$ q : Las rosas son rojas y tienen espinas.

---

r: La selección Colombia ganó?.
s: La selección Colombia perdió?.
r v s : La selección Colombia ganó o perdió?.

---

t : En el país hay violencia.
~ t : En el país no hay violencia.

---

x : Estudio lógica matemática
y : Seré un destacado ingeniero de sistemas
x $\rightarrow$ y : Si estudio lógica matemática seré un destacado ingeniero de sistemas.

---

u : 4 es un número par.
v : 4 es divisible por 2.
u $\leftrightarrow$ v : 4 es un número par si y sólo si es divisible por 2.

En lógica se consideran y se simbolizan dos clases de proposiciones: atómicas o simples y moleculares o compuestas, veamos:

Proposiciones simples:
Se denominan proposiciones simples aquellas oraciones que no utilizan conectivos lógicos.
Estos son algunos ejemplos:

p : El eclipse es un fenómeno natural.
q : La luna es un satélite de la tierra.
r : 2 es el inverso multiplicativo de –2.
s: -3 es el inverso aditivo de 3.

El valor de verdad de una proposición simple puede ser verdadero (V) o falso (F), pero no los dos valores al mismo tiempo, pues dejaría de ser proposición.

Proposiciones Compuestas
Las proposiciones compuestas son aquellas que se obtienen combinando dos o más proposiciones simples mediante términos de enlace.

Estos son algunos ejemplos de proposiciones compuestas:

p : Está lloviendo.
q: El sol brilla.
p Λ q: Está lloviendo y el sol brilla.

---

x : Quieres café?.
y : Quieres té?.
x v y : quieres café o té?.

---

s : Llueve.
r : Hace frío.
s → r : Si llueve entonces hace frío.

---

p : Un triángulo es equilátero.
q: Un triángulo tiene sus tres lados iguales.
p ↔ q : Un triángulo es equilátero si y sólo si tiene sus tres lados iguales.

La veracidad o falsedad de una proposición compuesta, depende del valor de verdad de cada una de las proposiciones simples que la conforman y de la forma como estén combinadas; para establecer este valor, se fijan criterios que se estudiarán en las próximas secciones de este capítulo.

Conectivos Lógicos

Como ya se dijo en la sección anterior, los símbolos que sirven para enlazar dos o más proposiciones simples, se llaman conectivos lógicos, estos son: la conjunción, la disyunción, la negación, el condicional y el bicondicional.

La conjunción: " λ "
Sean **p** y **q** dos proposiciones simples. La proposición compuesta **p** y **q** simbolizada por "**p Λ q**", se denomina la conjunción de **p** y **q**.

Ejemplos de conjunción:
Ejemplo 1
La proposición compuesta **r Λ s** : 6 es número par y entero positivo, está formada por:

r : 6 es un número par.
Λ : y
s : entero positivo.

Ejemplo 2
p Λ q : Termino de escribir mi programa de computación y luego jugaré tenis
p : Termino de escribir mi programa de computación.
Λ : y
q : jugaré tenis.

Para establecer el valor de verdad de la conjunción, surgen las siguientes posibilidades:

1. Que **p** y **q** sean verdaderas.
2. Que **p** sea verdadera y **q** sea falsa.
3. Que **p** sea falsa y **q** verdadera.
4. Que **p** y **q** sean falsas.

A continuación se analizan estas posibilidades para el ejemplo 1, el análisis del ejemplo 2 se deja como ejercicio.

1. **r:** Verdadera. 6 es un número par.
s: Verdadera. 6 es un entero positivo.
r Λ s : Verdadera (**V**)

2. **r:** Verdadera. 6 es un número par.
s: Falsa. 6 no es un entero positivo.
r Λ s : Falsa (**F**).

3. **r:** Falsa. 6 no es un número par.

s: Verdadera. 6 es un entero positivo**.**
r $\wedge$ s :Falsa (**F**).

4 **r :** Falsa. 6 no es un número par.
s: Falsa. 6 no es un entero positivo.
r $\wedge$ s: Falsa (**F**).

La disyunción " v "

Sean **p** y **q** dos proposiciones simples. La proposición **p** o **q**, simbolizada "**p v q**" se llama disyunción de **p** y **q**.

El operador "**o**" se puede usar de dos formas: como "o incluyente" o como "o excluyente". En el primer caso ("o" incluyente) hace que el valor de verdad de una de las dos proposiciones simples repercuta en el valor verdadero de la proposición disyuntiva; mientras que en la segunda forma ("o" excluyente) el valor de verdad de una proposición excluye la veracidad de la otra proposición, esto hace que la proposición disyuntiva tome el valor verdadero.

Ejemplo 1. Uso del "o" incluyente
r v s: Juan estudia ingeniería o Paola estudia medicina.
r : Juan estudia ingeniería.
v : O
s: Paola estudia medicina.

Ejemplo 2. Uso del "o" excluyente.
x v y : Quieres helado o gaseosa.
x : Quieres helado.
v : O
y: Quieres gaseosa.

Ejemplo 3: **Uso del "o" excluyente**
p v q: Alexandra vive en Bogotá o en Barranquilla.
p : Alexandra vive en Bogotá.
v : O
q : Alexandra vive en Barranquilla.

La negación:

Sea **p** una proposición simple. Se define la negación de **p** mediante la proposición compuesta **no p** simbolizada por: "**~ p**".

Ejemplo 1.

p : 3 es un número entero primo.
~ p : 3 no es un número entero primo, también se puede leer.
es falso que 3 es un número entero primo.

Ejemplo 2.

q : El automóvil de Francisco es rojo.
~ q: El automóvil de Francisco no es rojo ,o, es falso que el automóvil de Francisco es rojo.

El condicional "$\rightarrow$ "

Se dice que una proposición compuesta es condicional, si esta formada por dos proposiciones simples enlazadas por la expresión **"si…entonces".**

Si **p** y **q** representan dos proposiciones, la expresión "si **p** entonces **q**" se simboliza así :
p $\rightarrow$ q y se lee **p** implica **q.**

La proposición precedida por la expresión "si", se llama **antecedente o hipótesis** y la proposición precedida por la expresión "entonces", se llama **consecuente o conclusión** de la implicación. En la expresión **p $\rightarrow$ q**, el antecedente es **p** y el consecuente es **q**.

Las proposiciones condicionales se pueden enunciar de diferentes maneras así:

- Si **p** entonces **q**.
- **p** sólo si **q**.
- **q** si **p**.
- **p** es suficiente para **q.**
- **q** es necesaria para **p**.

Los siguientes ejemplos ilustran los anteriores enunciados:

- *Si un entero es múltiplo de 4 entonces es divisible por 2.*
- *Apruebo el semestre sólo si estudio.*
- *El algoritmo esta bien enunciado si el programa corre.*
- *Si dos rectas nunca se cortan necesariamente son paralelas.*

Cuando una proposición condicional se escribe en una de las anteriores formas, probablemente, en el lenguaje común habrá alguna que no se interprete como se desea, pero como la lógica no permite ambigüedades, éstas se deben escribir según la definición dada en la sección.

Existen varias formas de enunciar proposiciones condicionales así:

Implicación directa:	$\mathbf{p \rightarrow q}$
Implicación contraria:	$\mathbf{q \rightarrow p}$
Implicación recíproca:	$\mathbf{\sim p \rightarrow \sim q}$
Implicación contrarrecíproca:	$\mathbf{\sim q \rightarrow \sim p}$

Ejemplo 1.

Dadas las proposiciones **p**: **2m** es divisible por **4**
q: **m** es par

entonces:

La proposición directa es: $\mathbf{p \rightarrow q}$: Si **2m** es divisible por **4** entonces **m** es par, la contraria es: $\mathbf{q \rightarrow p}$: Si **m** es par entonces **2m** es divisible por **4**, la recíproca es: $\mathbf{\sim p \rightarrow \sim q}$: si 2m no es divisible por 4, entonces m no es par y la contrarrecíproca es: $\mathbf{\sim q \rightarrow \sim p}$: Si **m** no es par, entonces **2m** no es divisible por **4**.

Ejemplo 2.

Teniendo en cuenta la proposición directa: $\mathbf{\sim p \rightarrow q}$ construir las otras formas de la implicación:

Contraria:	$q \rightarrow \sim p$
Recíproca:	$\sim(\sim p) \rightarrow \sim q$
	$p \rightarrow \sim q$
Contrarrecíproca:	$\sim q \rightarrow \sim(\sim p)$
	$\sim q \rightarrow p$.

Ejemplo 3.

Proposición directa:	$\sim p \rightarrow \sim q$
Contraria:	$\sim q \rightarrow \sim p$
Recíproca:	$\sim(\sim p) \rightarrow \sim(\sim q)$
	$p \rightarrow q$
Contrarrecíproca:	$\sim(\sim q) \rightarrow \sim(\sim p)$
	$q \rightarrow p$

El bicondicional "↔ "

Se denomina bicondicional a la proposición formada por dos proposiciones simples conectadas por la expresión **"sí y sólo sí"**.

Simbólicamente si p y q son proposiciones simples, la doble implicación **p ↔ q** constituye un bicondicional, donde p recibe el nombre de primer miembro y q segundo miembro.

El bicondicional está formado por las implicaciones **p → q** y **q → p**, las cuales deben tener el mismo valor de verdad para formar una equivalencia entre **p** y **q**; en consecuencia, se dice que la proposición **p** es equivalente a la proposición **q** y se acostumbra a escribir **p ↔ q**.

La proposición bicondicional tiene varias formas de traducción más no de significación, éstas son:

- **p** sí y sólo si **q**.
- **q** sí y sólo si **p**.
- si **p** entonces **q** y recíprocamente.
- si **q** entonces **q** y recíprocamente.
- **p** es una condición necesaria y suficiente para **q**.
- **q** es una condición necesaria y suficiente para **p**.

Ejemplo 1.
Dadas las proposiciones:

p: Un triángulo es rectángulo.
q: Un triángulo tiene un ángulo recto.

El bicondicional p ↔ q se puede traducir de las siguientes formas:

- Un triángulo es rectángulo sí y sólo sí tiene un ángulo recto.
- Un triángulo tiene un ángulo recto sí y sólo sí es un triángulo rectángulo
- Si un triángulo es rectángulo entonces tiene un ángulo recto y si un triángulo tiene un ángulo recto entonces es un triángulo rectángulo.
- Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea rectángulo es que tenga un ángulo recto.
- Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo tenga un ángulo recto es que sea un triángulo rectángulo.
- Un triángulo rectángulo es equivalente a un triángulo con un ángulo recto.

Tablas de verdad

Definición

Una tabla de verdad es una representación esquemática de las relaciones entre proposiciones; sirve para determinar los valores de verdad de proposiciones compuestas, las cuales dependen de los conectivos utilizados y de los valores de verdad de sus proposiciones simples.

En la elaboración de una tabla de verdad los términos de enlace tales como la negación (" **~** "), la disyunción (" **v** ") y la conjunción (" **Λ** ") se consideran conectivos fundamentales; por tal razón, sus valores de verdad constituyen base para establecer bajo qué condiciones una proposición compuesta es verdadera o falsa.

p	**q**	**~ p**	**p Λ q**	**p v q**	**$p \rightarrow q$**	**$p \leftrightarrow q$**
V	V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	F	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	V	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**

Para simbolizar los valores de verdad de una proposición, se utiliza el sistema binario, mediante el cual se le asigna **1** al valor verdadero y **0** al valor falso. La siguiente tabla resume los valores de verdad de los conectivos lógicos:

p	**q**	**~ p**	**p Λ q**	**p v q**	**$p \rightarrow q$**	**$p \leftrightarrow q$**
1	1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
0	0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**

Construcción de tablas de verdad

Para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta es necesario elaborar la correspondiente tabla de verdad; para tal fin y mediante el siguiente ejemplo se enuncian los pasos a seguir:

Ejemplo 1.
Construir la tabla de verdad para la proposición ~ (p Λ q).

Paso 1.
Se hace un recorrido de izquierda a derecha teniendo en cuenta los paréntesis.

Paso 2.
Se identifica el conectivo que aparece dentro del paréntesis, en este ejemplo la conjunción.

Paso 3.
Se precisa el término de enlace que precede al paréntesis, en el ejemplo la negación.

Paso 4.
Se elabora la tabla con el número de columnas determinado por:

- Proposiciones que intervienen
- Conectivos utilizados dentro del paréntesis
- Conectivo utilizado fuera del paréntesis.

La siguiente tabla ilustra el paso 4:

p	q	p Λ q	~ (p Λ q)

Paso 5.
Se fijan los valores de verdad en las columnas de las proposiciones **p** y **q**. se ilustra en la siguiente tabla

p	q	p Λ q	~ (p Λ q)
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Paso 6.
Se completa la tabla por columnas, teniendo en cuenta el conectivo y el valor de verdad de cada proposición simple. La finalización de la elaboración de la tabla de verdad es:

p	q	p Λ q	~ (p Λ q)
V	V	V	**F**
V	F	F	**V**
F	V	F	**V**
F	F	F	**V**

p	q	p Λ q	~ (p Λ q)
1	1	1	**0**
1	0	0	**1**
0	1	0	**1**
0	0	0	**1**

Ejemplo 2.

Elaborar la tabla de verdad de la proposición: **(p v q) Λ (p Λ q).**

Al realizar el recorrido de izquierda a derecha se observa que la proposición está conformada por dos paréntesis conectados por la disyunción y dentro de cada paréntesis se identifican la disyunción y la conjunción respectivamente; después de éste análisis se elabora la tabla.

p	q	p v q	p Λ q	(p v q) Λ (p Λ q)
1	1	1	1	**1**
1	0	1	0	**0**
0	1	1	0	**0**
0	0	0	0	**0**

Ejemplo 3

Elaborar la tabla de verdad para la doble negación, es decir, **~ (~ p)**

p	~ p	~ (~ p)
V	F	**V**
F	V	**F**

p	~ p	~ (~ p)
1	0	**1**
0	1	**0**

Este resultado permite concluir que la doble negación de una proposición es la misma proposición.

Tablas de verdad para los conectivos lógicos

La conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Tabla No. 1 La conjunción.

De la anterior tabla de verdad podemos concluir que la conjunción es verdadera únicamente cuando las dos proposiciones simples son verdaderas, en cualquier otro caso la proposición es falsa.

La disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Tabla No.2 La disyunción.

La negación

p	$\sim p$
V	**F**
F	**V**

Tabla No.3 La negación.

El condicional

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Tabla No.4 El condicional.

El bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Tabla No.5 El Bicondicional.

Implicación directa, contraria, recíproca y contrarecíproca

Tabla de verdad para las cuatro formas de la implicación,

p	q	~ p	~ q	p → q Directa	q → p Contraria	~ p → ~ q Recíproca	~ q → ~ p Contrarrecíporca
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Tabla No. 6. Formas de la implicación.

Esta tabla permite analizar que los valores de verdad correspondientes a las columnas de la directa y la contrarecípoca coinciden, al igual que los de las columnas de la contraria y de la recíproca, por lo tanto estas implicaciones son equivalentes, es decir:

1. **(p → q) ↔ (~ q → ~ p)**
2. **(q → p) ↔ (~ p → ~ q)**

Se propone al estudiante construir la tabla de verdad para las anteriores equivalencias.

Leyes de la lógica

Tautología

Entre las proposiciones compuestas existen unas muy importantes por ser siempre verdaderas, independientemente del valor de verdad de las proposiciones que la conforman, este tipo de proposiciones reciben el nombre de tautologías, es decir, una tautología es una proposición que es verdadera en todos los casos.

Ejemplo 1.

Demostrar que la proposición **$(p \vee q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$** es verdadera:

Para verificar la validez de esta proposición es necesario realizar la tabla de verdad y comprobar que en la última columna solamente aparecen valores verdaderos.

p	q	p v q	~ q	~ q → p	(p v q) → (~ q → p)
1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1

Tabla No. 7. Ejemplo 1.

Una proposición compuesta, que es falsa en todos los casos independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la conforman se llama **Contradicción.**

Ejemplo 2.
¿Es **$(p \wedge \sim q) \wedge q$** una tautología?

Para responder la pregunta se hace necesario hacer la tabla de verdad, así:

p	q	~ q	p Λ ~ q	(p Λ ~ q) Λ q
V	V	F	F	**F**
V	F	V	V	**F**
F	V	F	F	**F**
F	F	V	F	**F**

Por lo tanto esta proposición no es una tautología, **es una contradicción.**

Dos proposiciones compuestas se consideran lógicamente equivalentes si tienen los mismos valores de verdad para cada una de las opciones en la tabla de verdad.

Ejemplo 3

Establecer si las proposiciones **$(p \rightarrow q)$ y $(\sim p \vee q)$** son lógicamente equivalentes.

Para esto hay que probar que **$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$**, la tabla de verdad es:

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$\sim p$**	**$\sim p \vee q$**	**$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$**
1	1	1	0	1	**1**
1	0	0	0	0	**1**
0	1	1	1	1	**1**
0	0	1	1	1	**1**

Como la última columna es toda verdadera (tautología), se puede concluir que las proposiciones son lógicamente equivalentes.

Leyes del álgebra de proposiciones

Las siguientes son las leyes de la lógica.

1. Idempotencia:

$p \vee p \leftrightarrow p$

$p \wedge p \leftrightarrow p$

3. Asociativas:

$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

4. Conmutativas:

$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$

$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$

5. Distributivas:

$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

6. Identidad:

$p \vee 0 \leftrightarrow p$, $p \vee 1 \leftrightarrow 1$

$p \wedge 0 \leftrightarrow 0$, $p \wedge 1 \leftrightarrow p$.

7. Complemento:

$p \vee \sim p \leftrightarrow 1$, $p \wedge \sim p \leftrightarrow 0$

$\sim(\sim p) \leftrightarrow p$, $\sim 1 \leftrightarrow 0$, $\sim 0 \leftrightarrow 1$

8. Leyes D' Morgan:

$\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Estas leyes están formuladas por pares debido a la naturaleza dual del álgebra de proposiciones.

En los ejemplos que aparecen a continuación, se utilizan las leyes de la lógica para realizar las respectivas demostraciones:

Ejemplo 1.

Demostrar que:

1. **$p \wedge p \leftrightarrow p$**
2. **$p \vee p \leftrightarrow p$.**

Estas demostraciones se pueden efectuar partiendo del primer miembro y llegar al segundo o partiendo del segundo y llegar al primero. En la parte derecha se escribe el nombre de la ley que justifica ese paso.

1. Partiendo del primer miembro se llega al segundo así:

$p \wedge p \leftrightarrow (p \wedge p) \vee 0$	Identidad
$p \wedge p \leftrightarrow (p \wedge p) \vee (p \wedge \sim p)$	Complemento
$p \wedge p \leftrightarrow p \wedge (p \vee \sim p)$	Distributiva
$p \wedge p \leftrightarrow p \wedge 1$	Complemento
$p \wedge p \leftrightarrow p$	Identidad

2. Partiendo del segundo miembro se llega al primero así:

$p \leftrightarrow p \vee 0$	Identidad
$p \leftrightarrow p \vee (p \wedge \sim p)$	Complemento
$p \leftrightarrow (p \vee p) \wedge (p \vee \sim p)$	Distributiva
$p \leftrightarrow (p \vee p) \wedge 1$	Complemento
$p \leftrightarrow (p \vee p)$	Identidad.

Se sugiere hacer las demostraciones partiendo del primer miembro.

Ejemplo 2.

Demostrar que: **$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \leftrightarrow q$**

$(q \vee p) \wedge (q \vee \sim p) \leftrightarrow q$	Conmutativa
$q \vee (p \wedge \sim p)$	Distributiva
$q \vee 0$	Complemento
q	Identidad

Ejemplo 3.

Demostrar que: $\mathbf{[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)]}$

$[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \vee 0$	Identidad
$\leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \wedge \sim (q \wedge r)$	Complemento
$\leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \vee (q \wedge r) \wedge \sim (q \wedge r)$	Asociativa
$\leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \vee 0$	Complemento
$\leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$	Identidad

Ejemplo 4.

Demostrar: $\mathbf{(p \vee \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \sim r) \leftrightarrow (p \wedge q)}$

$(p \vee \sim q) \wedge [q \vee (r \wedge \sim r)]$	Distributiva
$(p \vee \sim q) \wedge [q \vee 0]$	Complemento
$(p \vee \sim q) \wedge q$	Identidad
$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge q)$	Distributiva
$(p \wedge q) \vee 0$	Complemento
$(p \wedge q)$	Identidad.

Ejemplo 5.

Demostrar: $\mathbf{\sim [(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)] \leftrightarrow (\sim p \vee \sim r)}$

$\sim [(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)] \leftrightarrow \sim [(p \wedge r) \wedge (\sim q \vee q)]$	Conmutativa y distributiva
$\sim [(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)] \leftrightarrow \sim [(p \wedge r) \wedge 1]$	Complemento
$\sim [(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)] \leftrightarrow \sim (p \wedge r)$	Identidad
$\sim [(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)] \leftrightarrow (\sim p \vee \sim r)$	D' Morgan

Cuantificadores

Cuantificador universal y existencial
Existen especialmente en matemáticas, expresiones que contienen variables tales como x, y, z, etc., para las cuales su valor de verdad depende del valor que tome la variable.

Ejemplo 1. $x + 1 = 2$
Esta proposición es verdadera si $\mathbf{x = 1}$ y falsa si $\mathbf{x \neq 1}$. A estas proposiciones se les llama **"Proposiciones abiertas"**.

Hasta el momento se han tratado proposiciones a las cuales se les puede asignar un valor de verdad, ya sea falso o verdadero, ahora en esta sección, se estudia la lógica de proposiciones abiertas, para ello, se asigna una expresión llamada **cuantificador,** que permite restringir los valores de las variables, de tal forma que la proposición toma un solo valor de verdad para dicha restricción.

En el ejemplo, la proposición se puede enunciar de las siguientes formas:

1. Existe $\mathbf{x = 1}$ tal que $\mathbf{x + 1 = 2}$. Proposición verdadera
2. Para todo $\mathbf{x \neq 1}$, se tiene que $\mathbf{x + 1 = 2}$. Proposición falsa.

$(\exists x = 1) / (x + 1 = 2)$	Verdadera.
$(\forall x \neq 1) / (x + 1 = 2)$	Falsa.

Simbólicamente, en el primer caso el cuantificador recibe el nombre de **cuantificador existencial**, pues está informando que existe un sólo valor para **x** que hace verdadera la proposición dada, mientras que en el segundo caso el cuantificador se llama **universal** porque afirma que todos los valores de **x** diferentes de **1** hacen la proposición falsa, es decir, que un valor de **x** diferente de **1** convierte $\mathbf{x + 1 = 2}$ en proposición falsa.
Cualquier cuantificador de la forma para todo, todo, para cada, o cada se llama cuantificador universal y se simboliza por **"$\forall$ "**

Ejemplo 2.
$\mathbf{(\forall x) / (x + 4 = 4 + x)}$. Significa que todo **x** verifica la ecuación.

La palabra algunos(s) significa que por lo menos uno verifica la condición. Los cuantificadores de la forma existe por lo menos uno, y se llaman cuantificadores existenciales y se representan así**: "$\exists$".**

Ejemplo 3

$$\mathbf{(\exists x) / (2x + 2 = 5).}$$

Valores de verdad de expresiones con cuantificadores

Para determinar el valor de verdad de una expresión que contiene un cuantificador es importante tener claros los siguientes conceptos:

1. Conjunto Universal: es el conjunto que contiene todos los elementos considerados en un estudio determinado.
2. Conjunto dominio de la variable: corresponde al conjunto de valores posibles de la variable.

Ejemplo 1.
($\forall$x Є R) / (2 x – 1 = 0) que se lee " para todo x que pertenece a los reales se verifica que **2 x – 1 = 0** ".

En esta proposición el conjunto universal esta formado por los números reales y el dominio de la variable es **x = ½.**
El ejemplo afirma que **todo** número real verifica **2x – 1 = 0**, lo cual es falso, pero si se cambia el conjunto universal, por el conjunto **{ 1/2 },** la proposición se convierte en verdadera y se enuncia así:

($\forall$ x Є { 1/2 }) / (2 x – 1 = 0) es verdadera.

Lo anterior conduce a la siguiente afirmación:
Una proposición que contiene un cuantificador universal es verdadera sí y sólo sí el dominio de la variable es igual al conjunto universal.

Ejemplo 2.

($\exists$x Є R) / (x 2 - 1 = 0)

Conjunto universal: **R** (reales)
Dominio de la variable: **x = 1 ,v, x = -1**
En este caso el cuantificador existencial afirma que por lo menos existe un valor que satisface la proposición, así, el ejemplo 2 es verdadero.

Ejemplo 3.

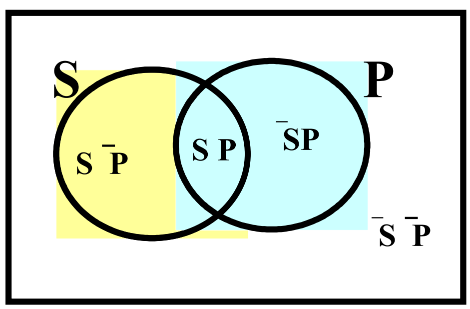
($\exists$x Є R) (x 2 + 1 = 0)

El conjunto universal está formado por los números reales, pero el dominio de la variable es el conjunto vacío, pues, no hay un número real que al elevarlo al cuadrado y sumarle 1 de cómo resultado cero, esto hace que la proposición sea falsa.

Del análisis de los ejemplos 2 y 3 se puede afirmar: Una proposición con un cuantificador existencial es verdadera si y sólo si el dominio de la variable no es vacío.

Capítulo 3

Preliminares sobre las proposiciones



Clases S y P

Proposiciones categóricas

El estudio clásico o aristotélico de la deducción está centrado en argumentos que contienen solamente proposiciones de un tipo especial, llamadas **proposiciones categóricas**.

El tipo especial se refiere a que las proposiciones pueden ser

universales (afirmativas o negativas) o

particulares (afirmativas o negativas).

Por lo tanto, se puede afirmar que hay cuatro formas estándar de proposiciones categóricas. Los siguientes ejemplos ilustran cada una de ellas.

Proposición categórica universal afirmativa

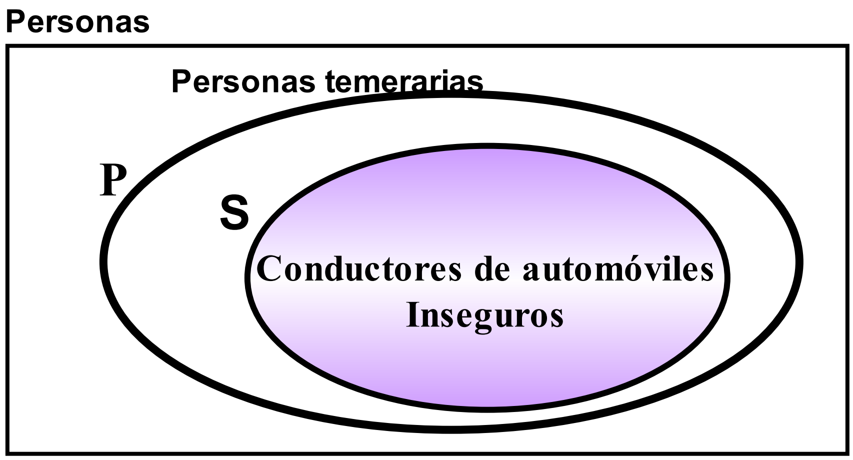
Todos los conductores de automóviles que no son seguros son personas temerarias que ponen en peligro la vida de los demás.

Esta es una proposición universal afirmativa. Se refiere a dos clases:

1. Conductores de automóviles inseguros y

2. personas temerarias que ponen en peligro la vida de los demás

y dice que la primera clase está contenida en la segunda, lo cual significa que cada miembro de la primera clase es también miembro de la segunda.



Todo S es P

En este ejemplo, el término sujeto **conductores**, designa a la clase de todos los conductores y el término predicado **temerarias**, designa a la clase de todas las personas temerarias.

Este tipo de proposición categórica se llama universal afirmativa, porque la proposición afirma que la relación de inclusión entre las dos clases es completa, todos los elementos o miembros de **S** también lo son de **P**.

Todas las proposiciones universales afirmativas se pueden escribir simbólicamente así:

Todo S es P , donde **S** representa el sujeto y **P** el predicado.

Proposición Categórica Universal negativa

Ningún conductor de automóvil responsable es un peligro para la vida de los demás.

Esta es una proposición universal negativa. Niega (en forma universal) que los conductores responsables son un peligro para la vida de los demás.

En este caso se hace referencia a dos clases:

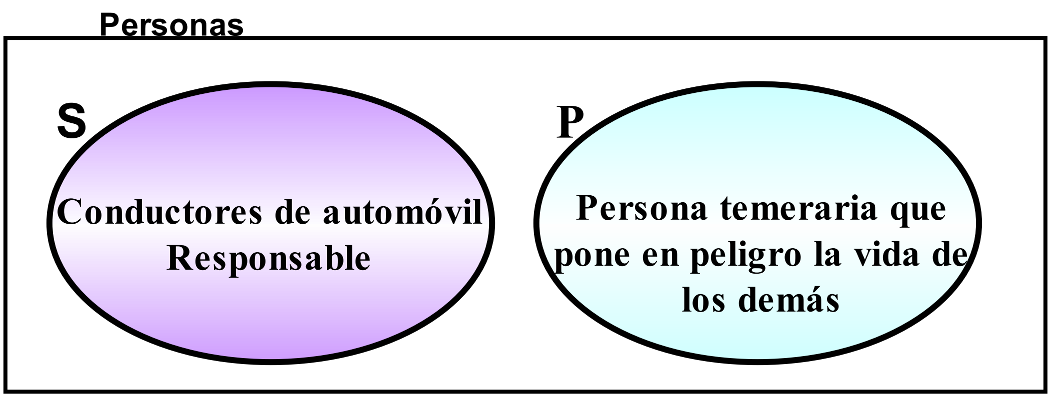
1. Conductor de automóvil responsable y

2. personas que ponen en peligro la vida de los demás

la primera clase excluye a la segunda, la excluye totalmente, es decir, que no hay ningún miembro de la primera clase (conductor responsable) que también pertenezca a la segunda (que represente un peligro para la vida de los demás). Todas las proposiciones universales negativas se pueden escribir así:

Ningún S es P

,donde S representa el término sujeto y P el término predicado.



Ningún S es P

La proposición recibe el nombre **universal negativo,** porque la proposición niega que la relación de inclusión de clase tenga lugar entre las dos clases y lo niega en forma universal: no hay ningún miembro de **S** que también lo sea de **P**.

Proposición categórica afirmativa particular

Algunos estudiantes de la secundaria ingresan a la educación superior.

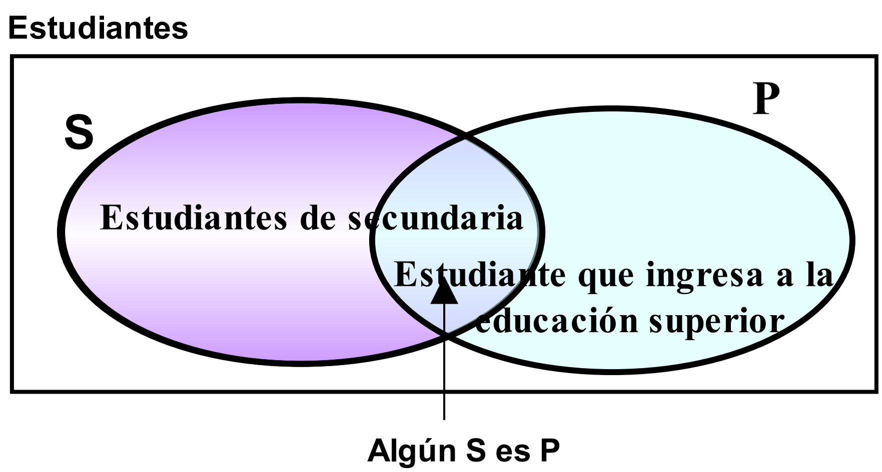
Este ejemplo afirma que algunos de los miembros de la clase de todos los estudiantes de secundaria son (ingresan) miembros de la clase de estudiantes de universidad. Pero no afirma esto universalmente: no dice que todos los estudiantes de secundaria (sin excepción) ingresan a la universidad, sino más bien algunos en particular. Esta proposición no afirma ni niega que "todos" los estudiantes ingresan a la universidad, se refiere sólo a algunos.

Clases:

1. **Estudiantes de secundaria y**

2. **Estudiantes que ingresan a la educación superior**

La palabra "algunos" es indefinida, significa ¿" al menos uno "?, ¿" al menos dos"?, ¿"al menos tres"? O ¿"al menos cuántos"? Para mayor precisión, se acostumbra usar éste término como "al menos uno ". Por lo tanto una proposición afirmativa particular se escribe simbólicamente así:



Algún S es P,

Lo cual significa que por lo menos un miembro de la clase designada con el término sujeto **S** también es miembro de la clase designada por el término predicado **P**. El nombre **afirmativa particular** hace referencia a que la proposición afirmativa se cumple en la relación de inclusión entre clases, pero no lo afirma de la primera clase universalmente, sólo parcialmente, de algunos miembros particulares de la primera clase.

Proposición Categórica Negativa particular

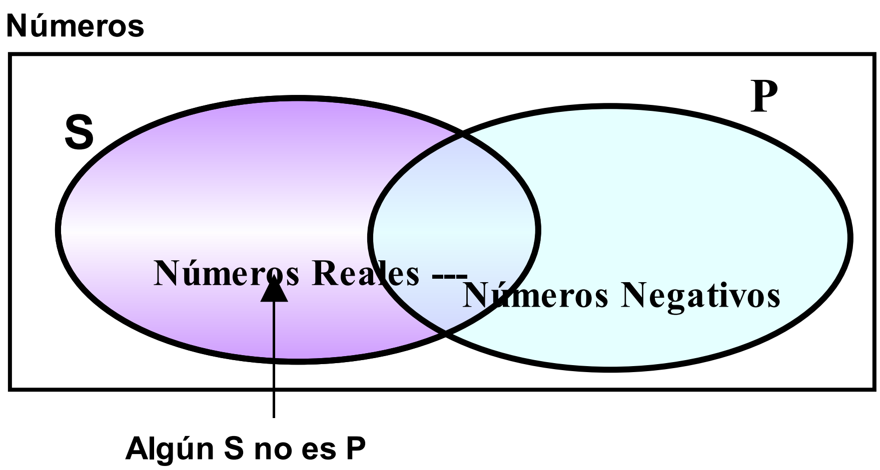
Algunos números reales no son positivos.

Clases

1. Números reales y

2. Números negativos

En este ejemplo el antecedente (algunos números reales) es particular en el sentido que no se refiere universalmente a los números reales, sólo a algunos de ellos, algunos miembros de esa clase. Pero a diferencia del ejemplo anterior, no afirma que los miembros particulares de la primera clase a los que se refiere (números reales) están incluidos en la segunda clase (reales no positivos), esto es precisamente lo que se niega. Una proposición particular negativa, se escribe en forma simbólica así:



Algún S no es P. dice que por lo menos un miembro que pertenece a la clase designada por el término sujeto, **S**, es excluido de la totalidad de la clase designada por el término predicado, **P**.

Cualidad y cantidad de las proposiciones categóricas

Cada proposición categórica de forma estándar tiene una **cualidad** y una **cantidad.**

Cualidad Afirmativa o Negativa:

La cualidad de una proposición es afirmativa o negativa, según el sujeto, completa o parcialmente, afirme o niegue la inclusión de la clase. Por lo tanto las proposiciones afirmativas universales y particulares tienen cualidad afirmativa, en cambio las proposiciones negativas universales y particulares tienen cualidad negativa.

Cantidad Universal o Particular de cantidad:

La cantidad de una proposición es universal o particular según que la proposición se refiera a todos los miembros o solamente a algunos de la clase designada por el término sujeto. Así, las proposiciones universales afirmativas o negativas son universales de cantidad y las proposiciones particulares afirmativas o negativas son particulares de cantidad.

------------------ La clave -----------------

ALGUNOS = PARTICULAR
TODOS = UNIVERSAL

Ejercicio propuesto:

De la lectura anterior, y puedes completar la siguiente tabla:

Proposición Categórica	**Representación**
	Todo S es P
Particular Negativa	

Proposiciones contrarias, de contingencia y subcontrarias

Las proposiciones categóricas en forma estándar que tienen el mismo término sujeto y término predicado, pueden diferir unas de otras en cualidad o en cantidad o en ambas

Existen ciertas relaciones importantes correlacionadas con los diversos tipos de oposición (diferencia en cualidad, cantidad o en ambas) éstas pueden ser de CONTRADICCIÓN, CONTINGENCIA, o, SUBCONTRARIAS

Proposiciones contradictorias
Dos proposiciones son CONTRADICTORIAS si una de ellas es la negación de la otra, es decir, las dos proposiciones no pueden ser a la vez verdaderas ni a la vez falsas. Es claro que dos proposiciones categóricas en forma estándar que tienen el mismo término sujeto y término predicado, pero son diferentes tanto en cantidad como en cualidad, son contradictorias entre sí.

Ejemplo 1
Las proposiciones

P: todos los jueces son abogados
Q: algunos jueces no son abogados

Son contradictorias porque **son opuestas tanto en cantidad como en cualidad.** La proposición **P** es universal afirmativa, mientras que la proposición **Q** es particular negativa.

Ejemplo 2
Las siguientes proposiciones también son contradictorias.

P: algunos números reales son negativos. Es particular afirmativa
Q: todos los números reales son negativos. Es universal negativa.

En este caso son opuestas en cantidad y en cualidad.

Otra forma de identificar las proposiciones contrarias, es cuando la verdad de una proposición implica la falsedad de la otra.

Ejemplo 3
P: -3 es mayor que -1
Q: -1 es mayor que -3.

Son contradictorias porque la proposición **P** es falsa y esto implica que la proposición **Q** sea verdadera.

Ejemplo 4
Dadas las proposiciones

P: hoy es lunes
Q: hoy no es lunes.

Son contradictorias porque si **P** es verdadera automáticamente **Q** será falsa y lo contrario.

Proposiciones Contradictorias y Contrarias

Es importante aclarar la diferencia entre proposiciones contradictorias y proposiciones contrarias.

1. Proposiciones contrarias:
Se dice que dos proposiciones son CONTRARIAS si no pueden ser ambas verdaderas, aunque ambas puedan ser falsas.

Ejemplo 5
Considerando las proposiciones

P: Paola es mayor que Angélica
Q: Angélica es mayor que Paola

Inicialmente se podría pensar que son contradictorias, es decir, que si **P** es verdadera, **Q** sería falsa, y consecuentemente, si **P** es falsa, entonces **Q** sería verdadera, pero al considerar el hecho de que Paola y Angélica tengan la misma edad, ambas proposiciones serían falsas, por lo tanto no serían contradictorias, y en este caso se llamarían **contrarias**, debido a que ambas no pueden ser verdaderas pero sí falsas.

En forma general se puede decir que dos proposiciones universales que tienen los mismos sujetos y predicados pero difieren en cualidad son contrarias.

El siguiente ejemplo muestra claramente la diferencia entre las proposiciones contradictorias y contrarias.

Ejemplo 6
Dadas las proposiciones:

P: todos los números enteros son positivos
Q: algunos enteros son positivos
R: todos los enteros son negativos

Se puede afirmar que las proposiciones **P** y **Q** son contradictorias porque una es la negación de la otra (en este caso **P** es falsa mientras que **Q** es verdadera). Y las proposiciones **P** y **R** son contrarias ya que ambas no pueden se verdaderas pero si son ambas falsas.

------------------Nemotecnia-----------------

contrarias = ambas pueden ser falsas
contradictorias = cuando una es verdadera la otra es falsa y viceversa.

Proposición Contingente
Una proposición que no es necesariamente verdadera ni necesariamente falsa se llama CONTINGENTE.

Ejemplo 1
P: todos los matemáticos son filósofos

Esta es una proposición que no es necesariamente verdadera (no todos los matemáticos son filósofos), ni necesariamente falsa (existen matemáticos que sí son filósofos)

Ejemplo 2
Q: todos los cuadrados son rectángulos

No necesariamente es falsa porque el cuadrado es un tipo de rectángulo, ni es necesariamente verdadera porque no todos los cuadrados son rectángulos

Proposiciones Subcontrarias

Se dice que dos proposiciones son subcontrarias si no pueden ser ambas falsas pero sí ambas verdaderas

Ejemplo 1

Las proposiciones

P: algunos enteros son positivos
Q: algunos enteros son negativos

Son subcontrarias debido a que ambas son verdaderas.

------ la Clave----
Observa que necesariamente, al afirmar que “algunos enteros son negativos”, estamos afirmando que el resto son enteros positivos. Esto imposibilita que ambas proposiciones sean falsas.

En forma general se afirma que dos proposiciones particulares que tienen el mismo término sujeto y término predicado pero diferente cualidad son subcontrarias

Ejemplo 2

P: *algunos ingenieros de sistemas son matemáticos*
Q: *algunos ingenieros de sistemas no son matemáticos*

Las proposiciones **P** y **Q** pueden ser las dos verdaderas, pero no pueden ser las dos falsas, por lo tanto se dice que son subcontrarias.

------------------Nemotectnia-----------------

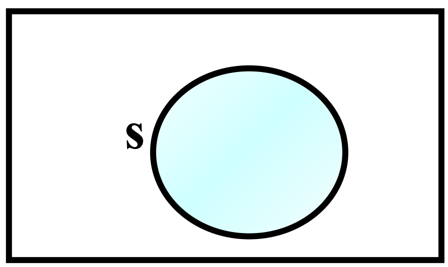
contrarias = ambas pueden ser falsas
subcontrarias = ambas pueden ser verdaderas
contradictorias = cuando una es verdadera **necesariamente** la otra es falsa y viceversa.

Símbolo y diagramas para proposiciones categóricas

Como la interpretación de las proposiciones categóricas depende fundamentalmente de la noción de una **clase vacía**, se utiliza el cero **(0)** para representar este hecho y para simbolizar que la clase determinada por **S** no tiene miembros, se utiliza la ecuación **S = 0.**

Cuando se afirma que la clase **S si tiene elementos**, equivale a negar que **S** es vacía, por lo tanto su representación simbólica es **S ≠ 0.**

Las proposiciones categóricas se pueden representar gráficamente diagramando las clases a las que pertenecen, de tal forma que el diagrama es de una clase, no de una proposición, para realizar esta representación se utiliza un círculo marcado con el término que designa la clase, por ejemplo la clase **S** sé grafica así:

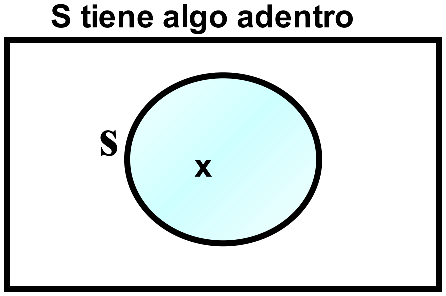


Clase S

Para diagramar la proposición de que **S** no tiene miembros, o de que no hay **S**, se sombrea todo el círculo que representa **S**, lo cual indica que no contiene nada, que es vacía, y, para graficar la proposición que existen **S**, que se interpreta en el sentido de que hay por lo menos un miembro de la clase **S**, se coloca una **x** en cualquier parte en el interior del círculo que representa a **S**, lo cual indica que sí hay algo dentro de él, que no está vacío.

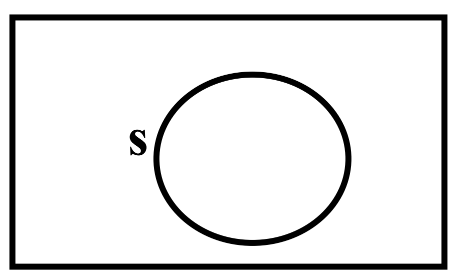
A continuación se representa gráficamente las proposiciones "**No hay S**" y "**Hay S**".

S tiene algo adentro



S ≠ 0.
Hay S

S no tiene miembros

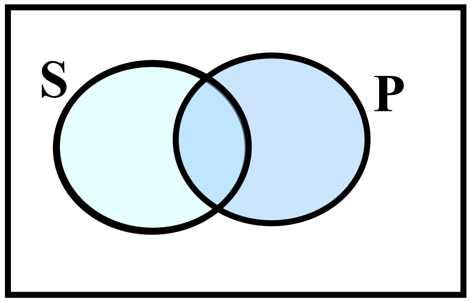


S = 0.
No hay S

Se puede observar que el círculo que representa la clase **S** también representará la clase de su complemento, **$\overline{S}$**, es decir, si en el interior del círculo se representa a todos los miembros de **S**, entonces, su exterior representará todos los miembros que no están en **S**, por lo tanto están en **$\overline{S}$.**

Representación de una proposición categórica:

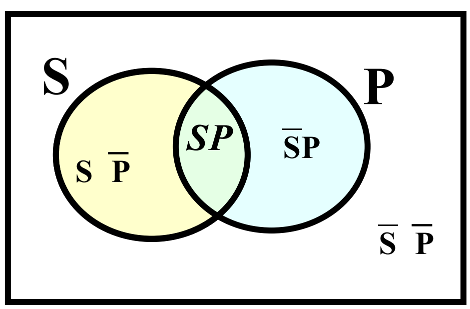
Para representar una proposición categórica en forma estándar se necesitan dos círculos intersecados. Si **S y P** representan los sujetos y predicados de la proposición, entonces su representación es:



clases S y P

La figura representa las dos clases **S** y **P**, pero no diagrama alguna proposición de ellas, no afirma ni niega que una de las dos o las dos clases tengan miembros. La parte del círculo **S** que esta fuera de **P** representa todos los **S** que no son **P**, lo cual se identificará como el producto de las clases **S** y **$\overline{P}$** (**S $\overline{P}$**); la parte común de los dos círculos representa la intersección o producto de las dos clases **SP**; la parte del círculo **P** que esta fuera de **S** representa a todos los **P** que no están en **S** (por lo tanto están en **$\overline{S}$**), es decir, el producto **$\overline{S}$P**, y la parte externa a los dos círculos representa todas las proposiciones que no están en **S** ni en **P**, lo cual corresponde a la cuarta clase **$\overline{S}$ $\overline{P}$**.

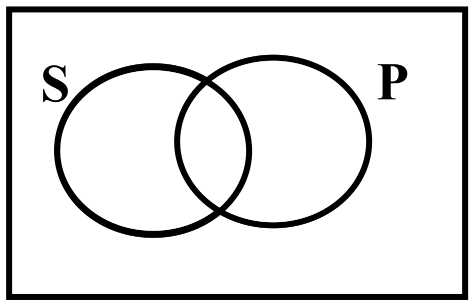
Lo anterior permite representar la figura No. 3 de la siguiente manera:



Clases S y P

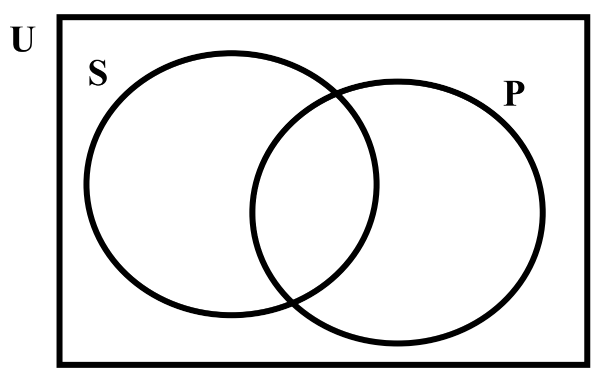
Para representar las cuatro proposiciones categóricas de forma estándar se sombrea o se inserta **x** en varias partes de la gráfica, a continuación se presenta cada uno de los casos:

1. **Todo S es P**, simbolizada por $\mathbf{S\ \bar{P} = 0}$, su representación gráfica es:



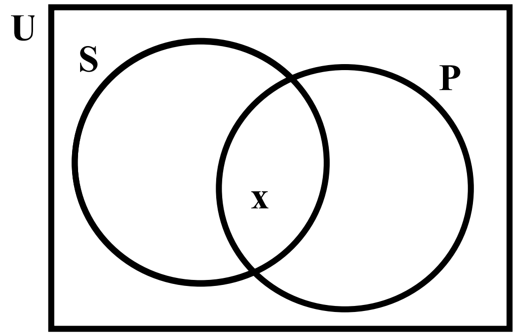
$S\ \bar{P} = 0$

2. **Ningún S es P**, o, **Ningún P es S** simbolizadas por **SP = 0** y **PS = 0**, respectivamente, la representación gráfica en ambos casos es:



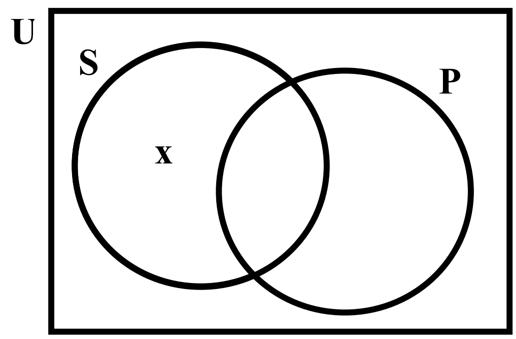
Ningún S es P, o,
Ningún P es S
SP = 0 v **PS = 0**.

3. **Algún S es P**, simbolizada por $\mathbf{SP \neq 0}$, su representación gráfica es:



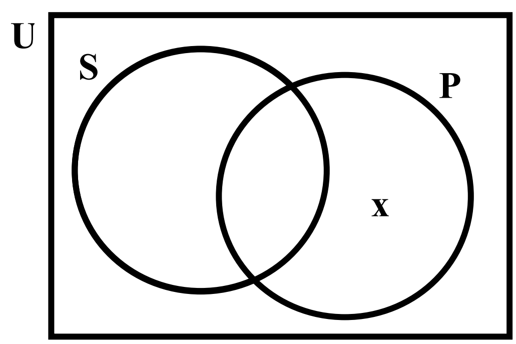
Algún S es P o
Algún P es S
$\mathbf{SP \neq 0 \; ; \; PS \neq 0 \; ;}$

4. **Algún S no es P**, simbolizada por $\mathbf{S\bar{P} \neq 0}$**,** su representación gráfica es:



Algún S no es P
$\mathbf{S\bar{P} \neq 0}$

En el caso **Algún P no es S**, simbolizada por $\mathbf{P\bar{S} \neq 0}$, su representación gráfica es:



Algún P no es S
$\mathbf{P\bar{S} \neq 0}$

Las siguientes son algunas observaciones acerca de las representaciones gráficas realizadas:

1. El diagrama simple de los dos círculos, sin otro tipo de marcas o indicaciones, representa clases pero no representa ninguna proposición.

2. Un espacio en blanco a la izquierda no significa nada (ni que una clase tiene o no tiene miembros).

3. Las proposiciones sólo las representan aquellos diagramas en los que una parte ha sido sombreada o en la que se ha insertado una **x**.

4. Los diagramas de Venn constituyen una representación de las proposiciones categóricas en forma estándar, en las cuales las inclusiones y exclusiones espaciales corresponden a inclusiones y exclusiones no espaciales de clases.

5. Proporcionan un método claro de notación y se constituyen en la base del método más simple y directo para probar la validez de los silogismos categóricos (Ver siguiente capítulo).

Capítulo 4

Deducción

$(G \vee H) \rightarrow (J \wedge K)$	
G	$/ \therefore J$
$G \vee H$	2, Ad.
$J \wedge K$	1,3, M. P
J	4, Simp.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Inferir una conclusión a partir de dos o más premisas
2. Utilizar las reglas de inferencia para establecer la validez o invalidez de un argumento.

OBJETIVO GENERAL

Utilizar el método deductivo como una forma de razonamiento mediante el cual se puede establecer un principio general a partir de casos particulares.

OBJETIVOS

1. Identificar y clasificar las proposiciones categóricas de un argumento
2. Diferenciar la cualidad y cantidad de una proposición categórica en forma estándar.
3. Establecer el tipo de oposición que se puede presentar entre dos proposiciones categóricas
4. Representar gráficamente proposiciones categóricas de forma estándar

INTRODUCCIÓN

Razonar es un proceso por el cual se establece una conclusión basada en una o más proposiciones supuestas o aceptadas, llamadas premisas, las cuales constituyen el punto de partida del proceso. Si la conclusión es correcta significa que las premisas contienen la información necesaria y suficiente para establecer la conclusión y por lo tanto se puede afirmar que el razonamiento es correcto, de lo contrario, se dirá que es incorrecto.

Todos los seres humanos tenemos la capacidad del raciocinio; una operación del pensamiento, la más elevada, en la cual se enlazan ideas y fluyen otras, permitiendo así la comunicación con el exterior.

Se ha dicho que la lógica es la ciencia que estudia la estructura o forma del pensamiento, por lo cual no es difícil comprender que hay varias formas de pensamientos, más aún, existen varias formas de razonar, deductivamente o inductivamente. Cuando se hace un estudio lógico del razonamiento, es conveniente tener presente algún modelo con el que puedan compararse algunas otras especies de razonamiento; la tarea del lógico es explicar las diferencias entre un cierto modo de razonar y el modelo escogido, el modelo que habitualmente se adopta consciente o inconscientemente para comparar con él todas las otras clases de razonamiento, es la deducción simple, en la cual se pueden identificar las premisas y una conclusión y se puede formular una regla según la cual, la conclusión se sigue de las premisas.

En el presente capítulo se estudiará el método deductivo, este se puede definir como el proceso del pensamiento mediante el cual con base en experiencias, se establece un principio general, el que tendrá validez no sólo para los casos observados, sino también para todos los de su especie.

El método científico

El método científico consiste en el conjunto de procedimientos para obtener un conocimiento que sea universal y, en principio, reproducible por cualquiera.

Desde los inicios de la Modernidad, el conocimiento científico en las ciencias naturales y exactas ha estado ligado a la observación sistemática y a la formulación de dicha observación mediante ecuaciones matemáticas, la llamada matematización de la ciencia, que garantiza tanto su explicación como su factibilidad.

Desde el punto de vista de los positivistas, el primer paso en cualquier investigación es la observación, una vez que se ejecuta la observación, surgen una o más preguntas, generadas por la curiosidad del observador, luego, el observador, mediante razonamiento inductivo, trata de dar una o más respuestas lógicas a las preguntas, cada solución tentativa preliminar a estas preguntas, son las hipótesis. Después de que ha enunciado una o más hipótesis, o explicaciones propuestas, el investigador elabora una o más predicciones, las cuales deben ser consistentes con las observaciones e hipótesis. Para hacer esto, el investigador usa el razonamiento deductivo. Enseguida, las predicciones son sometidas a pruebas sistemáticas para comprobar su ocurrencia en el futuro. Estas comprobaciones en conjunto reciben el nombre de experimentación. Cuándo la hipótesis se verifica, entonces se procesa la declaración final, que en ciencias se llama teoría que solo es válida para un tiempo y un lugar determinados. Si la teoría se verificara como verdadera en todo tiempo y lugar, entonces es considerada como ley.

Cosa distinta es la ciencia social. Aquí la reproducibilidad y la explicación son débiles o imposibles. En ellas se trata, no tanto de explicar como de comprender, en cuanto lo que se hace es una lectura de sistemas simbólicos, que son susceptibles de distintas interprepataciones, tanto desde las características mismas del científico, como de la época en la cual él está haciendo su trabajo.

Karl Popper, en la lógica del conocimiento científico, discutió con los positivistas sobre el carácter de la observación y el modelo inductivo de la ciencia. En efecto, aquellos pensaban que la ciencia comienza con la observación y de allí se hace una inducción para obtener una ley general. Popper, en cambio, señala que la ciencia comienza con una hipótesis que debe intentar falsarse (de ahí que su teoría se llame el falsacionismo), es decir, refutarse.

En la ciencia no se trata tanto de verificar como de que las teorías resistan los intentos de ser refutadas. Y para ello las teorías científicas deben ser escritas en encunciados universales, que pueden refutarse mediante contraejemplo, y no de enunciados existenciales. Hagamos una ilustración; de la observación de los cuervos, alguien puede afirmar que existen cuervos negros. Pero ese enunciado no es falsable. En Cambio si alguien dice ‘Todos los cuervos son negros’ y alguien encuentra un cuervo de otro color, el enunciado resultó falsable. Por eso hay que escribir la ciencia en enunciados universales, que sean susceptibles de ser refutados.

Mientras una teoría resista los intentos de ser refutada, se dice que es el paradigma científico vigente. Todos los problemas de su campo de conocimiento se resuelven según establecen las leyes de la teoría, pero cuando esta es refutada, aparece un paradigma nuevo, que toma el papel del anterior, y así sucesivamente. Eso sucedió con la física toloméica, que fue refutada por la física galileana, que fue mejorada por la newtoniana, que a su vez, fue rebatida, en sus fundamentos, por la física de la relatividad de Einstein.

Una explicación científica tiene la forma: un hecho se explica dentro de una ley científica que es una ecuación matemática. Así, el movimiento de un planeta se explica por la ecuación que describe su movimiento. Ella explica ese movimiento. Pero la explicación también sirve para la predicción porque la ecuación que sirve para describir también sirve para calcular en que lugar se encontrará ese planeta en un momento T cualquiera.

Para Popper su método sirve para superar el dilema entre explicar, en ciencias naturales, y comprender, en ciencias sociales. Porque explicar es comprender. Pero a diferencia de las ciencias naturales, la ciencias sociales no son susceptibles de matematización: nadie puede calcular los movimientos sociales ni las acciones de las personas, porque éstas son voluntarias, distintas, en consecuencia, a los movimientos físicos.

La comprensión, que como se dijo, refiere a sistemas simbólicos, como las culturas y las sociedades, es lo propio de las ciencias sociales. Aquí no hay una explicación distinta a la comprensión de un sistema simbólico y estas comprensiones se hacen en ‘horizontes de comprensión que dependen del científico y su época. Por eso las ciencias sociales no son neutrales, ni existe la objetividad del investigador social, porque el lee los hechos sociales desde su formación, desde su propia personalidad y desde lo que sabe su época. Este es el `punto distintivo central entre las ciencias naturales y las ciencias sociales. Por eso no hay una sola sociología, sino distintas escuelas sociológicas, ni una antropología, sino escuelas distintas, ni una pedagogía sino múltiples escuelas de pensamiento sobre la enseñanza.

Bibliografía:

Gadamer, Hans Georg. Verdad y Método. Editorial Sígueme, salamanca, 1972
Monsalve, Alfonso. La Teoría de la Argumentación. Editorial Universidad de Antioquia, 1982
Popper, Karl. La Lógica de la Investigación Científica. Tecnos, Madrid, 1962
___________. La Miseria del Historicismo. Tecnos, Madrid, 1975.

Silogismos categóricos
Un **silogismo** es un argumento deductivo en el que se infiere una conclusión a partir de dos premisas. Un silogismo categórico es un argumento deductivo consistente en tres proposiciones categóricas que contienen exactamente tres términos, cada uno de los cuales sólo aparece en dos de las proposiciones que lo constituyen. Dos de las proposiciones reciben el nombre de premisas y la otra se llama conclusión.

Forma estándar de un silogismo categórico
Se dice que un silogismo categórico está en **forma estándar** cuando satisface las siguientes condiciones:

1. Las premisas y conclusión son proposiciones categóricas que conservan el siguiente orden:

    1. **la premisa mayor se enuncia primero, luego**
    2. **la premisa menor y**
    3. **al final la conclusión.**

2. La conclusión de un silogismo de forma estándar es una proposición de forma estándar que contiene dos de los tres términos del silogismo.

3. La premisa mayor es aquella que contiene el término mayor y este es el que aparece como predicado de la conclusión.

4. La premisa menor es aquella que contiene el término menor, que es el correspondiente al sujeto de la conclusión.

5. Los términos mayor y menor aparecen, cada uno, en una premisa diferente.

Ejemplo 1
Dadas las premisas:

Ningún héroe es cobarde
Algunos soldados son cobardes

Y la conclusión: *por lo tanto, algunos soldados no son héroes*

Se puede observar claramente que el argumento deductivo es un silogismo categórico porque consiste en tres proposiciones categóricas (dos premisas y una conclusión) que contienen exactamente tres términos (héroe, cobarde y soldado).

Para saber si el silogismo categórico está en forma estándar, es necesario identificar el término mayor, el término menor, premisa mayor, premisa menor y analizar la conclusión.

En este caso el predicado de la conclusión es **héroe**, que constituye el término mayor, y por consiguiente la premisa mayor es: **ningún héroe es cobarde**; el sujeto de la conclusión es **soldado** que es el término menor, por lo tanto la premisa menor es: **algunos soldados son cobardes**, además, la conclusión tiene dos de los tres términos del silogismo: **soldados** y **héroes**, los términos mayor y menor aparecen, cada uno, en una premisa diferente, por consiguiente se puede establecer que este es un ejemplo de silogismo categórico en forma estándar, también aparece el término **cobardes** el cual se denomina término medio.

Ejemplo 2
Teniendo en cuenta el siguiente argumento deductivo, identificar la conclusión, establecer la naturaleza del silogismo y verificar sí esta en forma estándar.

Ningún submarino nuclear es un navío comercial, así, ningún barco de guerra es un navío comercial, puesto que todos los submarinos nucleares son barcos de guerra.

Como el argumento deductivo está formado por tres proposiciones categóricas que contienen exactamente los tres términos: submarino nuclear, navío comercial y barcos de guerra, se puede afirmar que se trata de un silogismo categórico.

La conclusión se identifica como la proposición:

ningún barco de guerra es un navío comercial.

Y las premisas como las proposiciones:

ningún submarino nuclear es un navío comercial y
todos los submarinos nucleares son barcos de guerra.

El predicado de la conclusión es el término **navío comercial**, el cual se constituye en el término mayor y por consiguiente la premisa mayor es, **ningún submarino nuclear es un navío comercial**.

El sujeto de la conclusión es **barco de guerra**, el cual se constituye en el término menor y por consiguiente la premisa menor es, **todos los submarinos nucleares son barcos de guerra**.

El análisis anterior permite afirmar que es un silogismo categórico en forma estándar el cual se puede escribir así:

Premisa mayor: ningún submarino nuclear es un navío comercial
Premisa menor: todos los submarinos nucleares son barcos de guerra
Conclusión: Por lo tanto ningún barco de guerra es un navío comercial

Ejemplo 3
Teniendo en cuenta el siguiente argumento deductivo, identificar la conclusión, establecer la naturaleza del silogismo y verificar si está en forma estándar.

> *Todos los satélites artificiales son descubrimientos científicos importantes; por lo tanto, algunos descubrimientos científicos importantes no son inventos norteamericanos puesto que algunos satélites artificiales no son norteamericanos.*

El argumento deductivo está formado por tres proposiciones categóricas que contienen los términos: satélites artificiales, descubrimientos científicos, inventos norteamericanos, por lo tanto se puede afirmar que se trata de un silogismo categórico.

Las premisas son:
Todos los satélites artificiales son descubrimientos científicos importantes, algunos satélites artificiales no son norteamericanos.

La conclusión es:
Algunos descubrimientos científicos importantes no son inventos norteamericanos.

El predicado de la conclusión es el término invento norteamericano, el cual se constituye en el término mayor y por consiguiente, la premisa mayor es, algunos satélites artificiales no son norteamericanos.

El sujeto de la conclusión es descubrimientos científicos, el cual se constituye en el término menor y por consiguiente la premisa menor es, todos los satélites artificiales son descubrimientos científicos.

Teniendo en cuenta el análisis anterior, se puede afirmar que es un silogismo categórico en forma estándar, el cual se puede escribir así.

Premisa mayor: algunos satélites artificiales no son norteamericanos
Premisa menor: todos los satélites artificiales son descubrimientos científicos
Conclusión: algunos descubrimientos científicos importantes no son inventos norteamericanos.

-- Nemotecnia ---------------------------------

Forma Estándar de un silogismo categórico

Sigue el siguiente protocolo y lograrás el objetivo....no olvides divertirte:

1. Identifica los tres términos
2. Separa las premisas de la conclusión
3. Analiza la conclusión obteniendo de esta el Sujeto y el Predicado
4. Identifica la premisa Mayor, y la premisa menor
5. Identifica el término medio.

Las premisas
Primera premisa: Solo esta premisa contiene el término mayor
Segunda premisa: Solo esta premisa contiene el término menor
Existe un término medio que aparece en las dos premisas

La conclusión: -Contiene 2 de los 3 términos de la siguiente manera:	
Para identificar cual es la premisa mayor busca el predicado de la conclusión y observa en cual de las dos premisas aparece este.	
Término Mayor	Predicado de la conclusión
Término menor	Sujeto de la conclusión

Argumento deductivo
Un argumento en el cual las premisas involucradas proporcionan bases concluyentes para la verdad de la conclusión, se llama **argumento deductivo.**

Consiste en deducir su conclusión a partir de sus premisas, mediante una serie de argumentos elementales, cada uno de los cuales se conoce y acepta como válido

Argumento Válido
Un argumento que sigue una regla bien establecida se dice que es válido; los argumentos se juzgan como aceptables o inaceptables en la medida en que sean válidos.

Validez o invalidez de un argumento
Para probar la validez o invalidez de un argumento, se utiliza un método basado en el hecho de que éstas son características puramente formales de los argumentos, es decir, que dos argumentos que tienen exactamente la misma forma; son válidos o inválidos, independientemente de las diferencias del tema que traten.

Específicamente, para probar la invalidez de un argumento, basta con formular otro argumento que tenga exactamente la misma forma y tenga premisas verdaderas y conclusión falsa

Validez de un argumento
En teoría, las tablas de verdad son apropiadas para probar la validez de un argumento de tipo general, pero en la práctica son cada vez más difíciles de manejar a medida que aumenta el número de enunciados o proposiciones que conforman dicho argumento. Un método más eficiente para probar la validez de un argumento extenso consiste en deducir su conclusión a partir de sus premisas, mediante una serie de argumentos elementales, cada uno de los cuales se conoce y acepta como válido, este proceso es el que se denomina método deductivo.

Prueba formal de validez
Se define una **prueba formal** que un argumento determinado es válido, como una sucesión de enunciados, cada uno de los cuales, o es una premisa del razonamiento dado, o, se deduce de los enunciados precedentes mediante un argumento válido elemental, de tal forma que el último enunciado o proposición constituye la conclusión del argumento cuya validez se quiere demostrar.

Se define un **argumento válido elemental**, como un argumento que se puede interpretar como el proceso de sustituir enunciados o proposiciones en lugar de variables enunciativas.

Prueba de invalidez

Es obvio que, para un argumento inválido no existe una prueba formal de validez. Pero, si no se puede hallar una prueba de validez para un argumento, eso no quiere decir que sea inválido y que no se pueda construir dicha prueba.

A continuación se describe un método que está muy relacionado con el de las tablas de verdad, pero que es mucho más breve, en el cual se prueba la invalidez de un argumento hallando un único caso en el que se asignan valores de verdad a las variables del enunciado de tal forma que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, lo que lleva a concluir que la forma argumental es inválida.

Ejemplo 1

Probar la invalidez del siguiente argumento por el método de asignar valores de verdad.

1. $\mathbf{f \rightarrow r}$
2. $\mathbf{p \rightarrow r}$
3. $\mathbf{\therefore f \rightarrow p}$

Para probar que este argumento es inválido sin tener que construir una tabla de verdad completa, es necesario tener claro que un condicional es falso solamente si su antecedente es verdadero y su consecuente falso, utilizando este hecho se procede a asignar valores de verdad a las proposiciones de la conclusión, es decir, si **F** es verdadero y **P** es falso, entonces, la conclusión es falsa. Si a la proposición **R** se le asigna el valor verdadero, ambas premisas se convierten en verdaderas, porque un condicional es verdadero siempre que su consecuente sea verdadero. Lo anterior permite afirmar que si a las proposiciones **F** y **R** se les asigna un valor verdadero y a la proposición **P** un valor falso, entonces el argumento tendrá premisas verdaderas y una conclusión falsa, con lo cual queda probado que el argumento es inválido.

Con este método lo que realmente se hace es construir un renglón de la tabla de verdad del argumento indicado, la relación se puede observar más claramente cuando los valores de verdad se escriben horizontalmente, de la siguiente forma:

-------- Nemotecnia------

PREMISAS VERDADERAS				**CONCLUSIÓN FALSA**	
f	**r**	**p**	$\mathbf{f \rightarrow r}$	$\mathbf{p \rightarrow r}$	$\mathbf{f \rightarrow p}$
verdadero	verdadero	falso	verdadero	verdadero	falso

Argumento Invalido
Un argumento se prueba inválido mostrando que por lo menos en un renglón de su tabla de verdad todas las premisas son verdaderas pero su conclusión es falsa.

Ejemplo 2.
Si Sandra es inteligente y estudia mucho, sacará buenas calificaciones y aprobará el curso. Si Sandra estudia mucho pero no es inteligente, sus esfuerzos serán apreciados y si sus esfuerzos son apreciados, aprobará el curso. Si Sandra es inteligente, entonces estudia mucho. Luego, Sandra aprobará el curso.

Tomando el siguiente lenguaje simbólico

I: Sandra es inteligente
S: Sandra estudia mucho
G: Sandra sacará buenas calificaciones
P: Sandra aprobará el curso
A: los esfuerzos de Sandra serán apreciados

Se pueden establecer las siguientes premisas:

1. $(i \wedge s) \to (g \wedge p)$
2. $[(s \wedge \sim i) \to t\,] \wedge [t \to p]$
3. $i \to s$
4. $\therefore$ **p**

Este argumento es inválido porque con cualquiera de las siguientes asignaciones de valores de verdad la conclusión **P** es falsa.

i	s	g	t	**p**
F	F	V	F	**F**

ó

i	s	g	t	**p**
F	F	F	F	**F**

Ejemplo 3
Si la inflación continua, entonces las tasas de interés permanecerán altas. Si la inflación continúa, entonces si las tasas de interés permanecen altas, descenderá la actividad comercial. Si las tasas de interés permanecen altas, entonces si la actividad comercial decrece, el desempleo aumenta. Así, si el desempleo aumenta, continuará la inflación.

Tomando el siguiente lenguaje simbólico:

P: la inflación continúa
Q: las tasas de interés permanecen altas
R: descenderá la actividad comercial
S: el desempleo aumenta

Se pueden establecer las siguientes premisas:

1. $p \to q$
2. $p \to (q \to r)$
3. $q \to (r \to s)$ / $\therefore$ $\mathbf{s \to p}$

Este argumento es inválido porque la siguiente asignación de valores de verdad hace las premisas verdaderas pero la conclusión falsa:

p	**q**	**r**	**s**	**$p \to q$**	**$p \to (q \to r)$**	**$q \to (r \to s)$**	**$s \to p$**
F	F	F	V	V	V	V	F

Inconsistencia

En algunos casos no se puede dar ninguna asignación de valores de verdad a los enunciados de un argumento que hagan verdaderas sus premisas y falsa su conclusión, entonces, en este caso el argumento debe ser válido.

Inferencias lógicas

Para definir las inferencias lógicas es necesario precisar algunos conceptos tales como razonamiento y demostración.

Razonamiento es el proceso que se realiza para obtener una demostración.
Demostración es el encadenamiento de proposiciones que permiten obtener otra proposición, llamada conclusión, a partir de ciertas proposiciones iniciales supuestas como verdaderas, que reciben el nombre de premisas. En la sección

se hará un análisis más detallado de la demostración.

Las inferencias lógicas: son las conclusiones que se pueden obtener después de realizar un razonamiento, este razonamiento solamente es verdadero si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Las premisas deben ser verdaderas.
2. Durante el proceso de deducción las premisas deben relacionarse sujetas a las leyes de la lógica.

Así, el conocimiento obtenido de proposiciones verdaderas preestablecidas (**premisas**), y aplicando las leyes de la lógica a esas premisas, se denomina **conclusión**.

A continuación se plantean algunas reglas de inferencia, se propone al estudiante, como ejercicio, probar su validez utilizando las tablas de verdad:

------ La clave --------

PONENS = PONER **TOLLENS = SACAR = NEGAR**

Reglas de inferencia:

A medida que vallas estudiando las reglas de inferencias encontrás que éstas son usadas continuamente en el lenguaje natural. Las usamos para obtener conclusiones que consideramos normalmente válidas. Lo que haremos ahora, es detenernos a analizar porqué consideramos a estas inferencias válidas, aprenderemos que al construir la tabla de verdad de la inferencia lógica se puede determinar la validez de la misma, a la vez que aprendes a identificar las diferentes inferencias lógicas en los razonamientos que hacemos continuamente.

Poder identificar una inferencia lógica y poder clasificarla como válida o no mediante la construcción de la tabla de verdad te dará las bases para elaborar argumentos sólidos, presentes en todas las actividades académicas ya sea en la elaboración de ensayos o debates, como en las actividades cotidianas.

Veamos la primera regla, denominada Modus Ponendo Ponens ó MPP, también llamada simplemente MP ó Modus Ponens, nombre que puedes leer como Modo Afirmando_ Afirmando, veamos:

1. Modus Ponens (M. P)

$$[\,(p \rightarrow q) \land p\,] \rightarrow q$$

¿Cómo interpretar esta ley?, observa el siguiente ejemplo:

Daniel escucha la siguiente afirmación **"Si llueve hace frío"**
En la siguiente "escena", Daniel observa llover, es decir **"llueve"**
¿Qué puede concluir Daniel? Que hará frío, es decir **"hace frío"**

Para obtener tan "obvia" conclusión, Daniel ha utilizado la más común de las inferencias lógicas, la cual denominaremos **MPP ó Modus Ponendo Ponens.**

En este ejemplo, las proposiciones simples son:

p = llueve
q = hace frío

Las proposiciones así declaradas, nos permiten expresar en lenguaje natural lo expresado en lenguaje simbólico así:

$p \rightarrow q$ = Si llueve hace frío

Así que nuestro ejemplo puede ser representado en el lenguaje simbólico de la siguiente manera:

$p \rightarrow q$	Se lee : **si p entonces q**
p	Se lee : **ocurre p**
$\therefore q$	Se lee : **de donde q**

Ejemplo:
Modus Ponens (M. P)
1-Si llueve hace frío
2-llueve
3-luego Hace frío

El símbolo $\therefore$(de donde) representa la conclusión de las premisas dadas; es decir que la conclusión, en este caso, es la proposición **q**

Ahora ya estamos listos para interpretar la regla de inferencia tal y como nos fue presentada en un comienzo, esto es:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

¿Cómo leer la regla de inferencia?

$p \rightarrow q$	**Si p entonces q**
$\wedge$ p	**y q** (y se da q, y ocurre q)
$\rightarrow$ q	**Entonces q** (en conclusión q)

Es decir que **$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$** puede ser leído como **"Si p entonces q y se ocurre p, luego ocurre q"**

La magia del asunto radica en que mediante la aplicación de lo que ya has aprendido en el capítulo de conectivos lógicos podemos determinar la validez de la inferencia lógica Modus Ponen mediante la construcción de la tabla de verdad, de la cual esperamos obtener una tautología.

¿Cómo puede decirnos la lógica que estamos argumentando bien? ¿Cómo puede la lógica mediante una tabla de verdad demostrarnos que estamos usando una inferencia lógica correcta o incorrecta?

Tabla de verdad para la inferencia lógica MPP:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
F	F	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Observa que efectivamente hemos obtenido una tautología, es decir, la inferencia lógica que estamos utilizando es correcta.
A continuación se presentan nueve reglas de inferencia. En el lado izquierdo se enuncia la regla de inferencia y en el lado derecho se propone una aplicación de la ley de inferencia en el lenguaje natural:

---

2. Modus Tollens (M. T)

$p \rightarrow q$	Se lee : **si p entonces q**
$\sim q$	Se lee : **ocurre ~q**
$\therefore \sim p$	Se lee : **de donde ~p**

Ejemplo:

Modus Tollens (M. T)
Si llueve hace frío
no hace frío
luego no llovió

---

3. Silogismo Hipotético (S: H)

$p \rightarrow q$	Se lee : **si p entonces q**
$q \rightarrow r$	Se lee : **si q entonces r**
$\therefore\ p \rightarrow r$	Se lee : **de donde si p entonces r**

Ejemplo:

Silogismo Hipotético (S: H)
Si llueve hace frío
Si hace frío llevo un abrigo
luego si llueve llevo un abrigo

---

4. Silogismo disyuntivo (S. D)

$p \vee q$
$\sim p$
$\therefore q$

Ejemplo:

Silogismo disyuntivo (S. D)
Cae Cara o Sello
No cayó sello
luego cayó cara.

---

5. Dilema constructivo (D.C)

$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$
$p \vee r$
$\therefore q \vee s$

Ejemplo:

Dilema constructivo (D.C)
Si estudio aprendo y si duermo descanso.
Estudié o dormí.

---

6. Absorción (Abs.)

$p \rightarrow q$
$\therefore p \rightarrow (q \wedge p)$

Absorción (Abs.)
Si estudio aprendo
Estudio, luego aprendo y estudio

---

7. Simplificación (Simp.)

$p \wedge q$
$\therefore p$

Simplificación (Simp.)
Estudio y aprendo
Luego, estudio

---

8. Conjunción (Conj.)

p
q
$\therefore p \wedge q$

Conjunción (Conj.)
Estudio
Trabajo
Luego, etudio y trabajo

---

9. Adición (Ad.)

p
$\therefore p \vee q$

Adición (Ad.)
Estudio
Luego, etudio ó trabajo

A continuación se estudian más afondo las cuatro reglas de inferencia más comunes, las cuales corresponden a los argumentos elementales y cuya validez se puede establecer por medio de las tablas de verdad:

Modus Ponendo Ponens (MPP)

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

Modus Tollendo Tollens (MTT)

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

Modus Tollendo Ponens (MTP)

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q \qquad \text{o}$$
$$[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$$

Silogismo Hipotético (SH)

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Modus Ponendo Ponens (MPP)

Este método de inferencia establece que si una implicación es cierta y además también lo es su antecedente, entonces su consecuente es necesariamente verdadero; de forma simbólica esto se expresa así:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

Ejemplo 1.

Premisa 1: Si Julián estudia Ingeniería de sistemas a distancia, entonces él estudia en la UNAD.

Premisa 2: Julián estudia Ingeniería de sistemas a distancia.

Conclusión: Julián estudia en la UNAD.

Simbólicamente, el ejemplo 1 se expresa así:

Si

p: Julián estudia Ingeniería de Sistemas a Distancia

q: Él estudia en la UNAD.

Procedemos ahora a utilizar el lenguaje simbólico definido, así:

Premisa 1: $\mathbf{p \rightarrow q}$

Premisa 2: $\mathbf{p}$

Conclusión: $\mathbf{q}$

Ejemplo 2.

Premisa 1: Si $x + y = z$, entonces, $y + x = z$.

Premisa 2: $x + y = z$

Conclusión: $y + x = z$

Simbólicamente, si **p**: $x + y = z$

q: $y + x = z$

Entonces: Premisa 1: $p \rightarrow q$

Premisa 2: p

Conclusión: q

Ejemplo 3.

Premisa 1: $\sim p \rightarrow s$

Premisa 2: $\sim p$

Conclusión: s

Ejemplo 4.

Premisa 1: $\sim r \rightarrow \sim t \wedge s$

Premisa 2 : $\sim r$

Conclusión: $\sim t \wedge s$

Modus Tollendo Tollens (MTT)

Esta regla de inferencia dice que si una implicación es verdadera y su consecuente es falso, entonces su antecedente será necesariamente falso; simbólicamente se expresa así:

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

Ejemplo 1

Premisa 1: Si un ángulo de un triángulo es mayor de 90º, entonces la suma de los otros dos ángulos es menor de 90º.
Premisa 2: La suma de los otros dos ángulos no es menor de 90º.
Conclusión: Un ángulo de un triángulo no es mayor de 90º.

Simbólicamente:
p: Un ángulo de un triángulo es mayor de 90º.
q: La suma de los otros dos ángulos es menor de 90º.

Premisa 1: $p \rightarrow q$
Premisa 2: $\sim q$
Conclusión: $\sim p$

Ejemplo 2

Deducir una conclusión del siguiente conjunto de premisas.

Premisa 1: $q \rightarrow \sim r$
Premisa 2: $\sim (\sim r)$
Conclusión: $\sim q$.

Ejemplo 3.

Premisa 1: $p \vee q \rightarrow r$
Premisa 2: $\sim r$
Conclusión: $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ D' Morgan.

Ejemplo 4.

Demostrar que la conclusión es consecuencia de las premisas dadas.

Premisa 1: $\sim b$
Premisa 2: $a \rightarrow b$
Premisa 3: $\sim a \rightarrow c$. Demostrar **c**.

Premisa 4: De la premisa 2 y de la premisa 1, $[(a \rightarrow b) \wedge \sim b]$ se puede concluir **~a** por el **MTT**.

Premisa 5. De las premisas 3 y 4, $[(\sim a \rightarrow c) \wedge \sim a]$ se puede concluir la proposición **c** por el **MPP**.

Modus Tollendo Ponens (MTP)

Esta ley se enuncia así:
Si una disyunción es verdadera y una de sus proposiciones simples es falsa, entonces necesariamente la otra proposición será verdadera. Simbólicamente se escribe así:

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q \quad \text{o} \quad [(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$$

Ejemplo 1

Premisa 1: O la energía interna de un átomo puede cambiar con continuidad o cambia sólo a saltos.
Premisa 2: La energía interna de un átomo no puede cambiar con continuidad
Conclusión: La energía interna de un átomo cambia sólo a saltos.

Simbólicamente
p: La energía de un átomo puede cambiar con continuidad
q: La energía de un átomo sólo cambia a saltos
Premisa 1: $p \vee q$
Premisa 2: $\sim p$
Conclusión: Q.

Ejemplo 2

Premisa 1: $\sim q \vee r$
Premisa 2: $\sim r$
Conclusión: $\sim q$

Ejemplo 3

Premisa 1: $(s \wedge t) \vee r$
Premisa 2: $\sim (s \wedge t)$
Conclusión: r

Ejemplo 4.

Demostrar que la conclusión es consecuencia de las premisas dadas.
Premisa 1: $\sim q \vee s$
Premisa 2: $\sim s$
Premisa 3. $\sim (r \wedge s) \rightarrow q$. **Demostrar:** $r \wedge s$

Premisa 4: De las premisas 1 y 2 se puede concluir **$\sim q$** por **MTP**
Premisa 5: De las premisas 3 y 4 se puede concluir **$\sim (\sim (r \wedge s))$** por **MTT**, que es equivalente a **$r \wedge s$** por la ley de la doble negación.

Silogismo Hipotético (SH)

Es un argumento que se expresa simbólicamente así:

$$[(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Ejemplo 1.

Premisa 1. Si el agua se hiela, entonces sus moléculas forman cristales.
Premisa 2. Si las moléculas forman cristales, entonces el agua aumenta de volumen.
Conclusión. Si el agua se hiela, entonces el agua aumenta de volumen.

Simbólicamente
Sean las proposiciones p: El agua se hiela
q: Sus moléculas forman cristales
r: El agua aumenta de volumen

Premisa 1. $p \rightarrow q$
Premisa 2. $q \rightarrow r$
Conclusión. $p \rightarrow r$

Ejemplo 2
Premisa 1. $q \rightarrow \sim p$
Premisa 2. $\sim p \rightarrow r$
Conclusión. $q \rightarrow r$

Ejemplo 3
Premisa 1. $s \vee t \rightarrow r \vee q$
Premisa 2. $r \vee q \rightarrow \sim p$
Conclusión. $s \vee t \rightarrow \sim p$

Ejemplo 4.
A partir de las premisas dadas indicar la demostración de la conclusión.

Premisa 1: $\sim r$
Premisa 2: $\sim p \rightarrow q$
Premisa 3: $q \rightarrow r$ Demostrar **p**

Premisa 4: De las premisas 2 y 3 se concluye **$\sim p \rightarrow r$** por **SH**
Premisa 5: De las premisas 1 y 5 se concluye **p** por **MTT**.

Ejemplos de aplicación de las leyes de inferencia:

Ejemplo 1

En el siguiente ejercicio se propone un ejemplo de construcción de una prueba de validez:

Si gana Gloria o Héctor, entonces pierden tanto Jorge como Kelly. Gloria gana. Por lo tanto, pierde Jorge.

Para analizar y construir la prueba de validez, es necesario utilizar un lenguaje simbólico que permita simplificar los enunciados, así:

Identificación de las premisas:

G = Gloria gana
H = Héctor gana
J = Jorge pierde
K = Kelly pierde

Por lo tanto la prueba de validez será:

1. $(G \vee H) \rightarrow (J \wedge K)$
2. **G**

$\therefore$ **J** (Se lee: de donde **J, J** es la premisa que esperamos demostrar).

---

3. $G \vee H$ **2, Ad.** (por Adición en **2**) Necesitamos llegar a **J** desde la **G**, observamos que para llegar a la **J** se requiere **G v H**, como sólo tengo la **G**, adiciono **H**. Por lo tanto aplico la ley de Adición en la premisa **2,** lo que se escribe **2, Ad.** (Ad indica que apliqué la ley de adición)

4. $J \wedge K$ **1,3 M. P** **J** $\wedge$ **K** es la consecuencia de **G** $\vee$ **H** aplicando la ley de inferencia **MP** (Modus Ponendo Ponens) con las premisas 1 y 3.

5. J **4, Simp.** Tenemos $J \wedge K$, pero solo

nos intereza la J, por lo tanto simplificamos. Aplicando la ley de inferencia de simplificación en la premisa 4.

Ejemplo 2
Si sigue lloviendo, entonces el río crecerá. Si sigue lloviendo. Si sigue lloviendo y el río crece, entonces el puente será arrastrado por las aguas. Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado por las aguas, entonces no será suficiente un solo camino para toda la ciudad. O bien un solo camino es suficiente para toda la ciudad o bien los ingenieros han cometido un error. Por tanto, los ingenieros han cometido un error.

Utilizando el siguiente lenguaje simbólico:

C: continúa lloviendo
R: el río crece
P: el puente es arrastrado por las aguas
S: un solo camino es suficiente para toda la ciudad
E: los ingenieros han cometido un error

La prueba formal de validez es:

1.	$C \rightarrow R$	
2.	$(C \wedge R) \rightarrow P$	
3.	$(C \rightarrow P) \rightarrow \sim S$	
4.	$S \vee E$	**/ ∴ M**
5.	$C \rightarrow (C \wedge R)$	**1, Abs.**
6.	$C \rightarrow P$	**5,2, S. H.**
7.	$\sim S$	**3,6, M. P.**
8.	E	**4,7, D. C.**

Ejemplo 3

Si un hombre se orienta siempre por su sentido del deber, tiene que renunciar al goce de muchos placeres, y si se guía siempre por su deseo de placer, a menudo olvidará su deber. O bien un hombre se guía siempre por su sentido del deber, o bien siempre se orienta por su deseo de placer. Si un hombre se guía siempre por su sentido del deber, no descuidará a menudo su deber, y si siempre se guía por su deseo de placer, no renunciará al goce de muchos placeres. Luego, un hombre debe renunciar al goce de muchos placeres si y sólo si no descuida a menudo su deber.

Tomando el siguiente lenguaje formal:

P: se orienta por su sentido del deber
Q: renuncia al goce de placeres
R: se guía por su deseo de placer
S: olvidará su deber

Las premisas quedan así:

1. $P \rightarrow Q$
2. $R \rightarrow S$
3. $P \vee R$
4. $P \rightarrow \sim S$
5. $R \rightarrow \sim Q$ **$/ \therefore\ Q \leftrightarrow \sim S$**

Ejemplo 4
Si no ocurre, que si un objeto flota en el agua entonces es menos denso que el agua, entonces se puede caminar sobre el agua. Pero no se puede caminar sobre el agua.
Si un objeto es menos denso que el agua, entonces puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso.

Si puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso, entonces el objeto flotará en el agua.

Por tanto, un objeto flotará en el agua si y sólo si es menos denso que el agua.

Utilizando el siguiente lenguaje formal:

P: un objeto flota en el agua
Q: es menos denso que el agua
R: se puede caminar sobre el agua
S: puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso.

Las premisas en forma simbólica son:

1. $\sim (P \rightarrow Q) \rightarrow R$
2. $\sim R$
3. $Q \rightarrow S$
4. $S \rightarrow P$ $\quad / \therefore \; \mathbf{P \leftrightarrow Q}$

Demostrar $\mathbf{P \leftrightarrow Q}$ equivale a demostrar que $\mathbf{P \rightarrow Q} \;\wedge\; \mathbf{Q \rightarrow P}$.

5. $P \rightarrow Q$ Por **MPP** entre **1** y **3**
6. $Q \rightarrow P$ Por **S.H** entre **3** y **4**

La demostración

La demostración es un razonamiento que prueba la validez de un nuevo conocimiento; es el enlace entre los conocimientos recién adquiridos y los conocimientos anteriores. Los procedimientos de demostración permiten establecer la conexión lógica entre las proposiciones fundamentales de la teoría, sus consecuencias sucesivas, hasta deducir la conclusión o tesis que así se demuestra.
Los principales tipos de demostración son:

Demostración directa:
La demostración directa de una proposición **t** (teorema) es un conjunto de proposiciones o premisas que son postulados o proposiciones de validez aceptada y de las cuales se infiere t como consecuencia inmediata.

Ejemplo 1.
Dadas las premisas: 1. $p \rightarrow \sim q$
2. $r \rightarrow q$
Concluir : t. $p \rightarrow \sim r$

Demostración: Puesto que $\mathbf{r \rightarrow q}$ es equivalente a $\mathbf{\sim q \rightarrow \sim r}$, se tiene la premisa 3. $\mathbf{\sim q \rightarrow \sim r}$, ahora, de las premisas 1 y 3 se puede concluir **t**, es decir, como $\mathbf{p \rightarrow \sim q}$ y $\mathbf{\sim q \rightarrow \sim r}$, entonces, $\mathbf{p \rightarrow \sim r}$**.**

Ejemplo 2
Demostrar que si **x** es impar, entonces que $\mathbf{x^2}$ es impar. El enunciado genera las siguientes premisas:

1. **x** es impar
2. $\mathbf{x = 2n + 1}$, donde n es un entero

Hay que demostrar que $\mathbf{x^2 = (2n + 1)^2}$ es impar.

Demostración:
Si **x** es impar, entonces $\mathbf{x = 2n + 1}$, entonces $\mathbf{x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1}$, esta expresión se puede escribir de la forma $\mathbf{2(2n^2 + 2n) + 1}$, tomando el término $\mathbf{2n^2 + 2n}$ como el entero **m**, se tiene que:

$\mathbf{x^2 = (2n + 1)^2 = 2m + 1}$, es decir , $\mathbf{x^2}$ es un número impar.

Demostración indirecta:
Se realiza una demostración indirecta cuando se establece la validez de una tesis t probando que las consecuencias de su contraria son falsas.

Ejemplo 1.
Construir la demostración indirecta de:
Si $\mathbf{x^2}$ es par, entonces **x** es par, (con **x** entero)
Suponga que existe al menos un entero **x** tal que $\mathbf{x^2}$ es par y **x** es impar. Por el ejemplo 2 analizado en la demostración directa, se sabe que si **x** es impar, entonces $\mathbf{x^2}$ es impar, luego es imposible que **x** sea impar y que $\mathbf{x^2}$ sea par. Esta es la contradicción buscada.

Demostración por recursión:
Cuando la tesis se prueba por medio de inducción matemática.

Ejemplo 2.
Este tipo de demostraciones se utilizan cuando los enunciados tienen una proposición abierta en una variable **n**, y es necesario demostrar que tal proposición se verifica para todos los elementos **n** que pertenecen a un subconjunto infinito dado sobre los números enteros, el axioma de la inducción matemática es el siguiente:

Dado un conjunto de números enteros $\mathbf{A = \{n \,/\, n \geq a\}}$ y una proposición de la forma **P(n),** se puede demostrar la verdad de esta proposición estableciendo los siguientes pasos:

I. **P(a)** es verdadera cuando se sustituye n por a en **P(n)**
II. Se supone que la proposición **P(n)** es verdad para todo **k** del conjunto **A**, es decir, **P(k)** es verdadera, a esta proposición, se le llama Hipótesis de Inducción.
III. Se demuestra que para el siguiente término al k-ésimo, osea **k+1**, **P(k+1)** es verdadera.

Ejemplo 3.
Demostrar que para todo entero ≥ **1**, se verifica que: **P(n): 1+2+…+n = n (n+1) / 2**

I. **P(1)** es verdadera porque : **1 = 1(1 + 1) / 2**
II. Hipótesis de Inducción: **P(k): 1+2+…+k = k (k + 1) / 2** para todo **k** ≥ **1**
III. Demostrar para el término **k + 1**, es decir, probar que se verifica:
1 + 2 + … + k + k + 1 = (k + 1) (k + 2) / 2.

Por hipótesis de inducción:
1+2+…+k = k (k + 1) / 2 para todo **k** ≥ **1**, sumando **k + 1** a cada miembro de esta igualdad se obtiene:

$$1+2+\ldots+k+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$ resolviendo la suma

$$=\frac{k^2+k+2k+2}{2}$$ sumando términos semejantes

$$=\frac{k^2+3k+2}{2}$$ factorizando

$$=(k+1)(k+2)\ /\ 2$$ lo que se quería demostrar.

Demostración por refutación:
Es el razonamiento que prueba la falsedad de una hipótesis o la inconsecuencia de su supuesta demostración; los métodos de refutación son la refutación por contradicción y la refutación por contraejemplo.

Refutación por contradicción:
Refutar la proposición *"el cuadrado de todo número impar es un número par"* :

Como todo número impar se puede escribir de la forma **2n + 1**, donde **n** es un entero, y puesto que todo número par se puede escribir en la forma **2m**, con **m** un entero, la proposición dada implica que:

$$(2n+1)^2 = 2m \qquad \text{para algún } \mathbf{n} \text{ y algún } \mathbf{m}$$

o, $$4n^2 + 4n + 1 = 2m$$

Se supone que ambos miembros deben representar el mismo entero, pero el miembro de la izquierda no es divisible por 2, mientras que el de la derecha si es divisible por 2. Esto es una contradicción evidente y, por lo tanto, la proposición dada es falsa.

Refutación por contraejemplo:
Refutar la proposición *"el cuadrado de todo número impar es par":*

Se debe encontrar un número impar cuyo cuadrado sea impar, como $\mathbf{5^2 = 25}$, queda refutada la proposición.

Se deja como ejercicio de consulta investigar otros ejemplos de los tipos de demostración y de los métodos de refutación.

Capítulo 5

Inducción

ObservaciónExperienciaProbabilidad

Objetivo General

Utilizar el método inductivo para establecer si las premisas que conforman un argumento son verdaderas, sin tener que demostrar la verdad de la conclusión.

Objetivos específicos

1. Identificar los argumentos analógicos y clasificarlos como probables o no probables.

2. Evaluar argumentos analógicos.

3. Refutar un argumento por medio de una analogía.

3.1 Introducción

Existen varias clases de argumentos, unos permiten demostrar las conclusiones a partir de la validez de sus premisas (método deductivo), mientras que otros sólo buscan establecer si las premisas son probables o probablemente verdaderas, sin pretender demostrar la verdad de sus conclusiones como consecuencia necesaria de las premisas, este tipo de argumentos recibe el nombre de **Argumentos Inductivos**.

----observación y experiencia las bases de la inducción-----

El método inductivo es un tipo de razonamiento que se deriva de la observación y de la experiencia, lo cual lo hace totalmente diferente al método deductivo (estudiado en el capítulo anterior) y se basa fundamentalmente en dos aspectos:

1. En la semejanza que hay entre los objetos. ---OBSERVACIÓN---

2. En suponer que un suceso puede volver a ocurrir teniendo en cuenta que en condiciones similares ha sucedido. ---EXPERIENCIA-

El primer aspecto hace referencia a la observación y el segundo en la experiencia.

-----la observación y la experiencia nos inducen a una concluisión -------------

La aplicación o el análisis de estos dos aspectos permiten **inferir o pronosticar** los efectos que producirá la ocurrencia del suceso, tomando como referencia lo ocurrido con eventos anteriores de características similares.

El problema de la inducción:

Una **inducción típica, analizada sobre el modelo de la deducción**, tiene como premisas formulaciones particulares, por ejemplo: “el evento a del tipo **X**, es seguido del evento **b**, del tipo **Y**”, “el evento **c** del tipo **X** es seguido del evento **d** del tipo **Y**”, y así sucesivamente; tiene por conclusión una formulación general, Sin restricciones: “eventos del tipo X son seguidos por eventos del tipo Y”.

En este caso surge un problema lógico porque según el método deductivo, los argumentos de esa forma no son válidos, de manera que no se puede inferir esa conclusión, ni saber si es verdadera basada en la verdad de las premisas.

El problema lógico de cómo justificar ese tipo de razonamientos se llama tradicionalmente “el problema de la inducción” las razones de este problema son:

> 1. *Como la conclusión es general, tendrá una aplicación más amplia de la que cualquier conjunto de premisas pueda garantizar.* ***---LA CLAVE--(La conclusión es más general que las premisas)----***
>
> 2. *La verdad de la conclusión no puede nunca ser garantizada por la verdad de las premisas porque siempre puede presentarse un nuevo caso que convierta en falsa la conclusión.* ***--- LA CLAVE---(En algún momento se puede llegar a dar una premisa falsa)---.***

Lo anterior permite afirmar que la inducción es deficiente con respecto al modelo deductivo, visto como procedimiento de descubrimiento y como procedimiento de confirmación.

De los argumentos inductivos el que se usa con mayor frecuencia es el analógico.

3.2 Argumento inductivo por analogía

La analogía es la base de la mayoría de los razonamientos que van de la experiencia pasada a lo que sucederá en el futuro.

- La mayoría de las inferencias cotidianas proceden por analogía.
- Ningún argumento por analogía pretende ser matemáticamente cierto.
- Los argumentos analógicos no se clasifican como válidos o inválidos, lo único que se puede afirmar de ellos es que son probables o no probables.

La analogía también se usa en la explicación, donde algo no familiar se hace inteligible por medio de una **comparación** con alguna otra cosa, presumiblemente más familiar, con la cual tiene ciertas similitudes.

El uso de analogías en la descripción y la explicación no es igual que su uso en la argumentación, aunque en algunos casos puede no resultar fácil decidir cuál uso se pretende hacer.

Hacer una **analogía** entre dos o más entidades es indicar uno o más aspectos en los que son similares,

mientras que **caracterizar un argumento por analogía** es en términos generales, describir el argumento dado diciendo que contiene premisas que afirman, primero, que dos cosas son similares en dos aspectos y, segundo, que una de esas cosas tiene una característica adicional, de lo cual se extrae la conclusión de que la segunda cosa tiene también esa otra característica.

Ejemplo 1.
Identifique en el siguiente párrafo el argumento analógico

Los escritores JHON DOLLARD y NEAL E. MILLER, en su libro Personalidad y psicoterapia afirman:

> *"Hemos dicho que las personas normales tienen poca motivación para dedicar un esfuerzo especial al estudio de sí mismas. Lo mismo es cierto de la aritmética. Si la presión de los padres y de la escuela no proporcionara una motivación, habría un aprendizaje escaso de las matemáticas. Por analogía, parece posible que pueda motivarse y prepararse a los niños para usar sus habilidades mentales con el fin de resolver problemas emocionales. En la actualidad, no reciben casi ninguna preparación para el desarrollo de esta importante capacidad ".*

En este párrafo, el argumento analógico es: Si la presión de los padres y de la escuela no proporcionara una motivación, habría un aprendizaje escaso de las matemáticas. La analogía se basa en la semejanza. –**OBSERVACIÓN**-

Ejemplo 2
Si alguien dice que le han extraído una muela sin anestesia y otro le expresa su consideración, entonces surge la pregunta: ¿Cómo sabe que le dolió? Una respuesta podría ser: "Yo he ido al odontólogo y sé cuanto duele una simple curación sin anestesia, ¿cómo será una extracción?, él tiene el mismo tipo de sistema nervioso que yo, por lo tanto puedo inferir que en esas condiciones, sintió un terrible dolor"

En este caso el argumento analógico se fundamenta en la **EXPERIENCIA,** tendiendo en cuenta que en condiciones similares ya sucedió.

3.3 Evaluación de los argumentos analógicos

Ningún argumento por analogía es deductivamente válido, en el sentido de que la conclusión no es consecuencia necesaria de las premisas, lo que se puede establecer es si sus conclusiones **son más o menos probables.** Para lograr este propósito es indispensable fijar algunos criterios que permitan llevar a cabo la evaluación de argumentos analógicos, estos son:

1. Número de entidades entre las que es establece la analogía.

2. Número de aspectos en los cuales las cosas involucradas se dice que son análogas.

3. La fuerza de las conclusiones con respecto a sus premisas.

Ejemplos:
1. Número de entidades entre las que es establece la analogía. -**EXPERIENCIA**-

Significa que es importante tener en cuenta el número de veces que ha ocurrido el suceso, esto da más consistencia a la conclusión y una mayor probabilidad de que se repita el suceso.

Ejemplo 3.
Si un electrodoméstico que se compro en un determinado almacén salió defectuoso, una conclusión apresurada sería afirmar que los electrodomésticos que se compran en ese almacén salen defectuosos; pero si esa misma conclusión se hace sobre la base de que 10 electrodomésticos comprados allí han resultado defectuosos, la conclusión cobra mayor validez y la probabilidad de que siga ocurriendo lo mismo crece.

2. Número de aspectos en los cuales las cosas involucradas se dice que son análogas.
-- **OBSERVACICÓN**---

Este criterio hace referencia a todos los aspectos en que los sucesos son análogos, y cuando se encuentra un mayor número de circunstancias o características de semejanza entre los sucesos, mayor será la validez de la conclusión.

Ejemplo 4.
El hecho de que un par de zapatos nuevo, ha sido comprado en el mismo almacén que el par viejo, el cual fue muy resistente, es una premisa de la que se sigue que probablemente el nuevo par será también resistente. Pero la misma conclusión se sigue con mayor probabilidad si la premisa afirma no solamente que los zapatos fueron comprados en la misma tienda, sino que son de la misma marca, que eran los más caros del almacén y que tienen el mismo estilo.

3. La fuerza de las conclusiones con respecto a sus premisas.
En este caso el criterio afirma que con premisas iguales se pueden generar conclusiones diferentes y que su validez no depende de las premisas sino de la fuerza de la conclusión.

Ejemplo 5.
Una persona adquirió un carro nuevo y la ha dado un rendimiento de 10 Km / litro de gasolina, otra persona puede inferir que su carro nuevo, de la misma marca y modelo le dará un rendimiento igual (lo cual es probable); pero si la inferencia es que su carro le dará un rendimiento superior a 10 Km / litro, entonces esta conclusión será menos probable y la conclusión será mucho más débil si se afirma que el automóvil rendirá exactamente 10 Km / litro.

3.4 Refutación por medio de una analogía lógica

Un método básico, para evaluar como válido un argumento desde el punto de vista lógico, es el que recurre a la analogía para demostrar que otro argumento está equivocado o es incorrecto.

Este método consiste en refutar un argumento, mostrando que sus premisas no apoyan la conclusión que se pretende sostener, sin necesidad de demostrar que por lo menos una de sus premisas es falsa o está equivocada.

Si un argumento tiene premisas verdaderas pero conclusión falsa, esto es base suficiente para clasificarlo como inválido; pero, si no se sabe si las premisas son verdaderas o falsas, se puede probar su invalidez construyendo una analogía refutadora

Se define una analogía refutadora de un argumento dado como un argumento de exactamente la misma forma o estructura del argumento dado, pero cuyas premisas se conocen como verdaderas y su conclusión como falsa, así la analogía refutadora resulta inválida y como el argumento original tiene la misma forma también se considera inválido.

Ejemplo 6
El siguiente texto muestra una analogía refutadora.

> *"El señor Clifford A. Wrigth afirma que Israel no es una democracia porque otorga al judaísmo una posición especial dentro de la Ley. ¿Realmente es así? La Ley británica contra la blasfemia protege solamente a las creencias de los cristianos. Esas leyes no vician los reclamos británicos que es un país democrático, aunque se puede argüir que en virtud de ellos su democracia es menos perfecta. Israel tiene sufragio universal, un sistema multipartidista y una prensa libre. Para todos, menos para los ciegos partisanos, esto significa que es una democracia".*

-------------------- LA CLAVE -------------------
¿Observaste como la inducción está relacionada con la probabilidad?

Unidad 2

Álgebra Booleana y circuitos lógicos

OBJETIVO GENERAL

Teniendo en cuenta que los circuitos digitales o lógicos operan de forma binaria, emplear el álgebra booleana como fundamento teórico para el análisis, diseño y descripción del funcionamiento de las compuertas lógicas que son los circuitos lógicos fundamentales.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Describir la operación de las compuertas lógicas, mediante sus tablas de verdad.
2. Simplificar circuitos lógicos complejos mediante la aplicación de las leyes del álgebra de Boole
3. Simplificar expresiones booleanas mediante el uso de los mapas de Karnaugh
4. Emplear compuertas para implementar el circuito representado por una expresión booleana

Capítulo 1

Axiomas del álgebra booleana

$+$	$\cup$	$\vee$
$*$	$\cap$	$\wedge$
$=$	$=$	$\leftrightarrow$

NTRODUCCIÓN

El álgebra booleana, estudiada por primera vez en detalle por JORGE BOOLE, constituye un área de las matemáticas que ha pasado a ocupar un lugar prominente con el advenimiento de la computadora digital; en este caso proporcionan un eslabón entre el álgebra de conjuntos y el cálculo proposicional. Son usadas ampliamente en el diseño de circuitos de distribución y computadoras, las aplicaciones de la electrónica digital a los procesos de control y automatismo industriales están fundamentadas teóricamente en este sistema matemático.

Los circuitos digitales o lógicos operan de un modo binario donde cada voltaje (señal) de entrada o de salida es un cero (0) o un uno (1). Las designaciones 0 y 1 representan intervalos predefinidos de voltaje. Esta característica de los circuitos lógicos permite emplear el álgebra booleana en el análisis y diseño de sistemas digitales

Variables y constantes booleanas
Las variables y constantes del álgebra booleana sólo pueden tener dos valores: el cero (0) o el uno (1). Una variable booleana, denominada también variable lógica, se emplea para representar el nivel de voltaje presente en los terminales de entrada y salida de un circuito. En algunos casos este nivel de voltaje recibe el nombre de “nivel lógico” de la variable. Cuando el nivel del voltaje es bajo (entre 0 y 0.8 voltios) se emplean términos como **falso, desactivado, no, interruptor abierto (0).** Cuando el nivel lógico es alto (por ejemplo entre 4 y 5 voltios), se emplean términos como **verdadero, activado, si, interruptor cerrado (1).**

El álgebra booleana se utiliza para describir los efectos que producen las entradas lógicas sobre los diversos circuitos digitales (circuitos lógicos).

Definición

Las propiedades del sistema matemático de la lógica simbólica se pueden aplicar al álgebra de conjuntos; para tal fin, se forma un sistema matemático abstracto llamado **Álgebra Booleana,** en el cual los símbolos carecen de significado, de tal manera que esta álgebra puede aplicarse a otras áreas.

Para definir este sistema abstracto es conveniente recordar que una operación binaria es una función que asigna a cada pareja ordenada un solo elemento.

Un álgebra booleana es un sistema algebraico constituido por un conjunto A formado por elementos a, b, c, …z, dos operaciones binarias simbolizadas por # y * definidas sobre el conjunto A y una relación de equivalencia simbolizada por =, tales que, para cualesquiera elementos a, b y c de A, se verifican las siguientes propiedades o axiomas:

1. **Cerradura o clausurativa:**

   (a # b) y (a * b) también son elementos del conjunto A

2. **Conmutativa:**

   (a # b) = (b # a) y (a * b) = (b * a)

3. **Asociativa:**

   (a # b) # c = a # (b # c) y (a * b) * c = a * (b * c)

4. **Distributiva:**

   a # (b * c) = (a # b) * (a # c) y a * (b # c) = (a * b) # (a * c).

5. **Identidad:**

   a # 0 = a y a * e = a
   Los elementos 0 y e reciben el nombre de elementos neutros para las operaciones # y * respectivamente.

6. **Complementación:**

   Para cada elemento a que pertenece al conjunto A existe un elemento a' en A tal que:
   a # a' = 0 y a * a' = e.
   El elemento a' se llama elemento inverso para las operaciones # y *

4.4 Álgebra booleana en sistemas numéricos

Para este sistema se puede adaptar la siguiente simbología:

A: El conjunto de los enteros (Z)

Operaciones binarias:	**+**	**adición**
	*	**producto**
Relación de equivalencia:	**=**	**igualdad**

A continuación se realiza la verificación de que el conjunto de números enteros (**Z**) es un álgebra booleana, es decir, que satisface dada una de las siguientes propiedades para cualesquiera a**, b, c** y **d** elementos del conjunto **Z**.

1. Cerradura: $a + b = c$ y $a * b = d$

2. Conmutativa: $a + b = b + a$ y $a * b = b * a$

3. Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$
$a * (b * c) = (a * b) * c = (a * c) * b$

4. Distributiva: $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$
$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

5. Identidad: Existen en **Z** elementos **0** y **1** tales que:

$a + 0 = a$ y $a * 1 = a$

El **0** y el **1** reciben el nombre de elementos neutros para la adición y la multiplicación respectivamente.

6. Complementación: Para cada elemento a que pertenece al conjunto **z**, existe un elemento (**-a**) que también pertenece al conjunto de enteros tal que:

a + (-a) = 0, (**-a**) recibe el nombre de inverso aditivo del elemento **a**.

Es importante aclarar que la operación binaria del producto no tiene inverso multiplicativo, es decir, no existe un elemento en los enteros tal que al multiplicarlo con otro entero de como resultado el elemento neutro del producto (1)

4.5 Álgebra booleana de los conjuntos

Para este sistema se interpreta la simbología del álgebra booleana así:

A: Todos los subconjuntos del conjunto universal "U"

Operaciones binarias: **U Unión**
∩ Intersección
Relación de equivalencia: **= Igualdad**

A continuación se demuestra que el álgebra de conjuntos satisface las propiedades de un álgebra booleana.

Sean **B**, **C** y **D** subconjuntos del conjunto **A**

1. Cerradura:

B U C es un subconjunto de A y
B ∩ C es un subconjunto de A

2. Conmutativa:

$B \cup C = C \cup B$ y $B \cap C = C \cap B$

3. Asociativa:

$(B \cup C) \cup D = B \cup (C \cup D)$
$(B \cap C) \cap D = B \cap (C \cap D)$.

4. Distributiva:

$B \cup (C \cap D) = (B \cup C) \cap (B \cup D)$ y
$B \cap (C \cup D) = (B \cap C) \cup (B \cap D)$.

5. Identidad: En el conjunto universal **U** existen dos conjuntos, el vacío **Φ** y el conjunto **A**, tales que:

$B \cup A = A$ y $B \cap \Phi = \Phi$.

Los conjuntos **Φ** y **A** se denominan elementos neutros para la intersección y para la unión respectivamente.

6. Complementación: Para cada subconjunto **B** del conjunto **A**, existe un subconjunto **B'** que también pertenece al conjunto **A** tal que:

$B \cup B' = A$ y $B \cap B' = \Phi$. **B'** se denomina complemento de **B**.

4.6 Álgebra booleana de la lógica

Para este sistema matemático la simbología correspondiente es:

A: El conjunto de todas las proposiciones
Operaciones binarias: **v Disyunción**
$\wedge$ Conjunción
Relación de equivalencia: $\leftrightarrow$

Elemento neutro: La contradicción (0) para la disyunción
La tautología (1) para la conjunción

Elemento inverso (a'): La negación de una proposición

La demostración de que la lógica simbólica es un álgebra booleana corresponde a la verificación de las siguientes propiedades:

Sean p, q y r proposiciones del conjunto **A**.

1. Cerradura:

p v q es una proposición del conjunto **A**
p $\wedge$ q es una proposición del conjunto **A**

2. Conmutativa:

$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$

$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$

3. Asociativa:

$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$.

4. Distributiva:

$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

5. Identidad: En el conjunto **A** existe una proposición que siempre es verdadera, llamada tautología y simbolizada por **1**, y otra que siempre es negativa, llamada contradicción y simbolizada por **0**, tales que:

$p \vee 0 \leftrightarrow p$ y $p \wedge 1 \leftrightarrow p$.

La tautología y la contradicción corresponden a los elementos neutros de la disyunción y de la conjunción respectivamente.

5. **Complementación:** Para cada proposición **p**, existe en el conjunto **A** una proposición **~p**, llamada la negación de **p**, tal que:

$$p \lor (\sim p) \leftrightarrow 1 \quad \text{y} \quad p \land (\sim p) \leftrightarrow 0$$

Es preciso recordar que las tablas de verdad son una herramienta para demostrar estas propiedades, su elaboración se deja como ejercicio.

Ejercicio

Usando las propiedades del Álgebra Booleana demostrar que:

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

Sugerencia: Inicia desde doble negación a ambos lados de la igualdad.

Capítulo 2

Expresiones Booleanas

$$f(x, y) = x\,y + x\,y' + x'\,y + x'\,y'$$

Expresiones booleanas

Una expresión booleana (también llamada función booleana o función lógica) es un conjunto finito de símbolos (cada uno representa una constante o una variable) combinados mediante la operación suma, producto o complementación.

Si **n** es el número de variables lógicas, entonces el número total de funciones lógicas distintas que se pueden escribir con **n** variables es $\mathbf{2^2}$, por ejemplo para **n = 3** (tres variables lógicas: **x**, **y**, **z**), el número de funciones lógicas distintas es de **256**.
Para escribir las funciones lógicas se utiliza el símbolo **Fi**, donde **i** varía según el número de funciones lógicas a partir de **0**, así por ejemplo, para **n = 2** (dos variables lógicas: **x**, **y**), las **16** funciones lógicas se denominan **Fi**, con **i = 0,1,2,3…15**.

Otras propiedades o leyes del álgebra booleana empleadas en los procesos de simplificación de expresiones booleanas o en la demostración de teoremas, son:

Ley de idempotencia:	$x + x = x$	$x . x = x$	
Ley de acotación:	$x + 1 = 1$	$x . 0 = 0$	
Ley de absorción:	$x + x y = x$	$x (x + y) = x$	
Ley de involución	$(x')' = x$	$(0')' = 0$	$(1')' = 1$
Ley D'Morgan	$(x + y)' = x' y'$	$(x y)' = x' + y'$	

Las expresiones booleanas pueden adoptar dos formas útiles para las aplicaciones tecnológicas; tales expresiones están conformadas por una suma de productos o por un producto de sumas, denominadas la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva, respectivamente.

Forma normal disyuntiva

La función booleana adopta una forma normal disyuntiva si está escrita como una suma de términos, en la cual cada término es un producto que involucra todas las n – variables, con negación o sin ella. Cada término se llama término minimal y la función se denomina función polinomial de términos minimales.

Ejemplos:

- $x + x'$ **en una variable**
- $x.\ y'$ **en dos variables**
- $x.\ y.\ z' + x'.\ y.\ z + x.\ y'.\ z$ **en tres variables.**

El proceso para llegar a la forma normal disyuntiva de una función booleana consiste en:

1. aplicar las leyes D'Morgan, hasta que los complementos aparezcan aplicados solamente a variables individuales;

2. después por la aplicación de la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, la función puede ser reducida a un polinomio.

3. Si en algún término falta una variable, por ejemplo **w**, entonces este término puede ser multiplicado por la expresión $w + w'$ sin cambiar la función.

Ejemplo 1.
Escribir la función $f(x, y, z) = (x\,y + y\,z')' + y'$ en la forma normal disyuntiva

$(x\,y + y\,z')' + y'$	$= (x\,y)'\,(y\,z')' + y'$	Por Ley D'Morgan
	$= (x' + y')\,(y' + z) + y'$	Por D'Morgan e Involución
	$= (y' + x')\,(y' + z) + y'$	Por conmutativa
	$= y'\,(y' + z) + x'\,(y' + z) + y'$	Por distributiva
	$= y' + x'\,(y' + z) + y'$	Por absorción
	$= y' + x'\,y' + x'\,z + y'$	Por distributiva
	$= y' + y'\,x' + x'\,z + y'$	Por conmutativa
	$= y' + x'\,z + y'$	Por absorción
	$= y' + y' + x'\,z$	Por asociativa
	$= y' + x'\,z$	Por idempotencia

La expresión se ha reducido a dos términos; en el primero (**y'**) faltan las variables **x z**, en el segundo (**x' z**) falta la variable **y**, entonces, como el proceso para llegar a la forma normal disyuntiva permite multiplicar el primer término por la expresión $(x + x')\,(z + z')$ y el segundo por $(y + y')$ la expresión queda convertida en:

$= y' (x + x') (z + z') + x' z (y + y')$ Por distributiva
$= y' (x z + x z' + x' z + x' z') + x' z y + x' z y'$ distributiva
$= x y' z + x y' z' + x' y' z + x' y' z' + x' y z + x' y' z$ asociativa
$= x y' z + x y' z' + x' y' z + x' y' z' + x' y z$

Una función booleana puede ser expresada en forma normal disyuntiva en más de una manera, mediante el cambio del número de variables; sin embargo, para un número dado de variables la forma normal es única.

Ejemplo 2.
*Si **f (x, y) = x y** esta en forma normal disyuntiva en **x** y en **y**, pero si **x . y** es multiplicada por **z + z'**, entonces se tiene que:*

f (x, y, z) = x y (z + z')
f (x, y, z) = x y z + x y z' también esta en forma normal en las variables **x, y, z.**

Ejemplo 3.
g (x, y, z) = x' y z + x y z + x' y z' + x y z' está en forma normal disyuntiva en **x, y, z**, pero aplicando las leyes del álgebra booleana se tiene que:

$g (x, y, z) = x' y z + x y z + x' y z' + x y z'$
$= y z (x' + x) + y z' (x' + x)$
$= y z (1) + y z' (1)$
$= y z + y z'$

$= y (z + z')$
$= y (1)$

por lo tanto **g (x, y, z) = y** que es la forma normal en **y**.

La forma normal disyuntiva en **n-variables** que tiene $\mathbf{2^n}$ términos se llama "forma normal disyuntiva completa en n-variables" y es idénticamente igual a la unidad.

Ejemplo 4.
Para el caso de dos variables (**n = 2**) la forma normal disyuntiva se puede obtener de la siguiente tabla:

x	y	f (x, y)
1	1	**x y**
1	0	**x y'**
0	1	**x' y**
0	0	**x' y'**

Donde la suma de los productos es **1**, es decir,

$$\mathbf{x\, y + x\, y' + x'\, y + x'\, y' = 1.}$$

La demostración es la siguiente:

$$\begin{aligned} x\,y + x\,y' + x'\,y + x'\,y' &= x\,(y + y') + x'\,(y + y') \\ &= x\,(1) + x'\,(1) \\ &= x + x' \\ &= 1. \end{aligned}$$

Una función booleana **f** está completamente determinada por los valores que ella asuma para cada una de las combinaciones de los valores asignados, **0** ó **1**, a las respectivas variables, es decir, una función booleana puede ser determinada mediante una tabla que represente las condiciones deseadas, este hecho se aplica especialmente en el diseño de circuitos.

Ejemplo 5.

Encontrar y simplificar la función booleana descrita en la siguiente tabla:

Fila	**x**	**y**	**z**	**f (x, y, z)**
0	1	1	1	**0**
1	1	1	0	**1**
2	1	0	1	**1**
3	1	0	0	**0**
4	0	1	1	**0**
5	0	1	0	**0**
6	0	0	1	**1**
7	0	0	0	**0**

En este caso la tabla muestra el valor de la función lógica para las $\mathbf{2^3 = 8}$ posibles combinaciones de **0** y **1** para las variables **x**, **y**, **z**.

Las combinaciones en las filas **1,2** y **6** tienen valor **1**, por lo tanto la forma normal disyuntiva contendrá tres términos así:

$$\begin{aligned} \mathbf{f\,(x, y, z)} &= \mathbf{x\,y\,z' + x\,y'\,z + x'\,y'\,z} \\ &= x\,y\,z' + y'z\,(x + x') \\ &= x\,y\,z' + y'z\,(1) \\ &= x\,y\,z' + y'z. \end{aligned}$$

En estos casos, se recomienda usar la forma normal disyuntiva cuando el número de unos (**1**) es menor que el número de ceros (**0**) en la columna **f (x, y, z).**

El complemento de una función en forma normal disyuntiva contendrá exactamente aquellos términos de la forma normal disyuntiva que no aparecen en la función dada.

Ejemplo 6:
Escribir el complemento de cada una de las siguientes funciones:

1. x’ y’ + x’ y
2. x’ y’ z’ + x’ y’ z + x’ y z’ + x’ y z + x y’ z’

Como el complemento de una forma normal disyuntiva son los términos que no aparecen en la función, entonces el complemento de cada función es:

1. x y + x y’
2. x y’ z + x y z’ + x y z.

Forma normal conjuntiva

Se dice que una función booleana está en forma normal conjuntiva si está escrita como un producto de términos, en el cual cada uno es una suma que involucra todas las n-variables, con complementación o sin ella.

Cada término se denomina **término maximal**.

El proceso para obtener la forma normal conjuntiva de una función booleana consiste en

1. aplicar las leyes D’Morgan para eliminar los complementos de los paréntesis,

2. después la función es factorizada y

3. luego se introducen las variables que faltan en cada factor, por ejemplo w, sumando un término de la forma **w w’**, que no cambia la función.

4. El último paso es expresarla en factores y reducir aquellos que sean semejantes.

Ejemplo 1.
Escribir la función **f (x, y, z) = (x y + y z')' + y'** en la forma normal conjuntiva.

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= (x\,y + y\,z')' + y' \\
&= (x\,y)'\,(y\,z')' + y' \\
&= (x' + y')\,(y' + z) + y' \\
&= (y' + x')\,(y' + z) + y' \\
&= y' + (y' + x')\,(y' + z) \\
&= (y' + y' + x')\,(y' + y' + z) \\
&= (y' + x')\,(y' + z) \\
&= (y' + x' + z\,z')\,(x\,x' + y' + z) \\
&= (y' + x' + z)\,(y' + x' + z')\,(x + y' + z)\,(x' + y' + z) \\
&= (x' + y' + z)\,(x' + y' + z')\,(x + y' + z)\,(x' + y' + z) \\
&= (x' + y' + z)\,(x' + y' + z)\,(x' + y' + z')\,(x + y' + z) \\
&= (x' + y' + z)\,(x' + y' + z')\,(x + y' + z)
\end{aligned}
$$

Una función booleana puede ser expresada en forma normal conjuntiva en más de una manera, mediante el cambio del número de variables; sin embargo, para un número específico de variables la forma normal conjuntiva es única.

Ejemplo 2.
La función **f (x, y) = x + y** esta en forma normal conjuntiva en las variables **x, y**, escribir la función **f (x, y)** en la forma normal conjuntiva pero en las variables **x, y, z**.

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= x + y \\
&= x + y + z\,z' \\
&= (x + y + z)\,(x + y + z')
\end{aligned}
$$

Así **f(x, y)** quedó expresada en forma normal conjuntiva en variables **x, y, z**.

La forma normal conjuntiva en n-variables que tiene **2^n** términos se **llama "forma normal conjuntiva completa en n-variables"** y su producto es igual a cero.

Por ejemplo, para **n = 2** la forma normal conjuntiva completa se obtiene tomando las variables complementadas.

x = 0 x' = 1 y = 1 y' = 0

y su definición se puede obtener en la siguiente tabla:

x	y	f (x, y)
1	1	**x’ + y**
1	0	**x’ + y’**
0	1	**x + y**
0	0	**x + y’**

Como el producto de la suma es **0**, se tiene que:

$$(x' + y)\ (x' + y')\ (x + y)\ (x + y') = 0.$$

La demostración es la siguiente:

$$\begin{aligned}(x' + y)\ (x' + y')\ (x + y)\ (x + y') &= (x' + y\ y')\ (x + y\ y') \\ &= (x' + 0)\ (x + 0) \\ &= x\ x' \\ &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo 3.

Encontrar y simplificar la función booleana **f (x, y, z)** de la tabla.

Fila	x	Y	z	f (x, y, z)
0	1	1	1	**1**
1	1	1	0	**1**
2	1	0	1	**0**
3	1	0	0	**1**
4	0	1	1	**1**
5	0	1	0	**1**
6	0	0	1	**0**
7	0	0	0	**1**

Como sólo dos filas de la tabla, la **2** y la **6**, tienen el valor cero, es más fácil escribir la función en forma normal conjuntiva, así:

$$\begin{aligned}f\ (x, y, z) &= (x' + y + z')\ (x + y + z') \\ &= (y + z' + x')\ (y + z' + x) \\ &= (y + z' + x'x) \\ &= (y + z' + 0) \\ &= y + z'\end{aligned}$$

La forma normal conjuntiva se usa si el número de ceros (**0**) es menor que el número de unos (**1**) en la columna **f**.

El complemento de una función escrita en forma normal conjuntiva es una función cuyos factores son exactamente aquellos de la forma normal conjuntiva, que no aparecen en la función dada, por ejemplo, el complemento de **(x + y’) (x’ + y’) es (x’ + y) (x + y).** El complemento se puede utilizar para encontrar la forma normal disyuntiva, para cambiar una función de una forma normal a la otra se utiliza el complemento del complemento de la función, es decir, **(f ‘)’ = f.**

Ejemplo 4.

Encontrar la forma normal conjuntiva para la función

$$f(x, y, z) = x\,y\,z + x'\,y\,z + x\,y'\,z' + x'\,y\,z'$$

Aplicando el complemento del complemento se tiene:

$$\begin{aligned}[f'(x, y, z)]' &= [\,(x\,y\,z + x'\,y\,z + x\,y'\,z' + x'\,y\,z')'\,]' \\ &= [(x\,y\,z)'\,(x'\,y\,z)'\,(x\,y'\,z')\,(x'\,y\,z')']' \\ &= [(x' + y' + z')\,(x + y' + z')\,(x' + y + z)\,(x + y' + z)]'\end{aligned}$$

Los términos que no aparecen en la función son:

$$= (x + y + z)\,(x' + y + z)\,(x + y' + z')\,(x' + y + z')$$

Ejemplo 5.

Cambiar la siguiente expresión de la forma normal disyuntiva a la forma normal conjuntiva.

$$f(x, y, z) = x\,y\,z + x\,y'\,z' + x'\,y\,z' + x'\,y'\,z + x'\,y'\,z'$$

Aplicando el complemento se tiene que:

$$[f'(x, y, z)]' = [(x\,y\,z + x\,y'\,z' + x'\,y\,z' + x'\,y'\,z + x'\,y'\,z')']'$$

Aplicando el complemento del paréntesis interno, (los términos que no aparecen), se tiene:

$= [\,x'\,y\,z + x\,y'\,z + x\,y\,z']'$ y por el complemento externo

$$\begin{aligned}&= (x'\,y\,z)'\,(x\,y'\,z)'\,(x\,y\,z')' \\ &= (x + y' + z')\,(x' + y + z')\,(x' + y' + z)\end{aligned}$$

Ejemplo 6.

Cambiar la siguiente expresión de la forma normal conjuntiva a la forma normal disyuntiva.

$$f(x, y, z) = [\,(y + z')\,(y' + z)\,(y' + z')]$$

Aplicando el complemento se tiene que:

$$
\begin{aligned}
[f'(x, y, z)]' &= \{ [(y + z') (y' + z) (y' + z')] ' \}' \\
&= \{ (y + z')' + (y' + z)' + (y' + z')'\}' \\
&= \{(y' z) + (y z') + (y z)\}' \\
&= \{y' z + y z' + y z\}' \\
&= y' z'
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7

Escribir las funciones descritas en la siguiente tabla y simplificarla utilizando la forma más conveniente:

x	y	z	F1	F2	F3	F4
0	0	0	**1**	**0**	**0**	**0**
0	0	1	**0**	**1**	**0**	**1**
0	1	0	**1**	**0**	**1**	**1**
0	1	1	**1**	**0**	**1**	**1**
1	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**
1	0	1	**1**	**0**	**0**	**1**
1	1	0	**0**	**1**	**1**	**1**
1	1	1	**1**	**0**	**0**	**1**

Para F1 se usa la forma normal conjuntiva porque sólo hay dos ceros, por lo tanto la expresión booleana es:

$F1 (x, y, z) = (x + y + z') (x' + y' + z)$. **Ya esta simplificada**

En F2 se utiliza la forma normal disyuntiva porque sólo hay dos unos, la expresión booleana es:

$\mathbf{F2 (x, y, z) = x' y' z + x y z'}$. Ya esta simplificada.

En F3 se puede utilizar cualquiera de las dos formas, debido a que el número de ceros y de unos es igual, la forma normal disyuntiva es:

$$
\begin{aligned}
F3 (x, y, z) &= x' y z' + x' y z + x y' z' + x y z'. \\
&= x' y (z' + z) + x z' (y' + y) \\
&= x' y (1) + x z' (1) \\
&= \mathbf{x' y + x z'}
\end{aligned}
$$

La forma más conveniente **para F4** es la forma norma conjuntiva

$$
\begin{aligned}
F4 (x, y, z) &= (x + y + z) (x' + y + z) \\
&= y + z + x x' \\
&= y + z + 0 \\
&= \mathbf{y + z}
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

Simplificación de expresiones Booleanas

	X'Y' 00	X'Y 01	XY 11	XY' 10
Z' = 0				
Z = 1				

Otras técnicas de simplificación

Simplificación de expresiones booleanas mediante mapas de Karnaugh

Para simplificar enunciados booleanos se utiliza, además de las leyes de la lógica, los llamados mapas de Karnaugh o mapas K.

Un diagrama de Karnaugh se puede definir como un diagrama rectangular, con regiones o casillas arregladas como cuadrados dentro del rectángulo. Los mapas K tienen 2^n casillas, donde n es el número de variables lógicas de la expresión booleana, por ejemplo, para una función de dos variables (A y B), n es igual a 2, luego el mapa de karnaugh es un rectángulo con cuatro casillas (dos filas y dos columnas) y cada casilla contiene el valor de la función para cada combinación de los valores de verdad de las variables así:

A	B	Función
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

La función lógica anterior se puede escribir de la siguiente manera:

A	B	Función	
~A	~B	1	= ~A ~B
~A	B	0	= ~A B
A	~B	1	= A ~B
A	B	1	= A B

El mapa de Karnaguh correspondiente será:

~B	B
~A ~B	~A B
A ~B	A B

Mapa de karnaugh

El mapa de Karnaguh con los 1's y 0's de la función quedan como sigue:

	~B	B
~A	**1**	**0**
A	**1**	**1**

Para más de 6 variables los mapas de Karnaugh se hacen demasiado complicados y pierden su utilidad.

La construcción de un mapa de **K** se hace con base a la tabla de verdad asociada con la función booleana que se quiere representar, ya sea en forma disyuntiva o conjuntiva.

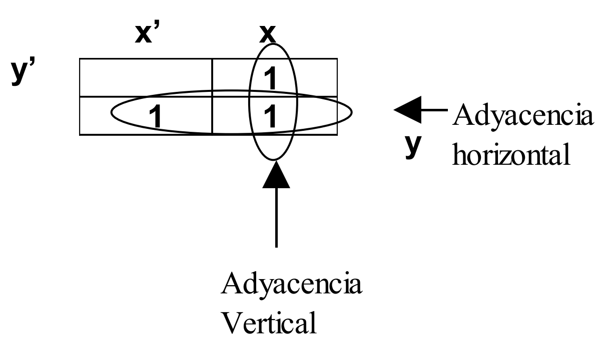
Las características fundamentales de los mapas de **K**, se pueden resumir de la siguiente forma:

1. Cada casilla se asocia con una fila de la tabla de verdad
2. el número binario (1 ó 0) que identifica cada fila de la tabla de verdad se hace corresponder con las coordenadas binarias que identifican cada casilla del mapa **K**. El diagrama se presenta a continuación:

x	y	Función
x'	y'	0
x'	y	1
x	y'	1
x	y	1

	Y’	Y
X’	**0**	**1**
X	**1**	**1**

3. Si dos casillas contiguas (horizontal o verticalmente) tienen unos (1), se dice que forman una adyacencia. En el siguiente diagrama, se representa un mapa **K** con dos adyacencias, una vertical y la otra horizontal.



Ejemplo 1.

Escriba en forma normal disyuntiva la función booleana descrita en el mapa de Karnaugh y luego simplifíquela.

Recordemos que el mapa de K representado es equivalente al mapa:

	x'	**x**
y'	1	1
y	0	0

	x'	**x**
y'	x' y'	x y'
y	x' y	xy

La función coincide con los 1's, es decir con las casillas **x' y'** y **x y':**

$$f(x, y, z) = x'\, y' + x\, y'$$

Simplificando de manera analítica la función se obtiene:

$$= y'\,(x' + x)$$
$$= y'.\ 1$$
$$= y'$$

Mediante el mapa de K, no hay que simplificar analíticamente, la simplificación es un proceso gráfico:

¿ como se usa el mapa de karnaugh para simplificar funciones lógicas?

1) Partimos de la tabla de verdad

En la tabla de verdad de la función lógica, nos interesa identificar para que valores de la función, esta es 1, valores que resaltamos a continuación con círculos, las flechas están indicando la función lógica correspondiente:

x	y	f (x, y)	
1	1	**0**	
1	**0**	**1**	**x y'**
0	1	**0**	
0	**0**	**1**	**x' y'**

2) De la tabla de verdad pasamos a obtener la función lógica:

La función lógica de esta tabla de verdad es:

f (x, y) = x y' + x' y'

3) De la tabla de verdad pasamos a obtener el mapa de Karnaugh:

En los recuadros del mapa de k ubicamos los 1's y 0's de la función lógica f (x, y):

		X = 0	**X = 1**
		x'	**x**
Y= 0	**y'**	**1**	**1**
Y= 1	**y**	0	0

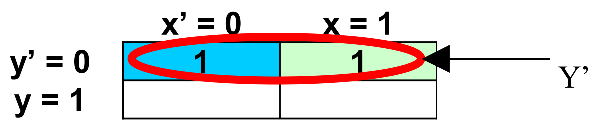
Nota:

Al simplificar usando los mapas de K, debemos obtener la siguiente simplificación, deducida mediante las propiedades del álgebra booleana:

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= x' y' + x y' \\
&= y' (x' + x) \\
&= y' . 1 \\
&= y'
\end{aligned}
$$

4) Simplificación usando las propiedades de los mapas de KARNAUGH:

Se procede a agrupar unos (1's) contiguos horizontales o verticales mas nunca en diagonal:



Estos dos unos agrupados se pueden representar por **y'** únicamente, así nos que da la siguiente simplificación:

f (x, y) = y'

Observemos que para agrupar se buscó la variable que definía a los dos unos al mismo tiempo, la fila identificada como **Y'** define muy bien este par de unos, luego la solución es **y'**

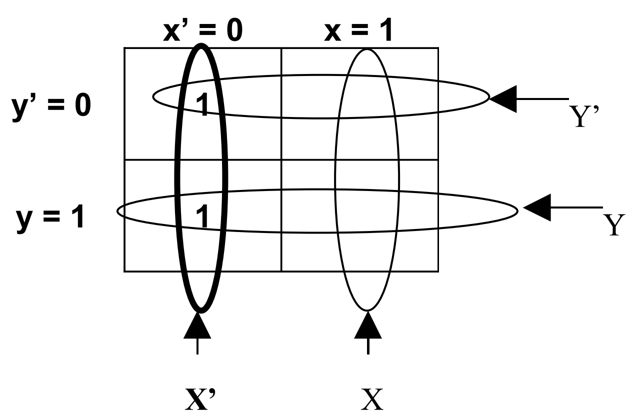
Observemos como esta simplificación es equivalente a la simplificación obtenida usando las propiedades del álgebra booleana.

Otro ejemplo:

1) Si el mapa de Kargaugh fuera:

	x' = 0	**x = 1**
y' = 0	**1**	
y = 1	**1**	

¿Quién define mejor en este caso a los unos? ¿Cuál de las siguientes cuatro adyacencias es la mejor?



Si observas los unos encerrados, podrás ver que **x'** los define completamente.

Demostrémoslo usando el álgebra de Boole:

La función original sería:

f (x, y) = x' y' + x' y
f (x, y) = x' (y' + y) **/ Factor común X'**
f (x, y) = x' (1) **/ A' + A = 1**
f (x, y) = x' **/ A' . 1 = A'**

Con lo que queda demostrado.

La fila identificada como **Y'** definió muy bien este par de unos.

1) Si el mapa de Kargaugh fuera:

	x' = 0	**x = 1**
y' = 0	**1**	
y = 1	**1**	**1**

¿Quién define mejor en este caso a los unos?

	x' = 0	**x = 1**
y' = 0	**1**	
y = 1	**1**	**1**

Si observas los unos encerrados, **x'** no definen completamente toda la función, sólo define completamente dos unos.

Para considerar el otro uno podemos tomarlo sólo, de la siguiente manera:

	x' = 0	**x = 1**
y' = 0	**1**	
y = 1	**1**	**1**

La función quedaría definida por: **f (x, y) = x' + x y**

Pero si en lugar de tomar un sólo uno asociáramos dos unos obtendríamos:

	x' = 0	**x = 1**
y' = 0	**1**	
y = 1	**1**	**1**

La nueva función quedaría así: **f (x, y) = x' + y**

Demostrémoslo usando el álgebra de Boole:

Tomo cualquiera y lo duplico

La función original sería: $f(x, y) = x'y' + x'y + xy$

$f(x, y) = x'y' + x'y + xy + x'y$ **/ A + A = A**

$f(x, y) = x'(y' + y) + y(x + x')$ **/ Factor común X'**

$f(x, y) = x'(1) + y(1)$ **/ A' + A = 1**

$f(x, y) = x' + y$ **/ A' . 1 = A'**

Con lo que queda demostrado.

Otro ejemplo:

1) Si el mapa de Kargaugh fuera:

	X'Y' 00	**X'Y 01**	**XY 11**	**XY' 10**
Z' = 0	**1**		**1**	
Z = 1	**1**		**1**	**1**

Este mapa de k proviene de una función de tres variables:

¿Quién define mejor en este caso a los unos?

Nota: Al hacer los óvalos no podemos dejar espacios sin unos, es decir, debemos agrupar unos contiguos.

	X'Y' 00	**X'Y 01**	**XY 11**	**XY' 10**
Z' = 0	**1**		**1**	
Z = 1	**1**		**1**	**1**

La función quedaría definida por: **$f(x, y,z) = x'y' + xy + xz$**

Para agrupar los unos que se encuentran en los cajones **ZXY** y en el cajón **ZXY'**, buscamos las letras que estos unos tienen en común, las cuales son la **Z** y **X.**

Observa que **X** y **Z** son las variables que tiene en común los unos

Tomo xyz
y lo duplico

Demostrémoslo usando el álgebra de Boole:

La función original sería: **f (x, y,z) = x' y'z' + x' y'z + xyz'+ xyz + xy'z**

Simplificando

f (x, y,z) = x' y'z' + x' y'z + xyz'+ xyz + xy'z + xyz
f (x, y,z) = x' y'(z' + z) + xy(z'+ z) + xz(y' + y)
f (x, y,z) = x' y'(1) + xy(1) + xz(1)
f (x, y,z) = x' y' + xy + xz

Que es igual a lo que nos ofrecía el mapa de KARNAUGH

Con lo que queda demostrado.

Ejemplo 2.
Representar en un mapa de Karnaugh la función Booleana descrita en la siguiente tabla y luego simplificarla:

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

El mapa correspondiente es:

	x' = 0	**x = 1**
y' = 0		1
y = 1	1	1

La función booleana es:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x'\,y + x\,y' + x\,y \\ &= x'\,y + x\,(y' + y) \\ &= x'\,y + x.1 \\ &= x'\,y + x \end{aligned}$$

Ejemplo 3.

Obtener las expresiones booleanas reducidas para los siguientes mapas de Karnaugh:

	x' = 0	x = 1
y' = 0		1
y = 1		1

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x\,y' + x\,y \\ &= x\,(y' + y) \\ &= x \end{aligned}$$

Mapas de karnaugh para tres variables:
El mapa K para tres variables es un diagrama formado por dos filas y cuatro columnas, así:

	X'Y' 00	X'Y 01	XY 11	XY' 10
Z' = 0				
Z = 1				

En este caso pueden ocurrir adyacencias de dos, cuatro u ocho unos (1).

Ejemplo 1.
Encontrar la expresión booleana simplificada cuyo mapa k es:

	X'Y' 00	X'Y 01	XY 11	XY' 10
Z' = 0		1	1	
Z = 1		1	1	

La función es: $f(x, y, z) = x'\,y\,z' + x'\,y\,z + x\,y\,z' + x\,y\,z$

$$\begin{aligned} &= x'\,y\,(z' + z) + x\,y\,(z' + z) \\ &= x'\,y.\,1 + x\,y.\,1 \\ &= x'\,y + x\,y \\ &= y\,(x' + x) \\ &= y.\,1 \\ &= y \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

Obtener las expresiones booleanas reducidas para el siguiente mapa de Karnaugh:

	X'Y' 00	X'Y 01	XY 11	XY' 10
Z' = 0			1	
Z = 1			1	1

La función booleana es: $f(x, y, z) = x\,y\,z' + x\,y\,z + x\,y'\,z$ simplificando se tiene:
$= x\,y\,(z' + z) + x\,y'\,z$
$= x\,y + x\,y'\,z$.

Mapas de karnaugh para cuatro variables
El mapa K para funciones booleanas de cuatro variables es un diagrama de cuatro filas por cuatro columnas, diseñada de la siguiente forma:

	X'Y' 00	X'Y 01	XY 11	XY' 10
Z' W' = 00				
Z' W = 01				
Z W = 11				
Z W' = 10				

En este caso pueden ocurrir adyacencias de dos, cuatro, ocho o dieciséis unos (1).

Ejemplo 1.
Simplificar la función booleana cuyo mapa K asociado es:

	X'Y' 00	**X'Y 01**	**XY 11**	**XY' 10**
Z' W'= 00	**1**			**1**
Z' W= 01		**1**	**1**	
ZW= 11		**1**	**1**	
ZW'= 10	**1**			**1**

La función es:

$f(x,y,z,w) = x'y'z'w' + x\,y'z'w' + x'y'zw' + x\,y'zw' + x'y\,z'w + x\,y\,z'w + x'y\,z\,w + x\,y\,z\,w$

$= y'z'w'\,(x' + x) + y'z\,w'\,(x' + x) + y\,z'w\,(x' + x) + y\,z\,w\,(x' + x)$

$= y'z'w' + y'z\,w' + y\,z'w + y\,z\,w$

$= y'w'\,(z' + z) + y\,w\,(z' + z)$

$= y'w' + y\,w$

Ejemplo 2.
Simplificar la función booleana cuyo mapa K asociado es:

	X'Y' 00	**X'Y 01**	**XY 11**	**XY' 10**
Z' W'= 00	**1**			**1**
Z' W= 01	**1**			**1**
ZW= 11	**1**			**1**
ZW'= 10	**1**			**1**

$f(x, y, z, w) = x'y'z'w' + x'y'z'w + x'y'z\,w + x'y'z\,w' + x\,y'z'w' + x\,y'z'w + x\,y'z\,w + x\,y'z\,w'.$

Simplificando

$= x'y'z'\,(w' + w) + x'y'z\,(w + w') + x\,y'z'\,(w' + w) + x\,y'z\,(w + w')$

$= x'y'z' + x'y'z + x\,y'z' + x\,y'z$

$= x'y'\,(z' + z) + x\,y'\,(z' + z)$

$= x'y' + x\,y'$

$= y'\,(x' + x)$

$= y'$

Ejemplo 3.

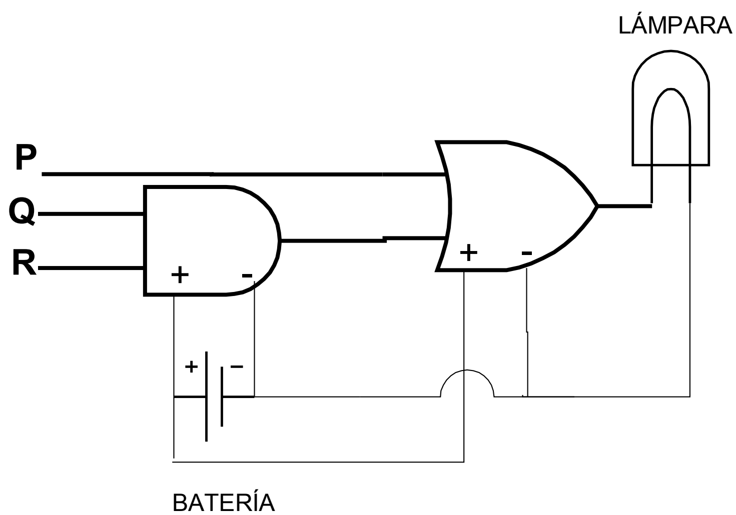
Obtener la expresión booleana reducida para el siguiente mapa K

	X'Y' 00	X'Y 01	XY 11	XY' 10
Z' W'= 00		1	1	
Z' W= 01	1			1
ZW= 11	1			1
ZW'= 10		1	1	

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z, w) &= x' y' z' w + x'y'z w + x'y z'w' + x'y z w' + x y z'w' + x y z w' + x y'z'w + x y' z w. \\
&= x' y' w (z' + z) + x' y w' (z + z') + x y w' (z' + z) + x y' w (z' + z) \\
&= x' y' w + x' y w' + x y w' + x y' w \\
&= x' y' w + x y' w + x' y w' + x y w' \\
&= y' w (x' + x) + y w' (x' + x) \\
&= y' w + y w'.
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Definición y representación de los



OBJETIVO GENERAL

Utilizar el álgebra booleana para analizar y describir el funcionamiento de las combinaciones de las compuertas lógicas, de tal manera que pueda relacionar la teoría de conjuntos, el álgebra proposicional, el álgebra booleana y las compuertas lógicas, para diseñar circuitos lógicos

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Describir cada compuerta lógica, mediante su tabla de verdad
2. Simplificar circuitos lógicos mediante la aplicación de las leyes de álgebra booleana
3. Emplear compuertas para implementar el circuito representado por una expresión booleana
4. Relacionar los conjuntos, la lógica, el álgebra booleana y las compuertas.
5. A partir de las tablas de verdad elaborar los mapas K y luego diseñar circuitos lógicos.
6. Mostrar algunas aplicaciones del álgebra Booleana y su implementación mediante circuitos lógicos

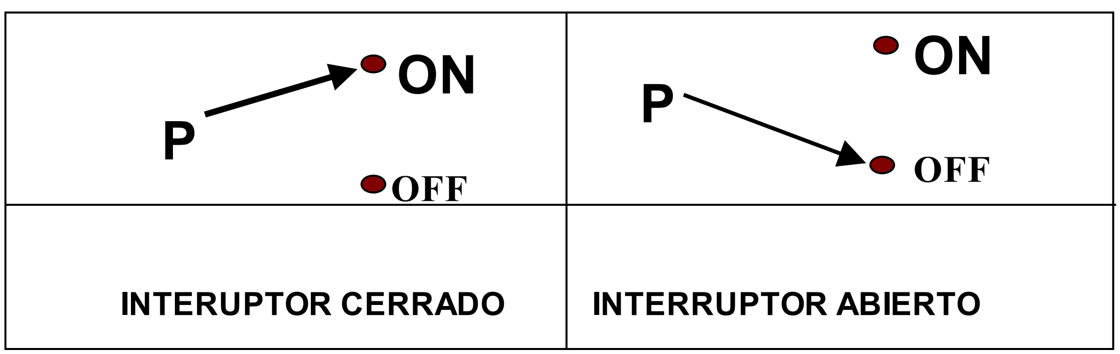
5.1 DEFINICIÓN Y REPRESENTACIÓN DE LOS CIRCUITOS

El álgebra booleana es el soporte teórico para el álgebra de los circuitos lógicos, esto significa que excepto por la terminología y su significado, el álgebra de los circuitos es idéntica al álgebra de proposiciones, con dos elementos el **0** y el **1**.

El álgebra de circuitos utiliza dispositivos de dos estados como por ejemplo el **interruptor** o **switch** (es el más sencillo), diodos rectificadores, bobinas magnéticas, transistores, entre otros; la naturaleza de los estados varía con el dispositivo así: conducción contra no-conducción, cerrado contra abierto, cargada contra descargada, magnetizada contra desmagnetizada, alto voltaje contra bajo voltaje.

Los dispositivos formados por conmutadores o interruptores que consideran las posiciones cerrada o abierta, se llaman circuitos de conmutación, la posición cerrada se simboliza por "**ON**" y la abierta por "**OFF**", un interruptor se encontrará cerrado o abierto y nunca en posición intermedia.

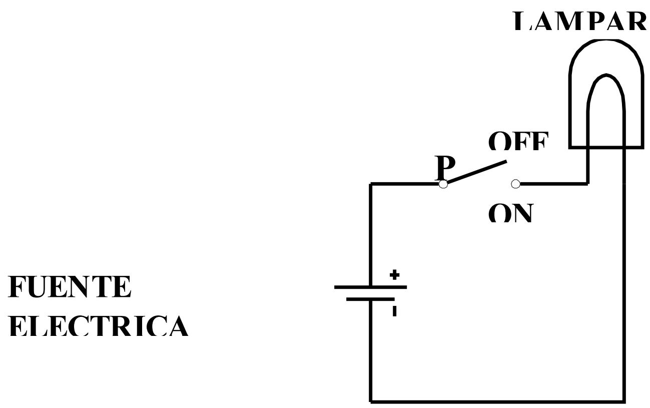
La siguiente figura muestra una representación gráfica de un conmutador.



Representación de un interruptor

Ejemplo 1.
Se conecta una lámpara a un circuito con interruptor, de tal forma que la lámpara se encienda cuando el conmutador está cerrado y se apague cuando este abierto.

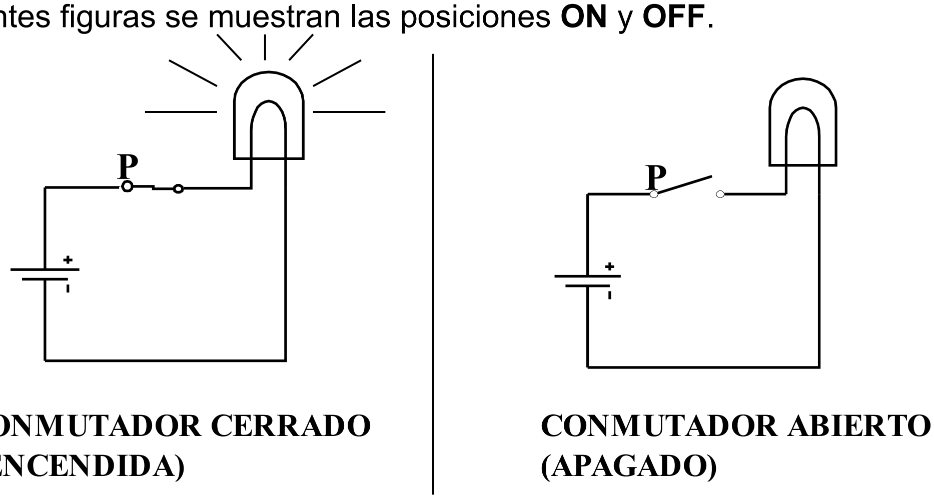
El circuito se puede representar esquemáticamente así:



Activación de una lámpara

La lámpara se encenderá siempre que se cierre el circuito, es decir, cuando **P** adquiera la posición "**ON**" y se apagará cuando se abra el circuito, o sea cuando **P** tome la posición "**OFF**".

En las siguientes figuras se muestran las posiciones **ON** y **OFF**.



Interruptor en posición ON y OFF respectivamente

El ejemplo anterior permite demostrar que un interruptor sólo puede tomar una de las dos posiciones (cerrada o abierta) y como una proposición lógica toma un solo valor de verdad (verdadera o falsa), se puede establecer una relación entre un conmutador y una proposición lógica; para esto se asigna una proposición **P** al conmutador de tal manera que si **P** es verdadera se asume que el conmutador está "cerrado" (**ON**) y si **P** es falsa el interruptor estará "abierto" (**OFF**), a estos conmutadores se les denomina circuitos lógicos.

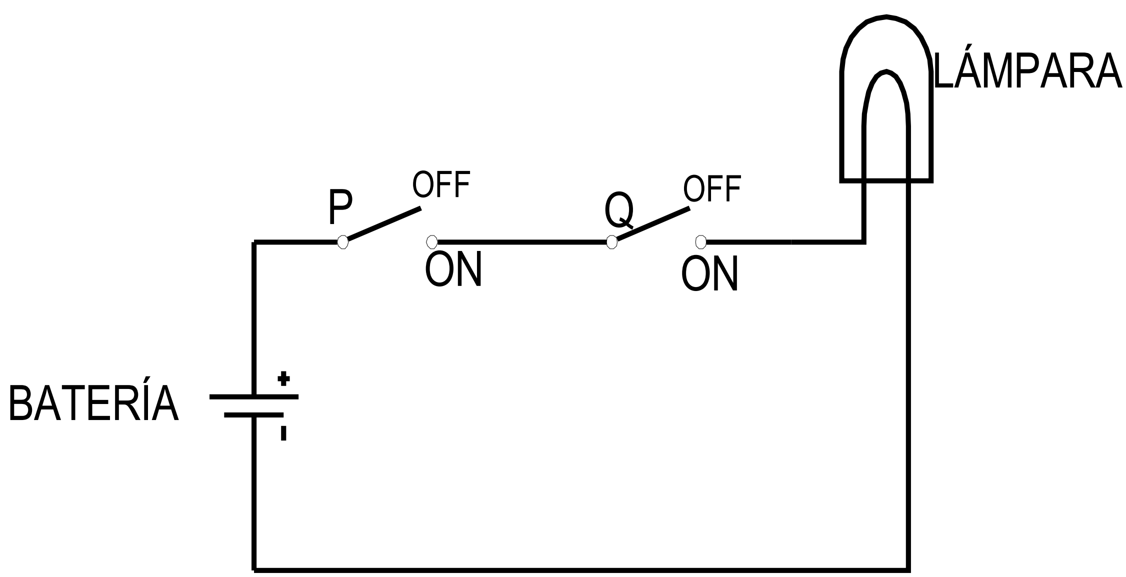
Para describir el nivel de voltaje o nivel lógico de la variable presente en los terminales de entrada y salida de un circuito se emplean términos como desactivado, activado, abierto, cerrado, **0**, verdadero, **1**, entre otros.

Cuando el nivel de voltaje es bajo se emplean términos como falso, desactivado, no, interruptor abierto y se utiliza el elemento cero (**0**) y cuando el nivel lógico es alto se usan los términos verdadero, activado, sí, interruptor cerrado y se simboliza con el uno (**1**).

5.2 CIRCUITO DE CONJUNCIÓN

Este circuito toma dos conmutadores **P y Q**, y recordando la tabla de verdad de la conjunción estudiada en el capítulo **2** se puede inferir que los interruptores **P** y **Q** deben estar conectados en serie de tal manera que si ambos están "cerrados" (**P** y **Q** verdaderas) el circuito estará "cerrado" y por consiguiente la lámpara estará encendida.

La representación del circuito de conjunción se muestra en la siguiente figura:

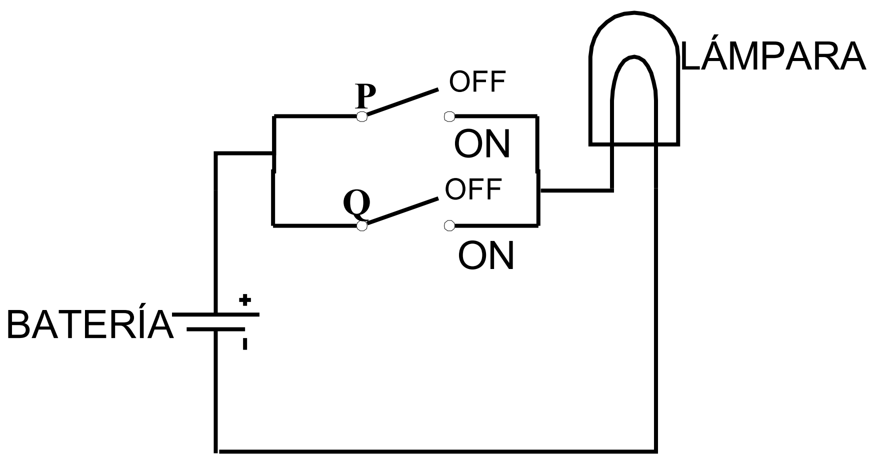


Circuito de conjunción

5.3 CIRCUITO DE DISYUNCIÓN

Analizando la tabla de verdad de la disyunción se observa que si **P** y **Q** son dos proposiciones, entonces la disyunción **P** ∨ **Q** es verdadera siempre que alguna de las dos sea verdadera, en términos de circuitos esto significa que **P** y **Q** deben estar conectados en paralelo, de tal forma que el circuito está cerrado cuando algún interruptor **P** o **Q** está cerrado, en otras palabras, la lámpara estará encendida siempre que alguno de los dos conmutadores **P** o **Q** esté cerrado.

La representación gráfica de este circuito es el siguiente:



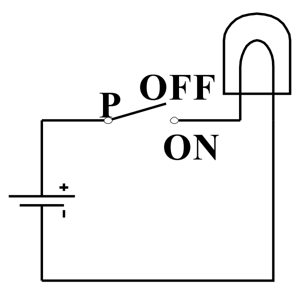
Circuito de disyunción

5.4 CIRCUITO DE NEGACIÓN

La relación entre el estado de la lámpara con la disposición del circuito lógico, se puede enunciar así: Si **P** es una proposición verdadera el conmutador estará “cerrado” y la lámpara estará encendida; análogamente si **P** es falsa el conmutador estará “abierto” y en consecuencia la lámpara estará apagada.

En la tabla de verdad de la negación (elaborada en el capítulo 2) se observa que el valor de verdad de ~**P** es el opuesto al valor de **P**, esto significa que cuando el interruptor **P** esta “cerrado” (**P** verdadera) la lámpara debe estar apagada y si el conmutador **P** esta “abierto” (**P** falso) la lámpara debe estar encendida.

El circuito de negación puede representarse gráficamente así:



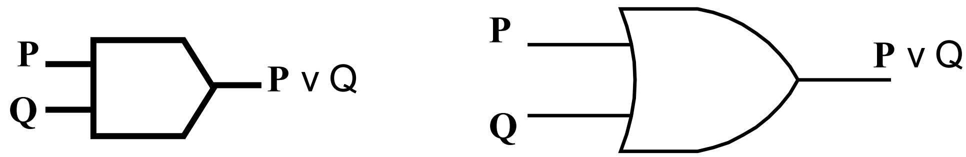
Circuito de negación

El álgebra booleana se utiliza para describir los efectos que producen las entradas lógicas sobre los circuitos lógicos y para manipular variables lógicas cuando se va a determinar el método de aplicación de una función de un circuito.

Las operaciones del álgebra booleana son la adición o suma lógica, la multiplicación o producto lógico y la complementación o inversión lógica y los dispositivos electrónicos que ejecutan cada operación se llaman compuertas lógicas.

5.5 ADICIÓN O SUMA LÓGICA.

También se llama operación **OR** o simplemente **OR**, corresponde a la disyunción de proposiciones y a la unión de conjuntos y el dispositivo que ejecuta esta operación se llama compuerta **OR**, su representación gráfica es:



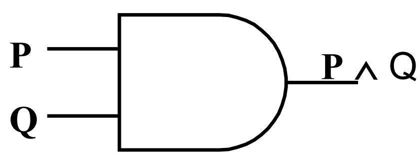
Compuerta OR

(Cualquiera de las dos representaciones es válida)

Esta compuerta tiene dos entradas que representan los estados de los conmutadores **P**, y, **Q** y una salida **P ∨ Q** que representa el estado de la lámpara.

5.6 MULTIPLICACIÓN O PRODUCTO LÓGICO

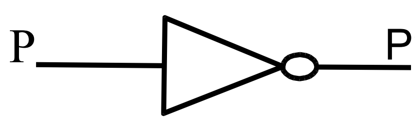
Llamada también operación **AND** o simplemente **AND**. Corresponde en lógica a la conjunción de proposiciones y a la intersección de conjuntos. El dispositivo electrónico que ejecuta esta operación se llama compuerta **AND**, tiene dos conmutadores **P** y **Q** los cuales se representan como dos entradas y una salida **P∧Q** que representa el estado de la lámpara, su presentación gráfica es:



Compuerta AND

5.7 COMPLEMENTACIÓN O INVERSIÓN LÓGICA

Se denomina también operación **NOT** y corresponde a la negación de una proposición o a la operación de complementación en conjuntos. La compuerta "**NOT**" acepta como entrada un valor **P'** y produce como salida su negación **P**. Por esta razón esta compuerta también se denomina inversor, su representación es:



Compuerta NOT

5.8 Correspondencia entre lógica – conjuntos – álgebra booleana y las compuertas lógicas.

La siguiente tabla muestra las correspondencias:

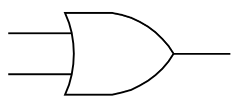
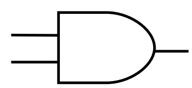
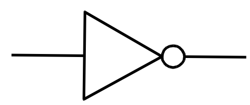
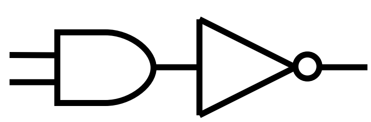
LÓGICA	**Disyunción** $P \vee Q$	**Conjunción** $P \wedge Q$	**Negación** $\sim P$
CONJUNTOS	**Unión** $A \cup B$	**Intersección** $A \cap B$	**Complemento** A’
ÁLGEBRA BOOLEANA	**Suma** X + Y	**Producto** X Y	**Inversor** X’
COMPUERTAS LÓGICAS	**OR** 	**AND** 	**NOT** 

Figura No. 10 Correspondencias: Lógica-Conjuntos-Álgebra-compuertas

Ejemplo 1.

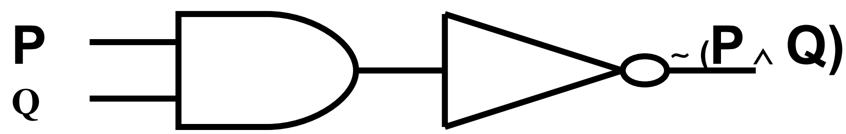
Utilizando compuertas lógicas simbolizar la proposición: **~ (P∨Q)**.
Según la tabla, las compuertas correspondientes a la disyunción y a la negación son: **OR** y **NOT** respectivamente, por lo tanto la combinación de ellas dará la compuerta solicitada, así:

P
Q

$\sim (P \vee Q)$

Ejemplo 1. ~ (P∨Q).

Ejemplo 2

Utilizando las compuertas lógicas simbolizar la proposición **~ (P ∧ Q).**
Analizando la tabla el circuito correspondiente es:

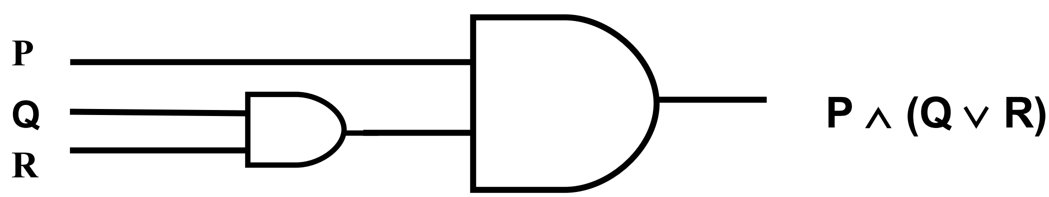


Ejemplo 2. ~ (P ∧ Q).

Ejemplo 3

Utilizando las compuertas lógicas simbolizar la proposición **p ∧ (q ∨ r)**.

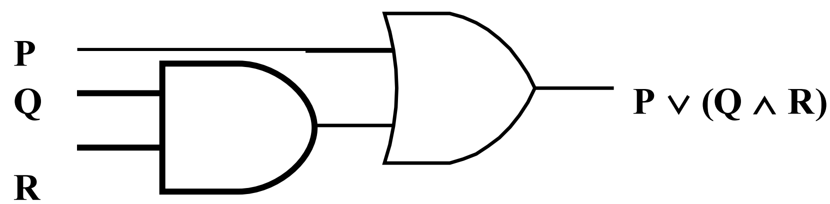
En este caso intervienen tres proposiciones y dos conectivos, por lo tanto el circuito es:



Ejemplo 3. P ∧ (Q ∨ R)

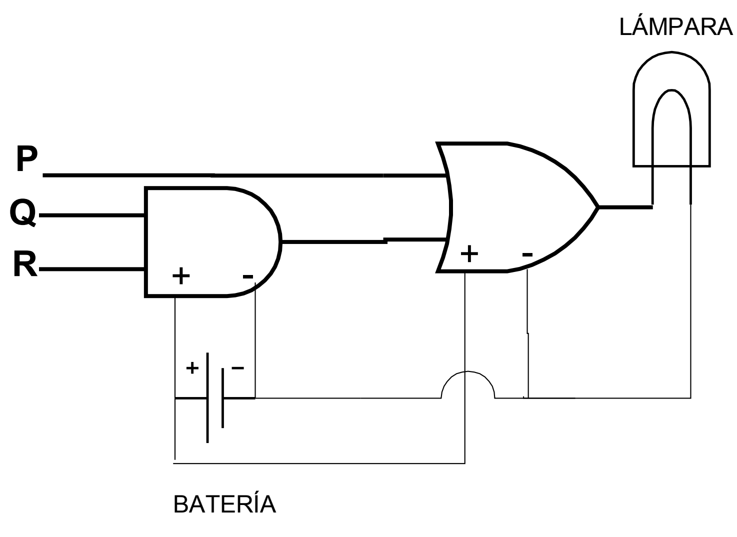
Ejemplo 4.

Diseñar el circuito que determine los valores de verdad de la proposición
P ∨ (Q ∧ R). Para diseñar el circuito primero se simboliza la proposición mediante el uso de compuertas lógicas, así:



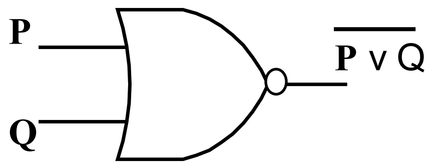
Ejemplo 4. P ∨ (Q ∧ R).

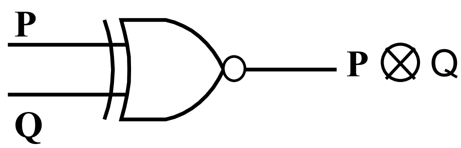
A continuación se conecta una lámpara al circuito, de tal forma que cuando la proposición es verdadera, la lámpara debe estar encendida y cuando sea falsa, la lámpara debe estar apagada. Esta conexión se representa así:



Circuito de la proposición. ejemplo 4

Otras compuertas lógicas:

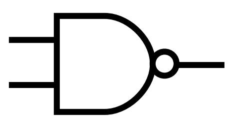




Otras compuertas lógicas

Las tres compuertas fundamentales ya mencionadas (**AND**, **OR**, **NOT**) son suficientes para escribir cualquier función boleana y por lo tanto diseñar un circuito lógico, sin embargo, se utilizan otras compuertas lógicas como **NAND**, **NOR**, **XOR** y **XNOR**

La compuerta NAND es la negación de la compuerta **AND** y se define como:
x NAND y = (x y)’ y se simboliza así:

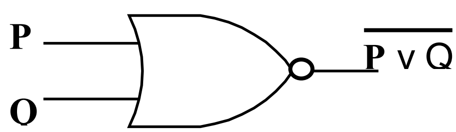


Compuerta NAND

La tabla de verdad para las compuertas **AND** y **NAND** es:

x	y	AND x y’	NAND (x y)’
0	0	**0**	**1**
0	1	**0**	**1**
1	0	**0**	**1**
1	1	**1**	**0**

La compuerta NOR, es la negación de la compuerta **OR**, se define así:
x NOR y = (x + y)’, su símbolo es:



Compu

La tabla de verdad para las compuertas **OR** y **NOR** es:

x	y	OR x + y	NOR (x + y)’
0	0	**0**	**1**
0	1	**1**	**0**
1	0	**1**	**0**
1	1	**1**	**0**

La compuerta XOR corresponde a la operación lógica disyunción exclusiva **(x ⊕ y)** y a la operación diferencia simétrica entre conjuntos. Se define como

$$\mathbf{f(x, y, z) = x \oplus y = x\,y' + x'y.}$$

El símbolo para esta compuerta es (Cualquiera de las dos representaciones es válida):

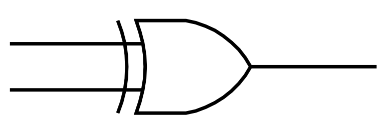


Figura No. 18 Compuerta **XOR**

La compuerta **XNOR** es la negación de la compuerta **XOR**, su símbolo se puede representar de dos maneras:

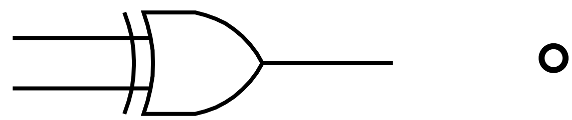


Figura No. 19 Compuerta **XNOR**

La tabla de verdad para estas compuertas es:

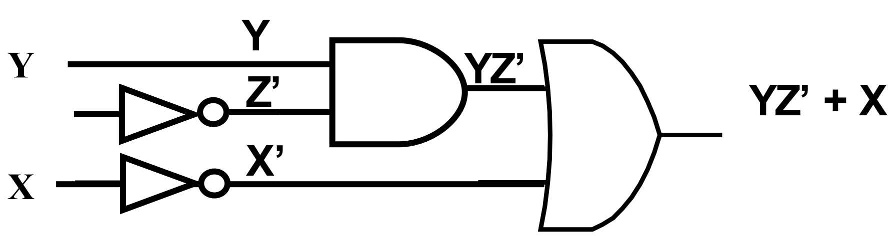
x	y	XOR x ⊕ y	XNOR (x ⊕ y)’
0	0	**0**	**1**
0	1	**1**	**0**
1	0	**1**	**0**
1	1	**0**	**1**

Se observa que la tabla de verdad de la compuerta **XNOR** es exactamente igual a la tabla de la equivalencia (o doble implicación), por lo cual esta compuerta recibe el nombre de “**comparador**”.

Ejemplo 1

Dibujar el circuito lógico de la función booleana **f (x, y, z) = y z’ + x’**.
Para diseñar un circuito lógico se emplea un “bus” de variables de entrada y sus negaciones.

Las negaciones se representan por la línea que sale de la bolita en cada variable de entrada, así:



Ejemplo 1

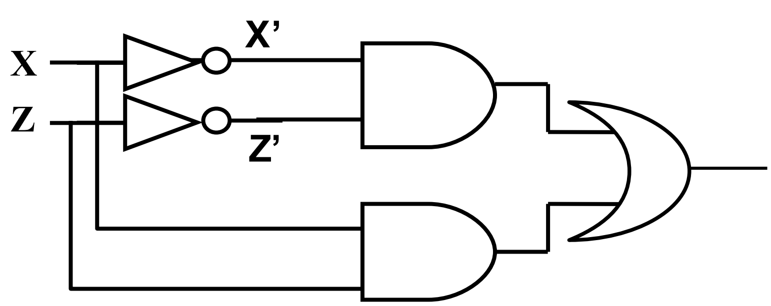
Ejemplo 2.
Escribir en forma normal disyuntiva la función f especificada en la siguiente tabla, simplificarla y dibujar el circuito lógico correspondiente.

X	Y	Z	F
0	0	0	**1**
0	0	1	**0**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**0**
1	1	1	**1**

Recordando la sección 5.9 del capítulo anterior, para la forma normal conjuntiva se consideran los unos (1), por lo tanto la función considerada es:

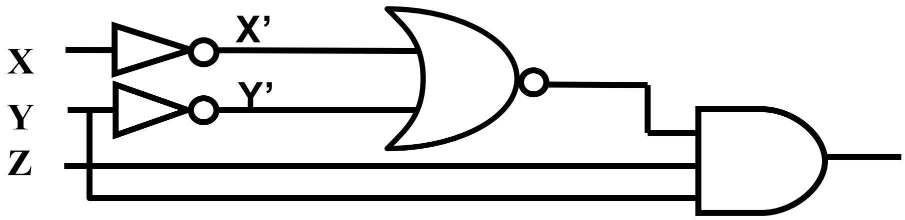
$$\begin{aligned}
\mathbf{F(x, y, z)} &= \mathbf{x' y' z' + x' y z' + x y' z + x y z} \\
&= \mathbf{x' y' (y' + y) + x z (y' + y)} \\
&= \mathbf{x' z' (1) + x z (1)} \\
&= \mathbf{x' z' + x z}
\end{aligned}$$

y el circuito correspondiente es el siguiente:



Ejemplo 2

Ejemplo 3.
Escribir una expresión booleana para la salida **f (x, y, z)** del siguiente circuito.



Ejemplo 3

La función correspondiente es: **f(x, y, z) = (x' + y')' (y z)**.

Capítulo 5

Aplicación de los circuitos lógicos

Aplicaciones de los circuitos lógicos

Algunas aplicaciones elementales como los circuitos aritméticos digitales y los codificadores y decodificadores, entre otros, muestran la gran variedad de situaciones en las que se pueden utilizar los circuitos lógicos, si se tiene en cuenta que el diseño digital ha invadido casi todo el entorno del hombre, empezando por los electrodomésticos que se usan en el hogar hasta los más sofisticados computadores, robots y demás equipos de la industria.

Circuitos aritméticos digitales.

Una unidad aritmética lógica está fundamentalmente constituida por un dispositivo combinacional que permite dos entradas, las cuales pueden ser números o alguna información codificada, en la cual se realizan todas las operaciones matemáticas o lógicas que lleva a cabo un computador. A continuación se analiza la forma de construir un semisumador y un sumador.

Circuito semisumador

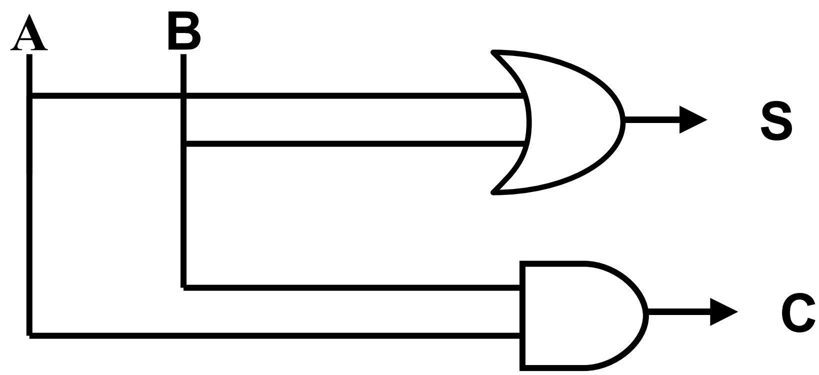
Diseñar un CIRCUITO SEMISUMADOR consiste en construir un circuito lógico que sume dos números binarios de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 0 \\ +\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +\ 1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

La suma de dos números binarios puede estar conformada por dos cifras, como en el caso de **1 + 1 = 1 0**; por esto en el diseño de un circuito semisumador (ha) se debe tener en cuenta una salida adicional denominada el **ARRASTRE**. La tabla de verdad para este caso es la siguiente:

A	B	S	C
0	0	**0**	**0**
0	1	**1**	**0**
1	0	**1**	**0**
1	1	**0**	**1**
		Suma	**Arrastre**

La salida S la genera una compuerta **XOR** (o - exclusiva), de tal modo que **S = A ⊕ B**; mientras que la salida C (Arrastre) corresponde a una compuerta AND tal que,**C = AB**, por lo tanto el circuito lógico se denomina un SEMISUMADOR (HA) y se representa así:



Semisumador

Su representación esquemática es:

Representación esquemática de un sumador

El circuito semisumador también se puede realizar de la siguiente manera:

$$S = A \oplus B = A\,B' + A'B$$

Aplicando la doble negación se tiene:

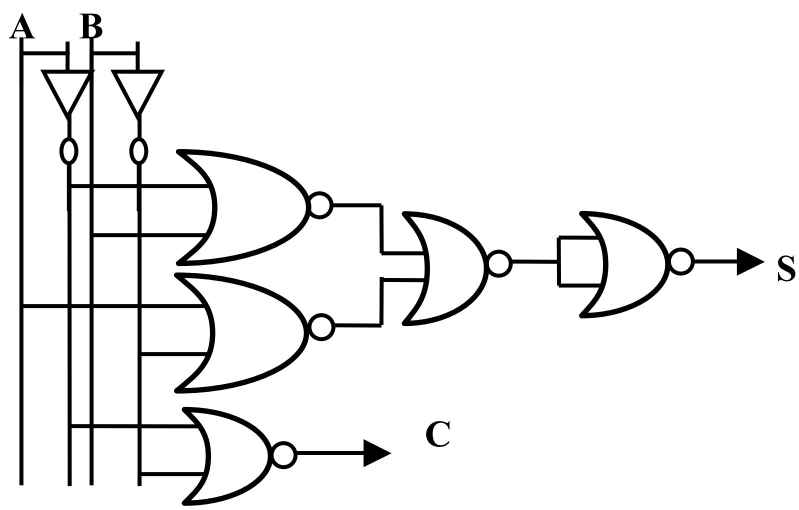
$$(S')' = [(A B' + A'B)']' = [(A B')' (A'B)']'$$
$$S = [(A' + B) (A + B')]' = \{[(A' + B)' + (A + B')']'\}'$$

$$S = \{ [(A' + B)' + (A + B')']' \}'$$

Análogamente, la salida **C = AB** será:

$$\mathbf{C = (C')' = [(AB)']' = (A' + B')'}$$

Con lo cual el circuito lógico es:



Circuito lógico semisumador

5.10.1.2 CIRCUITO SUMADOR

Para sumar números binarios de n- bits se procede así:
Dados los números binarios

$$\mathbf{A = A_n \; A_{n-1} \; \ldots A_2 \; A_1 \; A_0 \quad (n\text{- bits})}$$
$$\mathbf{B = B_n \; B_{n-1} \; \ldots B_2 \; B_1 \; B_0 \quad (n\text{- bits}).}$$

La suma se empieza por los bits menos significativos A , B

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C\;\; S} \end{array}$$

Donde **S**, es la suma generada por estos bits y **C** es el bit de arrastre de la primera suma, el cual pasa a ser sumado en la siguiente columna y así sucesivamente, como se muestra en el siguiente esquema:

	C_2	C_1	C_0	
A =	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_0}$
B =	$\mathbf{B_3}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_0}$
A + B =	$\mathbf{C_3}$ $\mathbf{S_3}$	C_2 $\mathbf{S_2}$	C_1 $\mathbf{S_1}$	C_0 $\mathbf{S_0}$

El resultado será entonces: $\mathbf{A + B = C_3 \; S_n \; \ldots S_2 \; S_1 \; S_0}$, donde C es el bit más significativo .
Cuando se suman tres dígitos **A**, **B**, **C**, se genera una suma **S** y un arrastre **C** un circuito que realice esta operación recibe el nombre de **sumador**. A continuación se muestran la tabla de verdad, el mapa de Karnaugh y el circuito lógico asociado.

ENTRADAS			**SALIDAS**	
C	**A**	**B**	**S**	**C**
0	0	0	**0**	**0**
0	0	1	**1**	**0**
0	1	0	**1**	**0**
0	1	1	**0**	**1**
1	0	0	**1**	**0**
1	0	1	**0**	**1**
1	1	0	**0**	**1**
1	1	1	**1**	**1**

Donde **C** es el arrastre de entrada y **C** es el arrastre de salida.

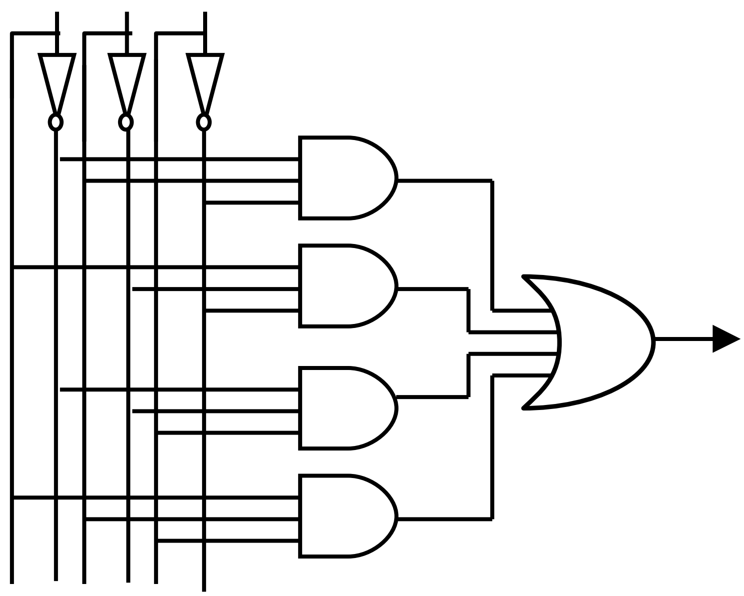
Los mapas de Karnaugh deben ser para tres variables, los dos sumandos **A**, **B** y el arrastre de entrada **C** . El mapa **K** para la suma **S** es:

	A'	**A'**	**A**	**A**
C'		**1**		**1**
C	**1**		**1**	
	B'	**B**	**B**	**B'**

La expresión booleana en forma de suma de productos es:

$$S = A'\ B\ C' + A\ B'\ C' + A'\ B'\ C + A\ B\ C.$$

El circuito lógico para la salida es:



Circuito lógico sumador

Se deja como ejercicio construir el mapa k y el circuito lógico para el arrastre de salida.

5.10.2 Control de una estación de combustible

Una estación de combustible se surte de tres tanques: **x**, **y**, **z**. Los tanques **x**, y deben abastecerse simultáneamente para sostener el flujo, el cual puede ser mantenido solo por el tanque **z**, pero en ningún caso el tanque **z** debe funcionar si lo está haciendo los tanques **x**, **y**. Construir un circuito lógico que controle esta situación.

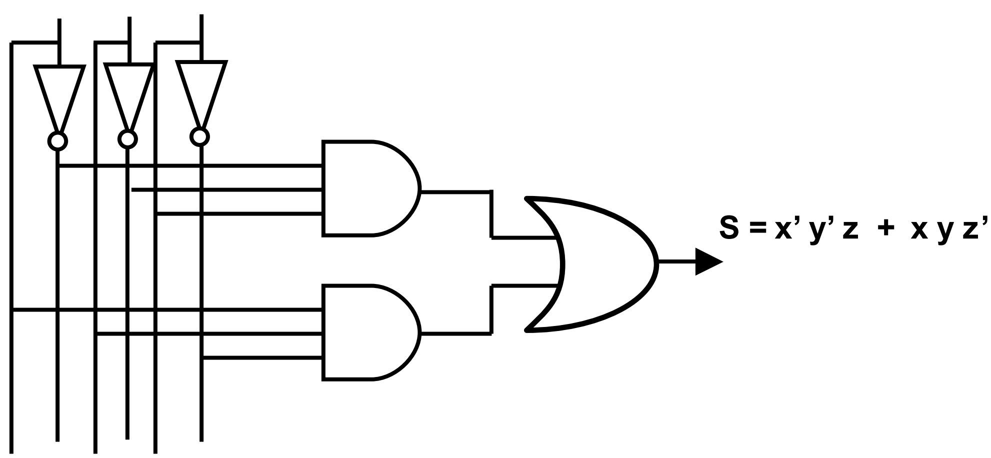
La tabla de verdad asociada a esta situación es la siguiente:

x	y	z	S
0	0	0	**0**
0	**0**	**1**	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	**1**	**0**	**1**
1	1	1	**0**

El mapa de Karnaugh es:

	X'	**X'**	**X**	**X**
Z'			**1**	
Z	**1**			
	Y'	**Y**	**Y**	**Y'**

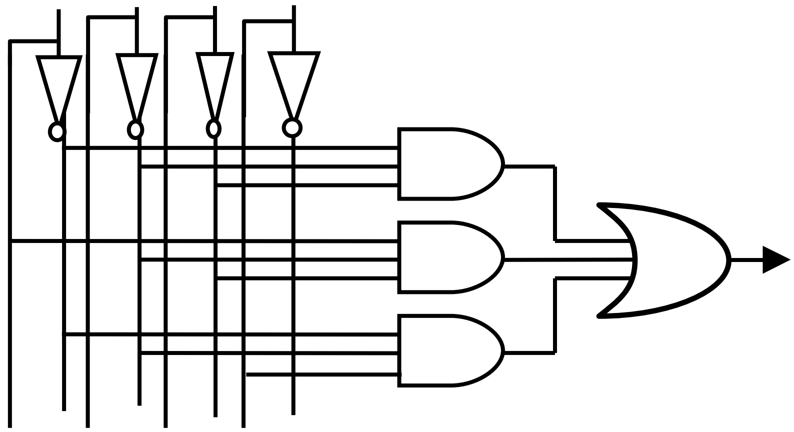
La expresión booleana correspondiente es: **S = x' y' z + x y z'**
El circuito lógico correspondiente es:



Circuito lógico control estación de combustible

AUTO EVALUACIÓN No.5

1. En el siguiente circuito escribir la función de salida, elaborar la tabla de verdad.



2. Teniendo en cuenta el circuito anterior

a. Escribir la función booleana
b. Diseñar el circuito utilizando la técnica NAND
c. Diseñar el circuito utilizando la técnica NOR

3. Teniendo en cuenta la siguiente tabla de verdad, responda los siguientes literales:

a) Encuentre la función booleana utilizando la forma norma conjuntiva y diseñe el circuito
b) Utilice la técnica NAND y diseñe el circuito
c) Utilice la técnica NOR y diseñe el circuito

x	**y**	**z**	**f**
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

d) ***4. Teniendo en cuenta la siguiente tabla de verdad***

x	**y**	**z**	**f**
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**1**
1	0	1	**0**
1	1	0	**0**
1	1	1	**0**

a) Utilizando la forma normal disyuntiva encontrar la función booleana y diseñar el circuito correspondiente.
b) Utilizando la técnica NAND, diseñar el circuito
c) Utilice la técnica NOR y diseñe el circuito correspondiente.

5. Construir el mapa de Karnaugh, la expresión booleana y el circuito lógico que permita controlar una lámpara desde tres interruptores colocados en los pasillos de una edificación. Tenga en cuenta la siguiente tabla de verdad.

x	**y**	**z**	**L**
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**1**
1	0	1	**0**
1	1	0	**0**
1	1	1	**1**

INFORMACIÓN DE RETORNO

1. La función de salida es: **f(x, y, z) = x'y'z' + x y'z' + x'y'w**. La tabla de verdad correspondiente es:

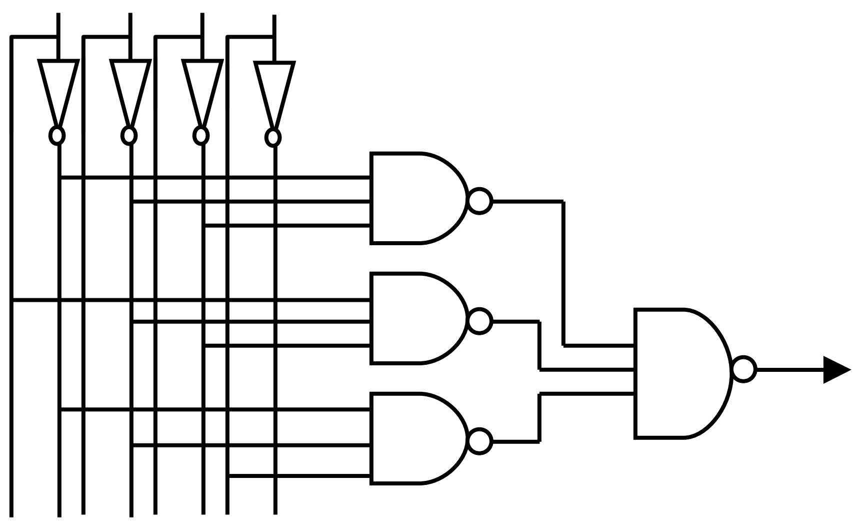
x	y	z	w	x'	y'	z'	x'y'z'	x y'z'	x'y'w	f
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	**1**
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	**1**
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	**0**
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	**1**
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	**0**
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	**0**
0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	**0**
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	**0**
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	**1**
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	**1**
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	**0**
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	**0**
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	**0**
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	**0**
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	**0**
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	**0**

2. a) **f(x, y, z, w) = x'y'z' + x y'z' + x'y'w**

b) El circuito con la técnica **NAND** es:

f = [(x'y'z' + x y'z' + x'y'w)']'

f = [(x'y'z')' (x y'z')' (x'y'w) '] '

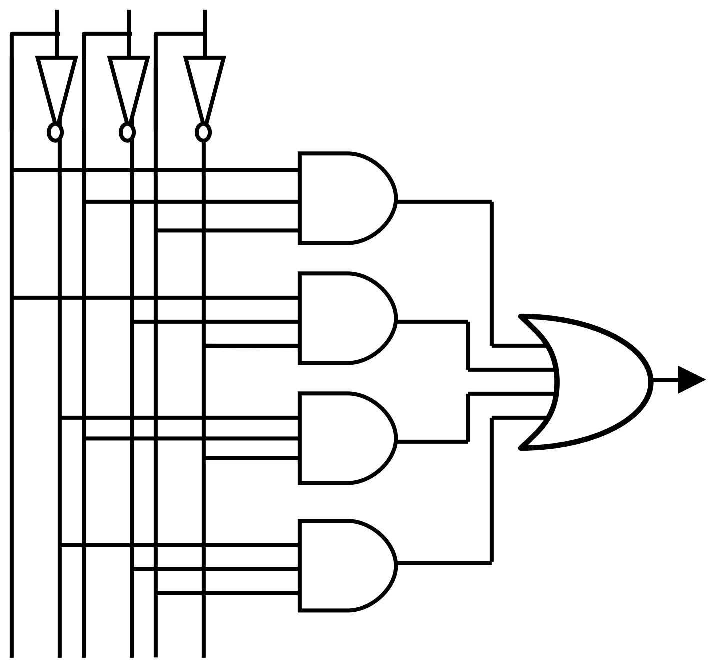


	X'	X'	X	X
Z'		1		1
Z	1		1	
	Y'	Y	Y	Y'

La expresión booleana correspondiente es:

$$L = x\,y\,z + x\,y'\,z' + x'\,y\,z' + x'\,y'\,z$$

El circuito lógico es:



EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN No. 5

1. En un proceso de producción hay tres motores de los cuales sólo pueden trabajar dos a la vez, además, ningún motor puede funcionar si no está trabajando un cuarto motor **W** que hace circular el aceite lubricante. Construir un circuito lógico que controle estos cuatro motores, teniendo la siguiente tabla de verdad:

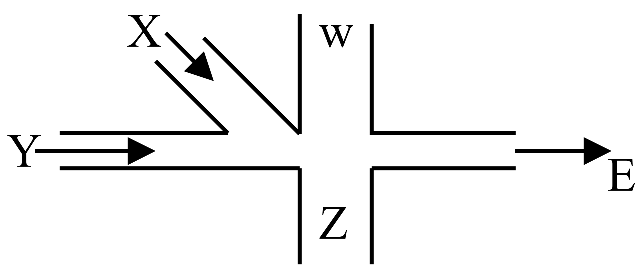
x	y	z	w	F
0	0	0	1	**0**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	1	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	0	1	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**
1	1	1	1	**0**

2. Diseño de una alarma:

En una central de control de tráfico un panel muestra los puntos neurálgicos y enciende una luz de alarma cuando las condiciones mínimas de seguridad previstas no se dan.

La siguiente figura muestra uno de esos puntos neurálgicos, en el cual pueden entrar en **E** sin peligro de colisión al mismo tiempo vehículos de:

a) xz b) zw c) Solamente x, y, w, ó z.



Diseñe el circuito lógico que controla la alarma. Tenga en cuenta la siguiente tabla de verdad

ENTRADA				SALIDA	
x	**y**	**z**	**w**	**ALARMA**	**ACEPTABLE**
0	0	0	0	**0**	**1**
0	0	0	1	**0**	**1**
0	0	1	0	**0**	**1**
0	0	1	1	**0**	**1**
0	1	0	0	**0**	**1**
0	1	0	1	**1**	**0**
0	1	1	0	**1**	**0**
0	1	1	1	**1**	**0**
1	0	0	0	**0**	**1**
1	0	0	1	**1**	**0**
1	0	1	0	**0**	**1**
1	0	1	1	**1**	**0**
1	1	0	0	**1**	**0**
1	1	0	1	**1**	**0**
1	1	1	0	**1**	**0**
1	1	1	1	**1**	**0**

RESPUESTAS A EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN No. 5

1. La expresión booleana correspondiente es:

f (x, y, z) = x y z’ w + x y’ z w + x’ y z w, la cual puede ser escrita como:

f (x, y, z) = x w (y z’ + y’ z) + x’ y z w.

2. La ecuación booleana es:

A = x w + y w + y z + x y

= W (x + y) + y (x + z)

BIBLIOGRAFÍA

- COPI, Irving, COHEN, Carl. Introducción a la Lógica. Limusa, Mexico 2002.
- GOMEZ, Carlos, GOMEZ, German, BOTERO, William. Matemática Digital. Mc Graw Hill. Bogotá 1998.
- SCHEINNERMAN, Edward. Matemáticas Discretas. Thomsom-Learning. Mexico 2001.
- LIPSCHUTZ, Seymor. Teoría de Conjuntos. Mc Graw Hill. Bogotá 1980.
- SMITH, Kart. Introducción a la Lógica Simbólica. Iberoamericana. Mexico 1991.
- GALINDO, Nubia Janeth. Lógica Matemática. Unad. Colombia 1998.
- SUPPES, Patrick, HILL, Shirley. Introducción a la Lógica Matemática. Reverté. Colombia 1976.
- GUTIERREZ, Fabio. Lógica. Una síntesis didáctica. Fund. Universitaria de Boyacá. Colombia 2001.

Direcciones de sitios web.

http://www.cibernous.com/logica/

http://www.monografias.com/trabajos10/clasi/clasi.shtml

http://www.monografias.com/trabajos/iartificial/pagina4_1.htm

http://www.ucsm.edu.pe/rabarcaf/Introducci%C3%B3n%20a%20la%20L%C3%B3gica/2.%20L%C3%B3gica%20Proposicional.doc

http://docencia.udea.edu.co/SistemasDiscretos/contenido/capitulo_01.html

ANEXO

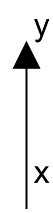
5.7 RELACIÓN DE ORDEN EN UN ÁLGEBRA BOOLEANA

Un conjunto A con un álgebra booleana definida, debe ser parcialmente ordenado (tema tratado en la sección 1.6), es decir, sus elementos deben cumplir las propiedades de la relación de orden: Reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Sí A es el conjunto de los números enteros con el álgebra booleana definida en la sección 5.4 y una relación de orden parcial $\leq$ (menor o igual), entonces para todo x, y, z elementos de A, se debe cumplir:

1. **Reflexiva:** $x \leq x$
2. **Antisimétrica:** $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \rightarrow x = y$
3. **Transitiva:** $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \rightarrow (x \leq z)$

En un álgebra de boole $x \leq y$ se define como $x + y = y$ para indicar que el elemento x es "menor o igual" a y, se representa gráficamente como el siguiente diagrama de línea dirigida de x hacia y:



Así $0 \leq 1$ porque $0 + 1 = 1$.

En un álgebra booleana definida sobre un conjunto A con la adición (+) y el producto (.) como operaciones binarias y la igualdad (=) como relación de equivalencia, entonces, para cualesquier par de elementos x, y del conjunto A las siguientes afirmaciones son equivalentes:
Sí $x \leq y$, entonces:

1. $x + y = y$
2. $x.\, y = x$
3. $x' + y = 1$
4. $x.\, y' = 0$