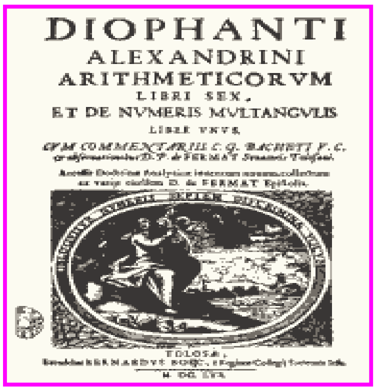
MÓDULO

ÁLGEBRA, TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

(Segunda Edición)


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

Jorge Eliécer Rondon Duran

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA – UNAD –
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, TECNOLOGÍA E INGENIERÍA
UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS

Bogotá D. C, 2007

PRESENTACIÓN DEL CURSO

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Estimados Estudiantes Bienvenidos al curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. La matemática como ciencia a través de la historia ha buscado fundamentos sólidos que garanticen su validez y rigurosidad, así el espectro de ésta ciencia es muy amplio, pero muy interesante, basta con repasar un poco el camino que inicia con la Aritmética, la Geometría, el Álgebra, siguiendo hasta áreas más avanzadas como la Teoría de conjuntos, Geometría Diferencial y otros. Todo con el fin de dar a la sociedad una *Herramienta Formal* que permita demostrar principios y definiciones para el buen uso en las áreas del saber.

En este orden de ideas, el curso que nos ocupa en este material, presenta diversas temáticas que hacen parte de esa gran herramienta formal. Las temáticas que se exponen son muy útiles para cualquier estudiante de un programa universitario, están desarrolladas en un lenguaje sencillo, pero con gran rigor matemático, ya que el propósito fundamental es que los estudiantes adquieran conocimientos sólidos en las áreas de **Álgebra**, **Trigonometría**, **Geometría Analítica**, **Sumatorias** y **Productorias,** que les permita transitar de manera muy dinámica por áreas más avanzadas de matemáticas o afines.

El curso esta estructurado por unidades que a su vez esta conformadas por capítulos y éstos por secciones. La primera unidad es de Álgebra, cuyos capítulos son las Ecuaciones y las Inecuaciones, dos temáticas muy interesantes y de gran uso en campos de la Ingeniería, Administración y demás. La segunda unidad contempla lo referente a funciones, además del análisis de la trigonometría analítica y la Hipernometría, cuyos capítulos son precisamente las Funciones, la trigonometría y la Hipernometría; término que acuñamos para hacer referencia a las funciones hiperbólicas. Es pertinente resaltar que el núcleo de las Matemáticas son en análisis de las funciones, también la gran aplicación de la trigonometría en estudios de Ciencias Experimentales, Ingeniería, Ciencias Agrarias y otros. La tercera unidad contempla los capítulos de Geometría Analítica, Sumatorias y Productorias, temáticas muy particulares y de gran importancia en diversas áreas, como la Astronomía, Física, Ingeniería, Estadística, Cálculo y otras.

El proceso de análisis, comprensión e interiorización de las temáticas propuestas, son fundamentales para poder transitar en posteriores áreas del conocimiento propias de un programa académico universitario. Pero también son una buena herramienta para resolver un gran numero de problemas que se pueden solucionar con modelos matemáticos, como las ecuaciones, las inecuaciones, las funciones, las sumatorias, las productorias y la trigonometría, entre otras.

El curso requiere algunos conocimientos previos de Aritmética, Álgebra Elemental y Geometría Plana y Espacial, los cuales son fundamentales para poder avanzar adecuadamente a través del curso. Pero si por alguna circunstancia dichos conocimientos son requeridos, se pueden consultar en el curso de Matemáticas Básicas, el cual esta disponible para cuando sea requerido.

Cada temática tiene unos principios, se presentan sus propiedades, sus teoremas, axiomas, que soportan su fundamento. También se exponen ejemplos modelos con su respectivo desarrollo que ilustran la profundización de las mismas, finalizando con ejercicios propuestos, que presentan su respuesta, para que los estudiantes puedan confrontar lo realizado con lo requerido.

Para buscar una buena comprensión de los conocimientos, es pertinente desarrollar la metodología que la UNAD propone en su modelo académico-pedagógico, el cual describe diversos momentos desde el trabajo independiente, trabajo en pequeño grupo colaborativo, tutorías de pequeño grupo e individuales y los encuentros de gran grupo, cada uno son muy importantes y buscan que el estudiante desarrolle su proceso de formación de manera dinámica y participativa.

Al final de cada unidad se presenta una auto evaluación que es donde el estudiante demuestra hasta donde ha desarrollado sus competencias cognitivas, meta cognitivas, argumentativas, propositivas y demás, dándole transito a la profundización y transferencia de los conocimientos en el área que nos ocupa.

No sobra hacer énfasis que para aprender matemáticas, es fundamental la motivación intrínseca, querer hacerlo, tener paciencia, algo de perspicacia, sentido lógico y muchas ganas de enfrentarse a más y más retos.

Es claro que aprender matemáticas no es fácil, pero desarrollando un buen trabajo académico, utilizando los lineamientos que se han presentado, el grado de comprensión e interiorización de los conocimientos en dicha área será muy alto.

¡ ***Animo y muchos éxitos en tan interesantes temáticas***!

TABLA DE CONTENIDO

UNIDAD UNO: **ECUACIONES E INECUACIONES**

CAPITULO UNO: **Las Ecuaciones** 5
Introducción 6
Objetivo General y Objetivos Específicos 6
Ecuaciones de Primer Grado 7
Leyes de Uniformidad 7
Ley de Producto Nulo 8
Ecuaciones de Primer Grado con Una Incógnita 8
Ecuaciones de Primer Grado con Dos Incógnitas 14
Ecuaciones de Primer Grado con Tres Incógnitas 31
Ecuaciones de Primer Grado: Problemas de Aplicación 41
Ecuaciones de Segundo Grado 57
Ecuaciones de Grado ***n*** (Para ***n*** par) 64
Problemas con Ecuaciones de Segundo Grado 67
Ecuaciones de Tercer Grado 72
Ecuaciones Polinómicas 76
Ecuaciones Racionales 83
Fracciones Parciales 87
Ecuaciones con Radicales 94

CAPÍTULO DOS: **Las Inecuaciones**
Introducción 96
Objetivo General y Objetivos Específicos 96
Desigualdades 97
Intervalos 98
Inecuaciones Lineales 103
Inecuaciones Racionales 106
Inecuaciones con Dos Incógnitas 114
Inecuaciones Cuadráticas 122
Inecuaciones Mixtas 126
Problemas de Inecuaciones con Una Variable 130
Problemas de Inecuaciones con Dos Variables 134
Ecuaciones e Inecuaciones con valor Absoluto 138
Valor Absoluto 138
Ecuaciones con valor Absoluto 139
Inecuaciones con Valor Absoluto 141

UNIDAD UNO

ECUACIONES E INECUACIONES

CAPÍTULO UNO: LAS ECUACIONES

$$\beta x^{\lambda} = \delta$$

INTRODUCCIÓN

A través de la historia, las ecuaciones han sido de gran importancia en las Matemáticas y otras ciencias, desde los babilonios, pasando por los egipcios y los griegos, hasta nuestra época, las ecuaciones han sido el pan de cada día para resolver problemas donde se requiere saber el valor de una "incógnita".

Las ecuaciones son igualdades que se hacen verdaderas para valores específicos, por ejemplo: Si tenemos: $2x + 5 = 9$, se debe buscar el valor de x que al multiplicarlo por 2 y sumado con 5 nos resulte nueve. Es así que para x = 2, si lo reemplazamos en la igualdad 2(2) + 5 = 9, ésta será verdadera. Entonces, resolver una ecuación es hallar el valor o valores de la incógnita que hagan verdadera dicha igualdad. A su vez, las soluciones pueden ser *reales* o *imaginarias*, según el caso. Por ejemplo si tenemos $x^2 – 4 = 0$, se puede verificar que los valores que puede tomar la incógnita son $x = 2$ y $x = -2$. Pero si se tiene $x^2 + 4 = 0$, la solución no es real, ya que NO existen número real que al elevarlo al cuadrado y sumado con 4 resulte cero, luego la solución es imaginaría $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$. (Recordemos los números imaginarios del curso de Matemáticas Básicas).

Existen diferentes clases de ecuaciones, según el grado del polinomio que la describe, según el número de variables, según el tipo de coeficientes. De acuerdo al grado del polinomio, existen ecuaciones de primer grado, de segundo grado, etc. De acuerdo al número de variables, se tienen ecuaciones de una variable, ecuaciones de dos variables, etc. Según el tipo de coeficientes, se tienen ecuaciones de coeficientes enteros, de coeficientes racionales, de coeficientes reales.

Para resolver ecuaciones, existen diversas técnicas matemáticas que depende del tipo de ecuación, pero siempre se debe tener presente el principio de operaciones opuestas: Suma – Resta, Producto – Cociente, Potenciación – radicación, potenciación – Logaritmación.

Para un el buen dominio en la resolución de ecuaciones, se requiere mucho ánimo, paciencia, desarrollar diversos y un número adecuado de ejemplos modelos.

Objetivo general:

Que los estudiantes identifiquen claramente las ecuaciones, su clasificación, las técnicas de resolución según el tipo de ecuación y la forma de plantearlas en situaciones descriptivas.

Objetivos Específicos:

1. Resolver adecuadamente ecuaciones de primer grado, de segundo grado, de tercer grado con una incógnita.
2. Resolver sistemas de ecuaciones de dos y tres incógnitas por los métodos grafico, eliminación y determinantes.
3. Solucionar problemas modelos utilizando como modelo matemático las ecuaciones.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

$\boxed{\beta x + \varphi = \varsigma}$

Entender las ecuaciones requiere conocer claramente algunos conceptos que son comunes a todo tipo de ecuación:

Constante: Son términos que toman valores fijos, en álgebra se utilizan por lo general las primeras letras del alfabeto: a, b, c, … Todos los números en esencia son constantes, por ejemplo en la expresión $ax^2 + bx + c$ los términos a, b, c son constantes.

Variable: Se considera todo aquello que puede cambiar, en Matemáticas por lo general se utilizan las últimas letras del alfabeto x, y, z w,… para el caso de $ax^2 + bx + c$, la variable es x, otro caso por ejemplo, la expresión: $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, las variables son x e y.

A manera de ejercicio identifique las variables y constantes en las siguientes ecuaciones, será un ejercicio muy motivante.

$$4x^3 + 5y^2 - 7z = 0$$

$$ax^3 + by^2 + pw = 0$$

Las ecuaciones de primer grado se pueden clasificar de la siguiente manera:

Ecuaciones de primer grado con una incógnita: $4x - 5 = x + 2$
Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas: $4x - 3y = 0$
Ecuaciones de primer grado con tres incógnitas: $7x - 6y + 2z = 1$
Así sucesivamente.

Por lo general, la solución de ecuaciones se enmarca dentro del conjunto de los reales, exceptuando los casos donde la solución no es real, como el caso donde la solución presenta raíces con índice par de cantidades negativas.

Leyes de Uniformidad:

Es pertinente recordar las leyes de uniformidad, que son muy útiles a la hora de resolver ecuaciones.

SUMA Y PRODUCTO:

Sean a, b, c y d números reales; tal que a = b y c = d. entonces:

1. a + c = b + d
2. a + c = b + c
3. a x c = b x d
4. a x c = b x c

RESTA Y COCIENTE:

Sean a, b, c y d números reales; tal que a = b y c = d. entonces:

5. a - c = b - d
6. a - c = b - c
7. a / c = b / d   Para $c \neq 0$
8. a / c = b / c   Para $c \neq 0$

POTENCIA Y RAIZ:

Sean a, b, c y d números reales; tal que a = b y c = d. entonces:

9. $a^c = b^d$
10. $c^a = d^a$
11. $\sqrt[c]{a} = \sqrt[c]{b}$ Para $a \geq 0$ además $c \in Z^+$ y $c \geq 2$

Ley del producto nulo:

Sean a y b números reales, entonces:

12. a x b = 0 si, y solo si, a = 0 ó b = 0

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA:

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita son de la forma $ax + b = c$, siendo a, b y c las constantes y x la variable. El valor de *a* puede ser entero, racional o real, pero nunca cero. Ejemplos de este tipo de ecuaciones: $3x - 5 = 0$ que corresponde a una ecuación de coeficiente entero y expresión entera. $\frac{1}{3}x - \frac{2}{5} = 0$, ecuación de coeficiente racional y expresión entera. $\frac{3x-2}{5} = 8$, ecuación de coeficiente entero y expresión racional.
Las ecuaciones de primer grado se caracterizan porque a incógnita (variable) tiene como exponente la unidad; por lo cual, la solución es única, esto quiere decir que éste tipo de ecuaciones tienen "Una Sola solución".

Resolución: Las ecuaciones de primer grado con una incógnita, se pueden resolver por diversos métodos, se analizarán algunos, siendo el método axiomático el más recomendado.

METODO EGIPCIO: Conocido también como la Regula Falsa. En algunos libros egipcios y chinos, se ha encontrado un método para resolver ecuaciones llamado Regula Falsa o Falsa Posición. El método consiste que a partir de la ecuación dada, se propone una solución tentativa inicial, la cual se va ajustando hasta obtener la solución más aproximada.

El principio es que dada la ecuación, *ax = b* suponemos una solución tentativa x_o, reemplazando en la ecuación así: $ax_o = b$, como no se cumple esta solución, se hace un ajuste de la siguiente manera: $x_1 = \frac{b}{b_o} x_o$ la cual es una solución de la ecuación original, ya que: $a\left[\frac{b}{b_o} x_o\right] = b$ Siendo b_o el valor obtenido para x_o

Algunos ejemplos nos pueden aclarar este método.

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación: $x + \frac{x}{4} = 12$

Solución:

Proponemos como $x_o = 4$, luego: $4 + \frac{4}{4} = 12 \Rightarrow 5 = 12$ lo cual NO es cierto. Se hace el ajuste así: $x_1 = \frac{12}{5}$ ahora: $\frac{12}{5} x 4 = \frac{48}{5}$ Esta es la solución.

Ejemplo 2:

Dada la ecuación $2x + \frac{x}{5} = 8$ Hallar el valor de x que haga verdadera la igualdad.

Solución.

Solución tentativa inicial $x_o = 5$, reemplazamos: $2(5) + \frac{5}{5} = 8 \Rightarrow 11 = 8$. Como No es cierto se hace el ajuste: $x_1 = \frac{8}{11}$. Ahora: $\frac{8}{11} x 5 = \frac{40}{11}$ Esta es la solución. Si se verifica: tenemos.

$$2(\frac{40}{11}) + \frac{40/11}{5} = 8 \Rightarrow \frac{80}{11} + \frac{40}{55} = 8 \Rightarrow \frac{400+40}{55} = 8$$ Lo cual es verdadero.

Este método a pesar de ser muy rudimentario, es efectivo en casos donde se presente este tipo de ecuaciones.

METODO AXIOMATICO: Es el método más utilizado en la actualizad, el cual utiliza las propiedades algebraicas y las leyes de uniformidad, todo esto derivado de los axiomas de cuerpo. Aclaremos que los axiomas epistemológicamente son "Verdades Evidentes" y a partir de éstas, se desarrolla todo el conocimiento. Algunos axiomas que son importantes para comprender la solución de ecuaciones.

Axiomas de Cuerpo: Sean *x, y, z*, valores definidos, dentro del conjunto de los Reales

Primer Axioma: x + y = y + x (Propiedad conmutativa)

Segundo Axioma: x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z) (Propiedad Asociativa)

Tercer Axioma: x (y + z) = x*y + x*z (Propiedad Distributiva)

Cuarto Axioma: x + 0 = x y x*1 = x (Propiedad Modulativa de la suma y producto)

Quinto Axioma: x + y = 0, y + x = 0 (Propiedad del inverso. Todo número real tiene un Inverso, excepto el cero). Para *x*, su inverso es puede escribir –*x,* igual para y.

Sexto Axioma: x*y = 1, y*x = 1 Para x ≠ 0. (Propiedad del recíproco, todo número real tiene un recíproco). Para *x*, su recíproco se puede escribir x^{-1} = 1/*x*, igual para y.

NOTA: El símbolo * indica multiplicación.

Con los argumentos anteriores, se puede comenzar el análisis del desarrollo de ecuaciones. Toda ecuación de primer grado con una incógnita se puede escribir de la forma $ax+b=c$, donde a, b, y c son constantes y además a ≠ 0.

Los siguientes ejemplos, buscan ilustrar la resolución de ecuaciones de éste tipo, utilizando las leyes de uniformidad y los axiomas de cuerpo, explicado anteriormente.

Ejemplo 1:

Sea la ecuación $ax+b=0$ hallar el valor de x que satisfaga la igualdad.

Solución:

Como la idea es despejar la incógnita, en este caso *x*, entonces se debe “eliminar Matemáticamente hablando” lo que rodea a dicha incógnita. Así lo primero es eliminar b, lo cual se puede hacer aplicando el inverso, ya que todo número sumado con su inverso resulta cero.

$ax+b-b=0-b$. Como se puede observar, el valor adicionado se hizo a los dos lados de la ecuación, esto con el fin de que ésta NO se altere. Entonces: $ax=-b$. Ahora se debe eliminar la *a*, esto se hace aplicando el recíproco, ya que todo número multiplicado con su recíproco resulta uno. Veamos:
$\frac{1}{a}ax=-b\frac{1}{a}$. Operando se obtiene: $x=-\frac{b}{a}$

Ejemplo 2:

Hallar la solución de la ecuación: $6-x=2x+9$

Solución:

Como estamos utilizando el método axiomático. Por lo general, la incógnita se organiza al lado derecho y las constantes al lado izquierdo, entonces dejemos la incógnita al lado derecho, para esto eliminémosla del lado izquierdo, lo cual se hace adicionando -2x a los dos lados de la ecuación. $6-x-2x=2x-2x+9$, operando se obtiene: $6-3x=9$. Ahora eliminemos el -6 de la parte derecha para que solo quede la incógnita. $6-6-3x=9-6$, operamos para obtener, $-3x=3$. Finalmente aplicamos el recíproco de 3 para que la incógnita quede completamente despajada. $-3x*(-\frac{1}{3})=3*(-\frac{1}{3})$, operando se obtiene:

$x = -1$. La solución de la ecuación propuesta.

Si reemplazamos el valor de x = -1, en la ecuación original, se debe obtener una igualdad. $6 - x = 2x + 9 \Rightarrow 6 - (-1) = 2(-1) + 9 \Rightarrow 7 = 7$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación: $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$

Solución:

Recordando las leyes de uniformidad: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a * d = c * b$. Se aplica para el caso que tenemos Esta es el camino para convertir una expresión racional en entera.

Veamos: $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (x) * (2) = (1) * (x+2) \Rightarrow 2x = x + 2$.

Sumemos –x a los dos lados de la ecuación, ¿por qué?
$2x - x = x - x + 2 \Rightarrow x = 2$. Así la solución es x = 2.

Reemplazamos la solución en la ecuación original: $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$ Operando:

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Se observa que la igualdad se cumple. Este último proceso es lo que se conoce comúnmente como la *comprobación de la solución*.

Es pertinente analizar los pasos realizados, para ir aprendiendo los principios que soportan la resolución de ecuaciones.

Ejemplo 4:

Hallar el valor de la incógnita que satisfaga la ecuación: $\frac{6t+7}{4t-1} = \frac{3t+8}{2t-4}$

Solución:

Vamos a resolver la ecuación, pero se recomienda que usted estimado estudiante, identifique qué principios fueron aplicados en cada paso.

$$\frac{6t+7}{4t-1} = \frac{3t+8}{2t-4} \Rightarrow (6t+7)(2t-4) = (3t+8)(4t-1)$$

$$(6t+7)(2t-4) = (3t+8)(4t-1) \Rightarrow (12t^2 - 10t - 28) = (12t^2 + 29t - 8)$$

A la última ecuación sumamos: $12t^2$

$12t^2 + 12t^2 - 10t - 28 = 12t^2 + 12t^2 + 29t - 8 \Rightarrow -10t - 28 = 29t - 8$ Sumamos -29t

$$-10t - 28 = 29t - 8 \Rightarrow -10t - 29t - 28 = 29t - 29t - 8 \Rightarrow -39t - 28 = -8$$

Adicionamos 28 a la ecuación:

$-39t-28+28=-8+28 \Rightarrow -39t=20$

Finalmente:

$(-\frac{1}{39})-39t=20(-\frac{1}{39}) \Rightarrow t=-\frac{20}{39}$. Estimado estudiante comprobar esta solución.

Ejemplo 5:

Resolver: $8(2x-6)=4(x-3)$

Solución:

$8(2x-6)=4(x-3) \Rightarrow 16x-48=4x-12$

$16x-4x-48=4x-4x-12 \Rightarrow 12x-48=-12$

$12x-48=-12 \Rightarrow 12x-48+48=-12+48 \Rightarrow 12x=36$

$(\frac{1}{12})12x=(\frac{1}{12})36 \Rightarrow x=\frac{36}{12}$, simplificando: x = 3:

En este ejemplo, no se dieron mayores detalles de la solución, Ya que la idea es que los estudiantes analicen y deduzcan todo el procedimiento.

Ejemplo 6:

Muestre que la ecuación $\frac{3x}{x-1}+2=\frac{3}{x-1}$ No tiene solución.

Solución

Aplicando los principios estudiados anteriormente.

$\frac{3x}{x-1}(x-1)+2(x-1)=\frac{3}{x-1}(x-1) \Rightarrow 3x+2(x-1)=3$

$3x+2(x-1)=3 \Rightarrow 3x+2x-2=3 \Rightarrow 5x-2=3$

$5x-2=3 \Rightarrow 5x-2+2=3+2 \Rightarrow 5x=5$

Finalmente x = 1.

Si comprobamos la solución. $\frac{3x}{x-1}+2=\frac{3}{x-1} \Rightarrow \frac{3(1)}{1-1}+2=\frac{3}{1-1}$ Observamos que se presenta una indeterminación, ya que se tiene un cociente con denominador cero. Así queda demostrado que la ecuación NO tiene solución.

REFLEXIÓN: En todos los ejemplos propuestos, la resolución se centra en despajar la incógnita, lo cual se hace utilizando los principios, leyes y axiomas matemáticos.

EJERCICIOS

En los ejercicios propuestos, resolver la ecuación paso a paso identificando el axioma, propiedad o ley matemática utilizada.

1. $3(2-x)=2x-1$ — Rta: x = 7/5

2. $\frac{1}{2}x-6=\frac{3}{4}x+1$ — Rta: x = -14

3. $\frac{6}{x}+\frac{4}{x}=\frac{1}{2}$ — Rta: x = 20

4. $x^2+6x-7=(x+1)^2$ — Rta: x = 2

5. $\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x+5}+\frac{10}{(x+5)(x-2)}$ — Rta: x = 6

6. $5-\frac{x+2}{3}=7-x$ — Rta: x = 4

7. $\frac{y+1}{4}+\frac{2y-3}{4}=\frac{y}{2}-2$ — Rta: y = -6

8. $\frac{6}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=\frac{9}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}$ — Rta: x = 1

9. $\frac{8}{4y-8}=\frac{6}{3y-6}=0$ — Rta: y = 0

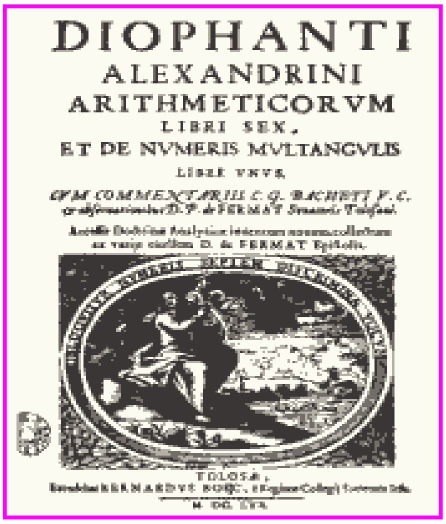
10. Cuanto debe valer φ en la expresión 3y - 3 φ = 3y – 5, para que se cumpla la igualdad.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS:

Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son una herramienta muy importante para resolver problemas que se presentan en todas las áreas del saber. En este apartado se analizarán dos casos. El primero es donde se tiene una ecuación con dos incógnitas y el segundo es cuando se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas.

PRIMER CASO: **Una Ecuación Con Dos Incógnitas**:

ECUACIONES DIOFÁNTICAS: Diofanto de Alejandría, del siglo III de nuestra era, desarrolló unas ecuaciones que trabajan sobre el *conjunto de los enteros* y son de primer grado con dos incógnitas. En honor a su nombre se les conoce como Ecuaciones Diofánticas.



FUENTE: http://suanzes.iespana.es/diofanto.htm

La forma general de estas ecuaciones es $ax + by = c$, donde a, b, c son constantes y pertenecen al conjunto de los enteros; además, a ≠ 0 ó b ≠ 0. Cuando *a, b* y *c* son enteros positivos, la ecuación tiene solución entera si y, solo si, el máximo común divisor de a y b, divide a c. Este tipo de ecuaciones puede tener soluciones infinitas o no puede tener solución. Entonces la solución consiste en hallar ecuaciones generadoras (paramétrica) del par (x, y) que satisfagan la ecuación propuesta.

Ejemplo:

Para la ecuación 2x + 3y = 8 ¿cual será el par (x, y) que satisfaga dicha ecuación?

Solución:

Por simple inspección se puede ver que *x* = 1 y *y* = 2, satisfacen la igualdad.
2(1) + 3(2) = 8.
Entonces la solución (x, y) = (1, 2)

Pero se puede encontrar más soluciones, por ejemplo (4, 0), (-2, 4), -5, 6),… como se dijo al principio, pueden existir infinitas soluciones.

Solución General de Ecuaciones diofánticas:

Para resolver este tipo de ecuaciones, vamos a analizar dos procedimientos.

1. ***Método paramétrico:*** El principio es buscar ecuaciones para *x* al igual que para *y,* por medio de un parámetro, que generalmente se designa con ***t,*** así se obtiene dos ecuaciones,

$$x = a + bt$$
$$y = c + dt$$

Llamadas *solución general*, ésta se denomina así porque satisface para cualquier par (x, y). A partir de esta se pueden obtener *soluciones particulares*; es decir, para un valor t = k

El procedimiento para obtener la solución general no es tarea fácil, la intención es que se pueda a partir de la solución general, obtener soluciones particulares. Los curiosos pueden investigar en libros de Matemáticas Discretas ó en fuentes donde se trabaje las ecuaciones diofánticas.

Veamos algunos ejemplos que nos aclaren este método.

Ejemplo 1:

A partir de la ecuación 2x + 3y = 8, hallar soluciones particulares, dada la solución general.

Solución:

Por algoritmo se puede establecer que la solución general es de la forma:

$x = -8 + 3t$ y $y = 8 - 2t$

A partir de esta solución, se puede obtener soluciones particulares.
- Para t = 2.
x = -8+3(2) = -2
y = 8 – 2(2) = 4
La solución particular para t = 2 es el par (-2, 4)
-Para t = 4.
x = -8 + 3(4) = 4
y = 8 – 2(4) = 0
La solución para t = 4 es el par (4, 0)

Así sucesivamente para cualquier ***t*** entero.

Ejemplo 2:

Hallar la solución para t = 5 y t = 8, dada la ecuación diofántica 3x + 4y = 50.

Solución.

Recordemos que se debe conocer la solución general, la cual es:

$x = -50 + 4t$ y $y = 50 - 3t$

Ahora hallamos la solución para los valores del parámetro dados.

- t = 5: x = -50 + 4(5) = -30, y = 50 – 3(5) = 35 Solución (-30, 35)
- t = 8: x = -50 + 4(8) = -18, y = 50 – 3(8) = 26 Solución (-18, 26)

2. ***Método Despeje:*** El método consiste en hallar la solución general, despejando una de las incógnitas y dejando la otra como parámetro; es decir, si despejamos *x*; *y* sería el parámetro y si despejamos *y*, entonces *x* sería el parámetro.

Para la ecuación: $ax + by = c$. Se pueden obtener dos ecuaciones particulares.

$x = \frac{c - by}{a}$. Dando valores a y, se obtiene el valor de x.

$y = \frac{c - ax}{b}$. Dando valores a x, se obtiene le valor de y.

Ejemplo 1:

Dada la ecuación 2x + 3y = 8. Hallar la solución para x = -2.

Solución:

Lo primero es despejar y, dado que conocemos el valor de x.

$y = \frac{8 - 2x}{3}$.

Ahora reemplazamos el valor de x = -2 para obtener el de y.

$y = \frac{8 - 2(-2)}{3} = \frac{8 + 4}{3} = 4$

Solución particular: (-2, 4)

Ejemplo 2:

Para la ecuación x + 3y = 14. Hallar el valor de la incógnita, dado el valor de la otra.

a-) x = 2

b-) y = 5

Solución.

Hacemos el despeje correspondiente.

a-) $y = \frac{14 - x}{3}$. Entonces: $y = \frac{14 - 2}{3} = 4$ Solución: (2, 4)

b-) $x = 14 - 3y$. Entonces: $x = 14 - 3(5) = -1$ Solución: (-1, 5)

EJERCICIOS

Resolver los ejercicios por el método más adecuado, según los datos dados.

Realce todos los pasos necesarios para la respectiva solución.

1. Dada la ecuación 4x – 5y = 3. Cuya solución general es:
   $x = 2 + 5t$ y $y = 1 + 4t$
   Hallar las soluciones particulares para t = 1 y t = 2 Rta: t = 1, (7, 5) t = 2 (12, 9)

2. Para la ecuación: 6x + 5y = 2. La solución general es:
   $x = 2 + 5t$ y $x = -2 - 6t$
   Hallar el par (x, y) para t = 4. Rta: (22, -26)

3. Determinar el valor de x, para y = 2, en la ecuación:
   $x - 4y = 5$ Rta: x = 13

4. Dada la ecuación: $9x + 6y = 12$. Cual será el valor de x para y = -1. Rta: x = 2

5. Dada la ecuación: 4x – 6y = 6. Cual de las siguientes soluciones generales es la que corresponde a dicha ecuación.
   a-) $x = 6 + 6t$ y $y = 3 + 4t$
   b-) $x = 6 - 6t$ y $y = 3 - 4t$
   c-) $x = 4 - 6t$ y $y = 4 - 3t$
   Debe hacer el procedimiento adecuado para justificar la respuesta. Rta: a

SEGUNDO CASO: **Dos Ecuación Con Dos Incógnitas**.

Cuando se tiene un sistema de la forma:

$$\begin{array}{lllll} a_1x_1 & + & b_1y_1 & = & c_1 \\ a_2x_2 & + & b_2y_2 & = & c_2 \end{array}$$

Donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 son constantes; además $a_1 \neq 0$ ó $b_1 \neq 0$ Al igual que $a_2 \neq 0$ ó $b_2 \neq 0$

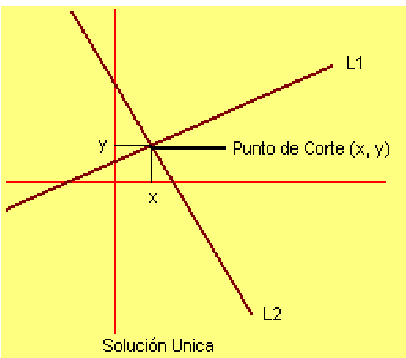
Se dice que estamos frente a un sistema de ecuaciones simultáneas, donde la solución obtenida para *x* e *y*, debe satisfacer simultáneamente las dos ecuaciones. Por consiguiente, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es hallar un par (x, y) tal que al reemplazarlo en cualquiera de las dos ecuaciones, la igualdad se cumpla.

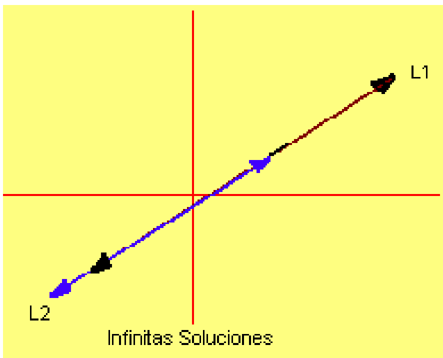
Sistema Consistente: Un sistema de ecuaciones es consistente, cuando tiene al menos una solución para cada incógnita.
Sistema Inconsistente: ocurre cuando el sistema NO tiene solución alguna.
Es obvio que el trabajo es analizar sistemas consistentes.

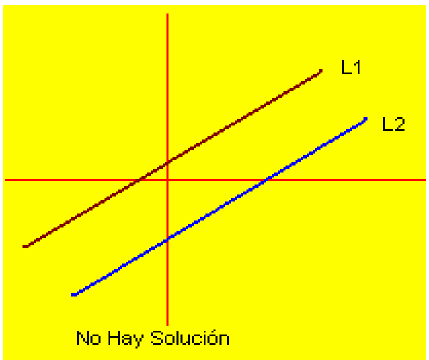
Existen diversos métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, en este caso vamos a analizar tres.

1. METODO GRAFICO.

El método se basa en que en el plano de coordenadas rectangulares, una ecuación de la forma $ax + by = c$, esta representada por una recta cuyos puntos son parejas ordenadas de números reales, donde la primera componente corresponde a *x* y la segunda componente a *y*. Como se tiene dos ecuaciones, entonces se deben tener graficadas dos rectas. De esta manera se pueden tener tres situaciones: *Primero*, que las rectas se corten en un punto, lo que indica que la solución es única y será el punto de corte. *Segundo*, que las dos rectas coincidan, luego hay infinitas soluciones. *Tercero*, que las rectas sean paralelas, lo que indica es que NO hay solución.







L_1 y L_2, corresponden a las ecuaciones uno y dos del sistema.

El método es adecuado cuando hay soluciones enteras, ya que los puntos de corte son bien definidos. El procedimiento básico consisten en despejar *y* en las dos ecuaciones y, darle valores a *x* para obtener parejas (x, y), como se realizo en las ecuaciones diofánticas, de tal manera que con dos parejas, que corresponde a dos puntos en el plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2), se puede graficar una recta (Axioma Euclidiano)

Ejemplo 1:

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ 5x - y &= 6 \end{aligned}$$

Solución:

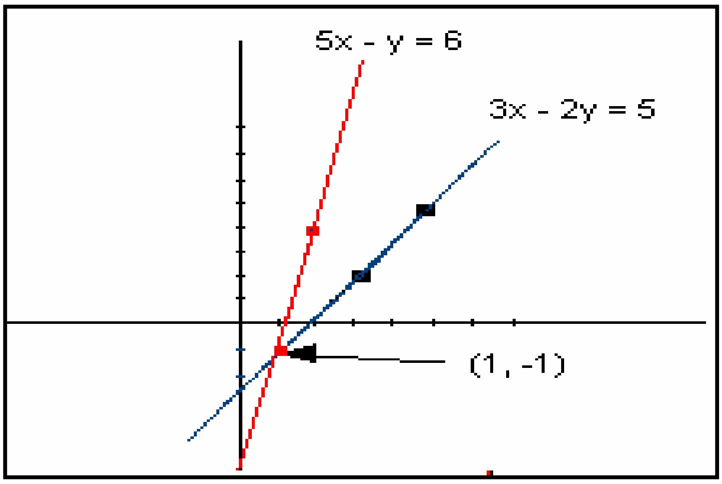
Según el procedimiento.

Para la primera ecuación: $3x - 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5 - 3x}{-2}$

Tomemos dos valores, por ejemplo x = 3, entonces: y = [5 – 3(3)]/-2 = 2. El punto es (3, 2)
Otro valor x = 5, entonces: y = [5 – 3(5)]/-2 = 5. El punto es (5, 5)
Los puntos para graficar la primera recta son: (3, 2) y (5, 5).

Para la segunda ecuación. $5x - y = 6 \Rightarrow y = 5x - 6$
Los valores: x = 1, entonces: y = 5(1) – 6 = -1. Le punto es (1, -1) El otro valor x = 2, entonces y = 5(2) – 6 = 4, el punto es (2, 4)
Los puntos para graficar la segunda recta son: (1, -1) y (2, 4)

Graficamos:



Según la gráfica, el punto de corte es (1, -1)

Luego la solución son: x = 1, y = -1.

Ejemplo 2:

Dado el sistema de ecuaciones, hallar la solución correspondiente.

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 5 \\ 4x & + & 2y & = & 8 \end{array}$$

Solución:

Como en el caso anterior, hacemos los despejes respectivos.

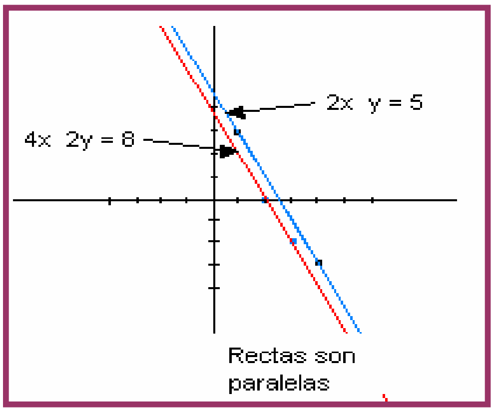
$2x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 2x$

Para x = 1, entonces y = 5 – 2(1) = 3, el punto es (1, 3)
Para x = 4, entonces y = 5 – 2(4) = -3 el punto es (4, -3)

$4x + 2y = 8 \Rightarrow y = \dfrac{8 - 4x}{2}$

Para x = 2, entonces y = [8 – 4(2)]/2 = 0, el punto es (2, 0)
Para x = 3, entonces y = [8 – 4(3)]/2 = -2, el punto es (3, -2)

Graficamos:



Como las rectas son paralelas, no hay puntos de corte, por consiguiente el sistema NO tiene solución.

NOTA: En los ejemplos estudiados, los valores dados a *x* han sido escogidos arbitrariamente, siempre y cuando no se presenten inconsistencias, luego al reemplazarlos en la ecuación se obtiene el valor de *y*.

2. METODO POR ELIMINACIÓN.

Es un método algebraico, cuyo principio es eliminar una incógnita, para obtener el valor de la otra, posteriormente con el valor obtenido, se busca el valor de la primera.

Este método se puede desarrollar por tres técnicas, a continuación analizamos cada una.

REDUCCIÓN: Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la técnica consiste en igualar coeficientes de una de las dos incógnitas y que presenten signos contrarios, así se puede eliminar dicha incógnita, obteniendo una ecuación con una incógnita, cuya resolución ya hemos estudiado. Con el valor de la incógnita obtenida, se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones, para obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 1:

Resolver el sistema.

$$\begin{array}{ccccc} y & - & x & = & 0 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}$$

Solución:

Primer organizamos las incógnitas, para que queden las *y* en una columna y las *x* en la otra, para poder igualar coeficientes y eliminar la incógnita seleccionada para este fin.

$$\begin{array}{ccccc} -x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}$$

Como ya están organizadas, se debe igualar coeficientes con signos contrarios, pero se observa que la incógnita x tiene coeficientes iguales y signos contrarios, luego se puede eliminar, entonces:

$$\begin{array}{ccccc} -x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 4 \\ \hline / & + & 2y & = & 4 \end{array}$$

Despejamos y, entonces: y = 4/2 = 2. Como ya se conoce el valor de *y*, se toma *cualquiera* de las dos ecuaciones originales y se reemplaza dicho valor, para obtener el valor de *x*, entones tomemos la primera ecuación y reemplacemos el valor de y.

$$-x+y=0 \Rightarrow -x+2=0 \Rightarrow x=2$$

La solución es: (x, y) = (2, 2)

Si reemplazamos dichos valores en las dos ecuaciones originales, las igualdades se deben cumplir simultáneamente.

Ejemplo 2:

Resolver el sistema

$$\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 4 \\ 3x & - & 2y & = & -5 \end{array}$$

Solución.

Para seleccionar la incógnita a eliminar, se puede tomar como criterio la que tenga signo contrario, pero no es una camisa de fuerza. Para este ejemplo se puede escoger cualquiera de las dos, escojamos *x,* entonces debemos igualar coeficientes en *x* y con signo contrario, para esto lo que se hace es multiplicar la primera ecuación por -3 y la segunda por 1, luego:

$$\begin{array}{ccccc} -3x & - & (-3)y & = & 4(-3) \\ 3x & - & 2y & = & -5 \end{array}$$

Operando se obtiene:

$$\begin{array}{ccccc} -3x & + & 3y & = & -12 \\ 3x & - & 2y & = & -5 \end{array}$$

Ahora:
$$\begin{array}{rcrcr} -3x & + & 3y & = & -12 \\ 3x & - & 2y & = & -5 \\ \hline / & + & y & = & -17 \end{array}$$

La solución para *y* es -17. Para obtener la solución en x, reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones originales, escojamos la segunda.

$$3x-2y=-5 \Rightarrow 3x-2(-17)=-5 \Rightarrow 3x+34=-5 \Rightarrow x=\frac{-5-34}{3}=-13$$

La solución es: (x, y) = (-13, -17)

Ejemplo 3:

Resolver el sistema

$$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 9y & = & 8 \\ 2x & - & 6y & = & -3 \end{array}$$

Solución:

Como se observa en le sistema, se puede eliminar y, ya que tiene signo contrario, solo faltaría igualar los coeficientes, lo que se consigue multiplicando la primer a ecuación por 2 y la segunda por 3.

$$\begin{array}{rcrcr} (4x & + & 9y & = & 8)2 \\ (2x & - & 6y & = & -3)3 \end{array}$$ Lo que equivale a: $$\begin{array}{rcrcr} 8x & + & 18y & = & 16 \\ 6x & - & 18y & = & -9 \end{array}$$ Operando:

$$\begin{array}{rcrcr} 8x & + & 18y & = & 16 \\ 6x & - & 18y & = & -9 \\ \hline 14x & + & / & = & 7 \end{array}$$

Despejando la incógnita tenemos: x =7/14 = ½

En seguida debemos hallar el valor de la incógnita *y*, reemplazando *x* en una de las ecuaciones originales, tomemos la segunda:

$$2x-6y=-3 \Rightarrow 2(1/2)-6y=-3 \Rightarrow 1-6y=-3 \Rightarrow y=\frac{-3-1}{-6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Así, la solución es: (x, y) = (1/2, 2/3)

Recordemos que la verificación ó comprobación de la solución, se hace sustituyendo en las ecuaciones originales los valores obtenidos, para comprobar que la igualdad en verdadera.

$$\begin{array}{rcrcr} 4(1/2) & + & 9(2/3) & = & 8 \\ 2(1/2) & - & 6(2/3) & = & -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} 2 & + & 6 & = & 8 \\ 1 & - & 4 & = & -3 \end{array}$$

Se observa que las igualdades son verdaderas, luego la solución es correcta.

IGUALACIÓN: Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la técnica consiste en despajar en las dos ecuaciones la misma incógnita, quedando el sistema en términos de la otra, seguido se igualan las expresiones obtenidas. En dichas expresiones, a través de procesos matemáticos se busca el valor de la incógnita presente, el cual; como en el caso de la reducción, se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones originales para hallar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 1:

Resolver el sistema dado a continuación:

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ x - y &= 4 \end{aligned}$$

Solución:

Se puede despajar la incógnita que se desee, para este caso vamos a despejar *x* en las dos ecuaciones.
Para la primera: $x_1 = 8 - y$
Para la segunda: $x_2 = 4 + y$

Ahora, igualamos las dos expresiones, ya que $x_1 = x_2$
¿Por qué? Analícelo con sus compañeros.

Entonces: $8 - y = 4 + y$, como ya sabemos trabajar este tipo de ecuaciones, el proceso para despajar *y* será entendido.
$2y = 4$, luego $y = 4/2 = 2$.

Ahora reemplazamos el valor de *y* en cualquiera de las ecuaciones originales, bueno esta expresión se ha repetido varias veces, la idea es que usted estimado estudiante la asimile para que a medida que sigamos en el estudio de este tipo de ecuaciones, llegará el momento de NO repetir, pero si saber que se esta haciendo.

Tomemos la primera ecuación:

$$x + y = 8 \Rightarrow x + 2 = 8 \Rightarrow x = 6$$

La solución será: $(x, y) = (6, 2)$

Por favor realicen la verificación de dicha solución, es un trabajo motivante.

Ejemplo 2:

Hallar el valor de las incógnitas, para el sistema dado a continuación.

$$\begin{aligned} 12x - 5y &= 37 \\ 9x - 8y &= 57/2 \end{aligned}$$

Solución:

Despajamos x.

Para la primera: $12x-5y=37 \Rightarrow 12x=37+5y \Rightarrow x=\dfrac{37+5y}{12}$

Para la segunda: $9x-8y={}^{57}\!/_{2} \Rightarrow 9x={}^{57}\!/_{2}+8y=\dfrac{57+16y}{2} \Rightarrow x=\dfrac{57+16y}{18}$

Se igualan las dos expresiones obtenidas:

$\dfrac{37+5y}{12}=\dfrac{57+16y}{18} \Rightarrow 18(37+5y)=12(57+16y)$

Operando y simplificando: 666 + 90y = 684 + 192y.
Tenemos una ecuación con una incógnita. 90y – 192y = 684 – 666
Operando: -102y = 18, luego y = -18/102 = - 3 / 17

Ahora sustituimos y = - 3 / 17, tomemos la primera ecuación.

$$12x-5y=37 \Rightarrow 12x-5(-3/17)=37 \Rightarrow 12x=37-15/17 \Rightarrow 12x=614/17$$

Despejamos la incógnita: x = 614 / 204 = 307 / 102
La solución: (x, y) = (307 / 102, - 3 / 17)

SUSTITUCIÓN: Para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra ecuación. Dicho de otra manera, si despejamos la incógnita *x* en la primera ecuación, se debe sustituir en la segunda ecuación ó viceversa, igual si fuera la otra incógnita.

Como siempre los ejemplos modelos, no permiten ilustrar claramente el método de resolución. Veamos.

Ejemplo 1:

Resolver el sistema dado en seguida:. $\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -4 \\ 3x & - & 2y & = & -5 \end{array}$

Solución:

Según la teoría del método, debemos despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones, elegimos *y* en la primera ecuación.

$$x-y=-4 \Rightarrow -y=-4-x \Rightarrow y=x+4$$

Ahora reemplazamos *y* en la segunda ecuación.

$$3x-2y=-5 \Rightarrow 3x-2(x+4)=-5.$$

Aquí tenemos una ecuación con una incógnita, lo cual a estas alturas ya sabemos resolver.

$$3x-2(x+4)=-5 \Rightarrow 3x-2x-8=-5 \Rightarrow x=3$$

Reemplazamos el valor de x en la segunda ecuación:

$$3x - 2y = -5 \Rightarrow 3(3) - 2y = -5 \Rightarrow -2y = -5 - 9 \Rightarrow y = \frac{-14}{-2} = 7$$

La solución: (x, y) = (3, 7)

Ejemplo 2:

Resolver el sistema. $\begin{array}{ccccc} \frac{3x}{5} & + & \frac{5y}{3} & = & 2 \\ \frac{6x}{5} & - & \frac{5y}{3} & = & 1 \end{array}$

Solución:

Para resolver este sistema, es aconsejable primero convertir las ecuaciones a expresión enteras. Veamos:

$$\frac{3x}{5} + \frac{5y}{3} = 2 \Rightarrow \frac{9x + 25y}{15} = 2 \Rightarrow 9x + 25y = 30$$

$$\frac{6x}{5} - \frac{5y}{3} = 1 \Rightarrow \frac{18x - 25y}{15} = 1 \Rightarrow 18x - 25y = 15$$

Entonces, según el método, despajamos *x* en la primera ecuación y la reemplazamos en la segunda, recordemos que también se puede hacer lo contrario.

$$9x + 25y = 30 \Rightarrow 9x = 30 - 25y \Rightarrow x = \frac{30 - 25y}{9}$$

$$18x - 25y = 15 \Rightarrow 18\left[\frac{30 - 25y}{9}\right] - 25y = 15 \Rightarrow 60 - 50y - 25y = 15 \Rightarrow -75y = 15 - 60$$

Despajando: y = - 45 / - 75 = 3 / 5

Ahora, tomemos la primera ecuación para reemplazar *y*, así obtener el valor de *x*.

$$9x + 25y = 30 \Rightarrow 9x + 25(3/5) = 30 \Rightarrow 9x + 15 = 30 \Rightarrow 9x = 30 - 15$$

Despejando. x = 15 / 9 = 5 / 3
Solución: (x. y) = (5/3, 3/5)

Ejemplo 3:

Hallar la solución del sistema dado. $\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ 4x & + & 2y & = & 3 \end{array}$

Solución:

Siguiendo la metodología para este método, tenemos:

$$2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x$$

Reemplazando:

$$4x + 2y = 3 \Rightarrow 4x + 2(1 - 2x) = 3 \Rightarrow 4x + 2 - 4x = 3 \Rightarrow 2 = 3$$

La última igualdad no es verdadera, luego NO hay solución, por consiguiente el sistema no tiene solución, es un sistema inconsistente.

EJERCICIOS

Resolver los siguientes sistemas por el método de reducción.

1. $$\begin{array}{rcrcr} x & - & 5y & = & -13 \\ 3x & + & 2y & = & 12 \end{array}$$ Rta: x = 2, y = 3

2. $$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 6 \\ 3x & - & y & = & -10 \end{array}$$ Rta: x = -2, y = 4

3. $$\begin{array}{rcrcr} \frac{3}{4}x & + & \frac{2}{3}y & = & 7 \\ \frac{5}{3}x & - & \frac{1}{2}y & = & 18 \end{array}$$ Rta: x = 20, y = -12

Resolver los siguientes sistemas por el método de Igualación.

4. $$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & -2 \\ 3x & + & 2y & = & 3 \end{array}$$ Rta: x = ½, y = ¾

5. $$\begin{array}{rcrcr} \frac{2}{5}x & - & \frac{1}{6}y & = & 7/10 \\ \frac{3}{4}x & - & \frac{2}{3}y & = & 19/8 \end{array}$$ Rta: x = ½, y = -3

Resolver los siguientes sistemas por el método de Sustitución

6. $$\begin{array}{rcrcr} x & - & \frac{1}{2}y & = & -1 \\ 2x & - & y & = & -6 \end{array}$$ Rta: NO hay solución

7. $$\begin{array}{rcrcr} -\frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & = & 1/6 \\ \frac{3}{x} & + & \frac{4}{y} & = & 3 \end{array}$$ Rta: x = 3, y = 2

3. METODO POR DETERMINANTES

Determinante: Un determinante es un arreglo rectangular de filas y columnas, donde los elementos de éste son los coeficientes de las ecuaciones que conforman el sistema.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Las filas son: (a_1 b_1) y (a_2 b_2)
Las columnas: (a_1 a_2) y (b_1 b_2)

El tamaño del determinante lo da el número de filas y de columnas. Así pueden haber determinantes de 2x2, 3x3, 4x4, etc.

Resolver un determinante es hallar el valor del mismo, para el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, se requiere trabajar con determinantes de 2x2.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 * b_2 - a_2 * b_1$$

Donde **D** es el valor del determinante.

Ecuaciones por Determinante:

Para resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, **KRAMER** propuso una técnica que podemos resumir así:

Sea el sistema:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 x_1 & + & b_1 y_1 & = & c_1 \\ a_2 x & + & b_2 y_2 & = & c_2 \end{array}$$

Se despeja cada incógnita de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

El determinante del denominador, se le llama *determinante de coeficientes*, que es común para todas las incógnitas.

La solución será el cociente de los dos determinantes, para cada incógnita.

Solución: $x = \dfrac{c_1 * b_2 - c_2 * b_1}{a_1 * b_2 - a_2 * b_1}$ $y = \dfrac{a_1 * c_2 - a_2 * c_1}{a_1 * b_2 - a_2 * b_1}$

Ejemplo 1:

Resolver el sistema

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & - & 2y & = & 5 \\ 5x & - & y & = & 6 \end{array}$$

Solución:

Se organizan los determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5\, x\,(-1) - 6\, x\,(-2)}{3\, x\,(-1) - 5\, x\,(-2)} = \frac{-5 + 12}{-3 + 10} = \frac{7}{7}$$

Solución para la primera incógnita x = 1.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3\, x\, 6 - 5\, x\, 5}{3\, x\,(-1) - 5\, x\,(-2)} = \frac{18 - 25}{-3 + 10} = \frac{-7}{7}$$

Solución para la segunda incógnita y = -1

Ejemplo 2:

Resolver el sistema siguiente.

$$\begin{array}{rcrcl} 4x & - & 3y & = & 6 \\ -2x & + & 5y & = & 4 \end{array}$$

Solución:

Como ya se conoce le procedimiento general, procedamos así.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{6\, x\, 5 - 4\, x\,(-3)}{4\, x\, 5 - (-2)\, x\,(-3)} = \frac{30 + 12}{20 - 6} = \frac{42}{14}$$

Así x = 3

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4\ x\ 4 - (-2)\ x\ 6}{4\ x\ 5 - (-2)\ x\ (-3)} = \frac{16 + 12}{20 - 6} = \frac{28}{14}$$

Solución para y = 2

Ejemplo 3:

Hallar el valor de *x* e *y* en el sistema

$$7x + 4y = 8$$
$$7x + 4y = 6$$

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8\ x\ 4 - 6\ x\ 4}{7\ x\ 4 - 7\ x\ 4} = \frac{32 - 24}{28 - 28} = \frac{8}{0}$$

El valor de x es indeterminado, ya que la fracción tiene como denominador cero.

Así, el sistema NO tiene solución, es inconsistente.

EJERCICIOS

Identificar el valor de φ en cada determinante, de tal manera que la igualdad se cumpla.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & \varphi \end{vmatrix} = 12$ Rta: φ = 12

2. $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ \varphi & 4 \end{vmatrix} = 13$ Rta: φ = -5

Resolver los sistemas de ecuaciones propuestos por el método de **Kramer**; es decir, utilizando determinantes.

3. $\begin{array}{rcrcr} 5x & - & y & = & 13 \\ 2x & + & 3y & = & 12 \end{array}$ Rta: x = 3, y = 2

4. $\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 6y & = & 24 \\ 5x & + & 4y & = & 12 \end{array}$ Rta: x = 4, y = -2

5. $\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{-2x+1}{3} \\ 3x & = & 8+2y \end{array}$ Rta: x = 2, y = -1

6. $\begin{array}{rcrcr} 3p & - & q & = & 13 \\ -12p & + & 4q & = & -52 \end{array}$ Rta: p = 5, q = 2

7. $\begin{array}{rcrcr} \dfrac{2}{x} & + & \dfrac{3}{y} & = & -2 \\ \dfrac{4}{x} & - & \dfrac{5}{y} & = & 1 \end{array}$ Rta: x = - 22 / 7, y = - 11 / 5

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON TRES INCÓGNITAS.

Con los conocimientos adquiridos en el apartado anterior, será más sencillo abordar el que sigue, ya que los principios son similares, solo que para este caso se trata de más ecuaciones y más incógnitas. Para los sistemas de éste tipo, se van a analizar dos métodos.

PRIMER MÉTODO: **SOLUCIÓN POR ELIMINACIÓN.**

Cuando se tiene un sistema de la forma:

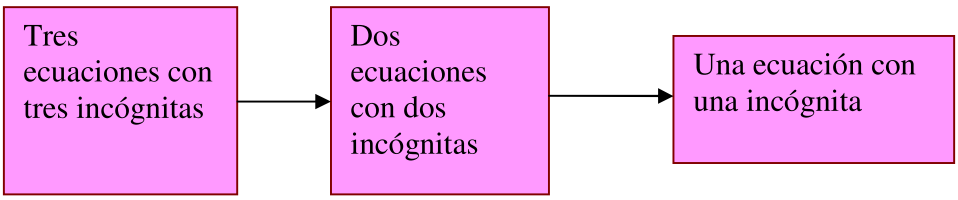
$$\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}$$

Donde a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 son constantes.

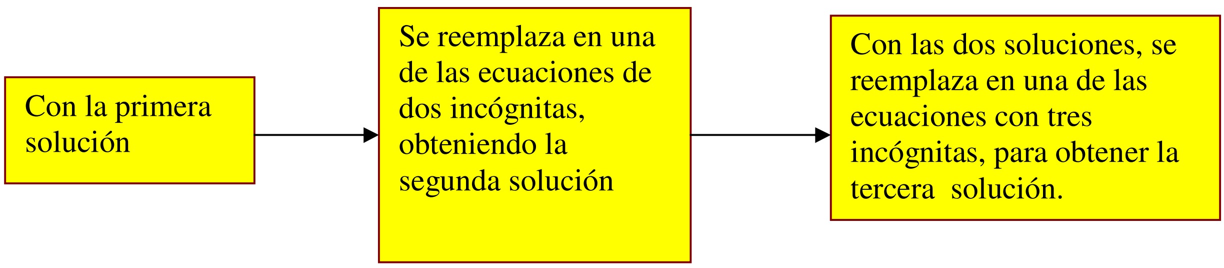
Se dice que estamos frente a un sistema de ecuaciones simultáneas, donde la solución obtenida para *x, y, z* debe satisfacer simultáneamente las tres ecuaciones. Por consiguiente, resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es hallar valores específicos para (x, y, z) tal que al reemplazarlo en cualquiera de las tres ecuaciones, la igualdad se cumpla.

Un esquema sencillo que nos ayuda a comprender el método.

Primero:



Segundo:



La mejor forma de comprender el método es con ejemplos modelos.

Ejemplo 1:

Resolver el sistema dado por Eliminación.
$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

Solución:

Primero enumeremos las ecuaciones para hacer más fácil su identificación.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 & (1) \\ x & + & y & - & z & = & 0 & (2) \\ x & - & y & + & z & = & 2 & (3) \end{array}$$

Según el esquema debemos a partir de las tres ecuaciones, obtener dos ecuaciones con dos incógnitas, lo que se hace de la siguiente manera.

Tomemos las ecuaciones (1) y (2) y eliminemos la incógnita *z*, pero puede ser una de las otras incógnitas. .

$$\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 & (1) \\ x & + & y & - & z & = & 0 & (2) \\ \hline 2x & + & 2y & & / & = & 4 & (4) \end{array}$$

Observemos que se obtiene una nueva ecuación (4) que es de dos incógnitas.

Ahora tomamos las ecuaciones (1) y (3), [pero puede ser también (2) y (3)] y eliminamos la misma incógnita que se eliminó anteriormente; es decir, *z*.

$$\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 & (1) \\ x & - & y & + & z & = & 2 & (3) \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 & (1) \\ -x & + & y & - & z & = & -2 & (3) \\ \hline / & + & 2y & & / & = & 2 & (5) \end{array}$$

Las ecuaciones (4) y (5) tendrán a lo más dos incógnitas. En este caso la ecuación (5) solo tiene una incógnita, luego despejamos *y* se puede obtener su valor.
2y =2, entonces: **y = 1**. Primera solución.

Para la segunda solución, reemplazamos *y* en la ecuación (4), ya que esta solo tiene dos incógnitas y se conoce el valor de una de ellas. Entonces:

$$2x+2y=4 \Rightarrow 2x+2(1)=4 \Rightarrow 2x=4-2=2 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$$

La segunda solución es **x = 1**.

Para la última solución; es decir, la incógnita *z,* se reemplaza en cualquiera de la ecuaciones originales el valor de *x* e *y*, así queda resuelto el sistema.
Tomemos la ecuación (1), (pero puede ser una de las otras, no lo olvidemos)

$$x+y+z=4 \Rightarrow (1)+(1)+z=4 \Rightarrow 2+z=4 \Rightarrow z=4-2=2$$

La tercera solución **z = 2**.

La solución total: (x, y, z) = (1, 1, 2)

Ejemplo 2:

Resolver por eliminación el sistema dado a continuación.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 12 \\ 2x & - & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & - & z & = & 6 \end{array}$$

Solución:

Recordemos que para facilitar el proceso debemos enumerarlas.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 12 & (1) \\ 2x & - & y & + & z & = & 7 & (2) \\ x & + & 2y & - & z & = & 6 & (3) \end{array}$$

Tomemos (1) y (2) y eliminemos la incógnita *y*, ya que tiene signos contrarios y esto facilita su eliminación, pero no olvidemos que se puede eliminar cualquiera de las otras incógnitas.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 12 & (1) \\ 2x & - & y & + & z & = & 7 & (2) \\ \hline 3x & & / & + & 2z & = & 19 & (4) \end{array}$$

Ahora se toma (2) y (3), pero como se ha venido comentando, puede ser (1) y (3). Se debe eliminar la misma incógnita; es decir, *y*. Entonces como tienen signos contrarios solo se debe igualar coeficientes, lo que se hace multiplicando la ecuación (2) por 2 y la ecuación (3) se deja igual.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & - & y & + & z & = & 7 & (2) \\ x & + & 2y & - & z & = & 6 & (3) \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 4x & - & 2y & + & 2z & = & 14 & (2) \\ x & + & 2y & - & z & = & 6 & (3) \\ \hline 5x & & / & + & z & = & 20 & (5) \end{array}$$

Como se puede ver, se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas (4) y (5). La solución se puede hacer los cualquiera de los métodos estudiados. Usemos igualación:

Para la ecuación (4): 3x + 2z = 19, despejamos z, luego: $z = \frac{19 - 3x}{2}$

Para la ecuación (5): 5x + z = 20, también despajamos z, luego: $z = 20 - 5x$

Ahora igualamos las expresiones y operamos: $\frac{19 - 3x}{2} = 20 - 5x \Rightarrow 19 - 3x = 40 - 10x$

Como tenemos una ecuación con una incógnita, se resuelve como se ha aprendido.

10x – 3x = 40 – 19 entonces: 7x = 21, así **x = 3**

Ahora reemplazamos el valor de *x* en una de las ecuaciones (4) ó (5), así se puede obtener el valor de la otra incógnita. Tomemos la ecuación (5).
5x + z = 20, entonces: 5(3) + z = 20, luego: z = 20 – 15 = 5. Por consiguiente **z = 5**

Finalmente, reemplazamos el valor se *x* y *z* en cualquiera de las ecuaciones originales. Tomemos la ecuación (3), pero ustedes pueden tomar otra para que comprendan mejor el procedimiento.

x + 2y – z = 6, reemplazando tenemos: (3) + 2y – (5) = 6, luego: 2y - 2 = 6, despejamos la incógnita: $y=\frac{6+2}{2}=4$. Luego **y = 4**

solución: (x, y, z) = (3, 4, 5)

SEGUNDO METODO: SOLUCIÓN POR DETERMINANTES.

Cuando se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se presentan determinantes de 3x3, conocidos como determinantes de tercer orden. Esto nos induce a analizar dichos determinantes, antes de su respectiva aplicación.

Determinantes de tercer orden: Son arreglos de 3 filas y 3 columnas.

$$\boxed{A=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Para resolver un determinante de tercer orden hay tres formas diferentes, veamos:

1. *Productos Cruzados*: Se puede ver esquemáticamente el procedimiento.

Sea el determinante: $A=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Solución: $A=[a]-[b]$

Donde:

$$a=(x_1y_2z_3)+(y_1z_2x_3)+(x_2y_3z_1)$$

$$b=(x_3y_2z_1)+(x_2y_1z_3)+(y_3z_2x_1)$$

2. *Método de Sarrus*: Consiste en aumentar las dos primeras filas a continuación del determinante original y hacer productos cruzados. Para el determinante A definido anteriormente, el nuevo determinante, propuesto por sarrus es:

$$A'=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Solución del determinante: $A'=[\alpha]-[\beta]$

$$\alpha = (x_1 y_2 z_3) + (x_2 y_3 z_1) + (x_3 y_1 z_2)$$
$$\beta = (x_3 y_2 z_1) + (x_1 y_3 z_2) + (x_2 y_1 z_3)$$

3. *Método de Cofactor*: La siguiente ilustración explica el procedimiento.

$$\boxed{A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Rightarrow x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

La última parte se resuelve como determinante de 2x2:

$$A = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - y_1(x_2 z_3 - x_3 z_2) + z_1(x_2 z_3 - x_3 y_2)$$

Ejemplo 1:

Resolver por productos cruzados y por Sarrus el siguiente determinante.

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

a-) Por productos cruzados.

D = [a] – [b]

[a] = [(-2)(-1)(3) + (3)(-2)(1) + (3)(4)(2)] = 6 – 6 + 24 = 24

[b] = [(2)(-1)(1) + (3)(3)(3) + (-2)(4)(-2)] = -2 + 27 +16 = 41

D = 24 – 41 = -27

b-) Por Sarrus.

$$D' = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow D' = [\alpha] - [\beta]$$

$$[\alpha] = (-2)(-1)(3) + (3)(-2)(1) + (2)(3)(4) = 6 - 6 + 24 = 24$$
$$[\beta] = (2)(-1)(1) + (-2)(-2)(4) + (3)(3)(3) = -2 + 16 + 27 = 41$$

D' = 24 – 41 = -27

Ejemplo 2:

Desarrollar el siguiente determinante por Sarrus y por cofactor.

$$P = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

a-) Por Sarrus.

$$P' = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow P' = [\alpha] - [\beta]$$

$$[\alpha] = (-4)(2)(2) + (1)(4)(0) + (-2)(3)(3) = -16 + 0 - 18 = -34$$
$$[\beta] = (-2)(2)(0) + (-4)(4)(3) + (1)(3)(2) = 0 - 48 + 6 = -42$$

P = -34 – (-42) = -34 + 42 = 8

b-) Por Cofactor:

$$P = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow (-4)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow (-4)[2x2 - (4)x3] - 3[1x2 - (-2)x3] + 0$$

P = (-4)(4 - 12) - 3(2 + 6) + 0 = 32 – 24 = 8

Los dos primeros métodos analizados solo sirven para determinantes de tercer orden, mientras que el método de cofactores se puede utilizar para determinantes de mayor tamaño.

EJERCICIOS

Resolver los determinantes dados a continuación por el método de productos cruzados.

1. $A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Rta. A = -52

2. $B = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix}$ Rta: B = 9/2

Resolver por Sarrus los determinantes dados.

3. $C = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ Rta: C = 58

4. $E = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 2 & -1/2 & 1 \end{vmatrix}$ Rta: E = -1/2

Resolver por Cofactor:

5. $F = \begin{vmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ Rta: F = -49

Cual será el valor de x para que el determinante sea verdadero.

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & x & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$ Rta: x = - 2

$P = \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -1 & x & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$ Rta: x = - 4

Solución de Ecuaciones por Determinantes: Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por determinantes, ***KRAMER***, propuso una metodología que ilustramos a continuación.

Sea el sistema:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}}$$

Primero se calcula el determinante de coeficientes.

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Aclarando que $\Delta \neq 0$

En seguida se calculan los determinantes para cada incógnita.

$$\boxed{\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad \boxed{\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad \boxed{\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}$$

Finalmente la solución para cada incógnita.

$$\boxed{x = \frac{\Delta x}{\Delta}} \qquad \boxed{y = \frac{\Delta y}{\Delta}} \qquad \boxed{z = \frac{\Delta z}{\Delta}}$$

Ejemplo 1:

Resolver el siguiente sistema por determinantes.

$$x + y + z = 5$$
$$3x + 2y + z = 8$$
$$2x + 3y + 3z = 14$$

Solución:

Usando la técnica de Kramer tenemos:

Determinante de coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Lo resolvemos por cofactor.

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(2x3 - 3x1) - 1(3x3 - 2x1) + 1(3x3 - 2x2) = 3 - 7 + 5 = 1$$

Ahora los determinantes de las incógnitas.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (30 + 24 + 14) - (28 + 24 + 15) = 68 - 67 = 1$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (1x8x3 + 3x14x1 + 2x5x1) - (2x8x1 + 1x14x1 + 3x5x3) = 76 - 75 = 1$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 14 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(2x14 - 3x8) - 1(3x14 - 2x8) + 5(3x3 - 2x2) = 4 - 26 + 25 = 3$$

¿Identificar por qué método se resolvió cada determinante? *Trabajar en el grupo colaborativo.*

Finalmente hallamos el valor de cada incógnita.

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3$

Solución: (x, y, z) = (1, 1, 3)

Ejemplo 2:

Resolver.

$$x - y + 2z = 0$$
$$3x + 2y = 0$$
$$-2x + 2y - 4z = 0$$

Solución:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-8 + 12 + 0) - (-8 + 12 + 0) = 0$$

Como el determinante de coeficientes es cero, el sistema no se puede resolver, recordemos que este determinante no puede ser cero. La única que puede ser cierta es: x = y = z = 0, ya que éste tipo de sistema se le conoce como sistema homogéneo.

EJERCICIOS

Resolver por eliminación los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $$\begin{aligned} x-2y+3z&=7 \\ 2x+y+z&=4 \\ -3x+2y-2z&=-10 \end{aligned}$$ Rta: x = 2, y = -1, z = 1

2. $$\begin{aligned} 3x+y-z&=2/3 \\ 2x-y+z&=1 \\ 4x+2y&=8/3 \end{aligned}$$ Rta: x = 1/3, y = 2/3, z = 1

Solucionar los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Kramer.

3. $$\begin{aligned} x-2y+3z&=7 \\ 2x+y+z&=4 \\ -3x+2y-2z&=-10 \end{aligned}$$ Rta: x = 2, y = -1, z = 1

4. $$\begin{aligned} 2x-3y+2z&=-3 \\ -3x+2y+z&=1 \\ 4x+y-3z&=4 \end{aligned}$$ Rta: x = 2/3, y = 31/21, z = 1/21

5. Describa explícitamente los métodos de Sarros y Kramer y explique para que se utilizan.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO: PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Con el estudio de las ecuaciones de primer grado, ahora estamos en capacidad de resolver problemas diversos, utilizando ecuaciones de este tipo. Lo nuevo aquí es que a partir del contexto y descripción del fenómeno, se debe *Plantear una Ecuación o Ecuaciones* para resolver el problema.

Es importante tener en cuenta para resolver problemas con ecuaciones, los siguientes aspectos, los cuales permitirán obtener resultados claros y verdaderos.

1. *Se debe leer muy bien el problema hasta que quede completamente entendido. Si es necesario, leerlo las veces que sean requieran.*
2. *Identificar las incógnitas y expresarlas por medio de un símbolo.*
3. *Llevar el problema a un modelo matemático, es decir, plantear las ecuaciones.*
4. *Si es necesario utilizar gráficos, tablas y otros, como ayuda para la ilustración del problema.*
5. *Realizar las operaciones necesarias para obtener el valor de las incógnitas.*
6. *Identificar la respuesta y hacer la respectiva verificación.*
7. *Sacar las conclusiones del caso.*

Problemas con Ecuaciones de Primer Grado con Una Incógnita

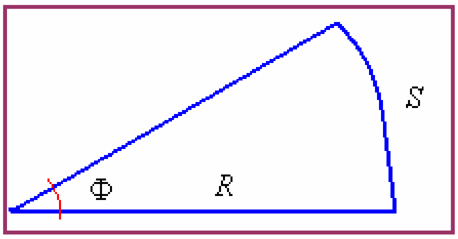
Para resolver problema de este tipo, lo más pertinente es hacer ejemplos modelos y hacer su respectiva explicación.

Ejemplo 1:

Escribir la modelación matemática de la siguiente situación*: La longitud de un arco circular, es el producto del ángulo barrido y el radio del círculo.*

Solución:

Se dan símbolos a los términos.
Longitud del arco: S
Angulo barrido: θ
Radio del círculo: R
Según el problema, el modelo sería: **S = R x θ**



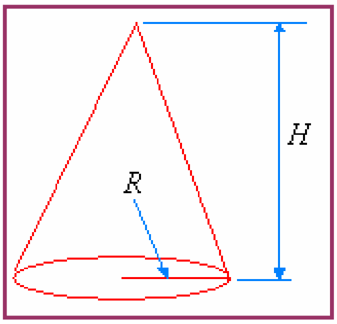
Ejemplo 2:

Escribir matemáticamente la siguiente situación: *El volumen de un cono circular recto es un tercio del producto de una constante, el radio al cuadrado y la altura*.

Solución:

Los símbolos.
V = volumen
Π = constante
R = radio
H = altura
Según el contexto

$$V = \frac{1}{3}\Pi R^2 H$$

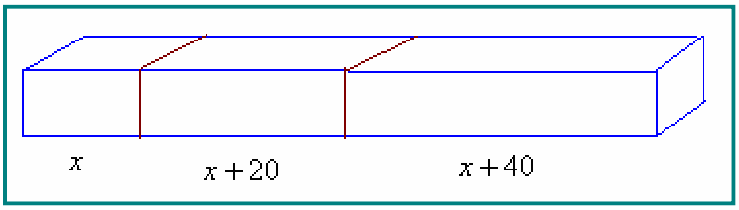


Ejemplo 3 :

Un carpintero debe cortar una tabla de 6 m. de largo en tres tramos, si cada tramo debe tener 20 cm. más que el anterior, ¿Cuál será la longitud de cada tramo?

Solución:

Sea x la longitud del tramo más corto, entonces el segundo tramo será x + 20 y el tercero será x + 40.



El modelamiento matemático es:

(x) + (x + 20) + (x + 40) = 600 Operando:
3x + 60 = 600 Entonces: 3x = 600 – 60 = 540
Despejando la incógnita.
x = 540/3 = 180
Así:
El tramo más corto x = 180 cm.
El segundo tramo: x + 20 = 180 + 20 = 200 cm.
El tercer tramo: x + 40 = 180 + 40 = 220 cm.

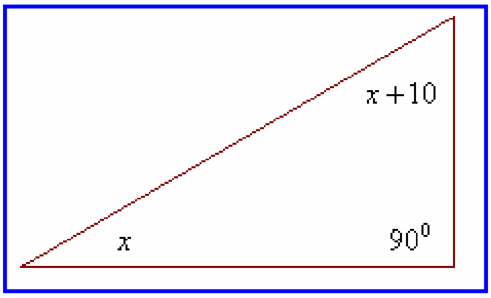
Ejemplo 4:

Se sabe que la suma de los ángulos internos de un triángulo mide 180^0. En un triángulo rectángulo uno de los ángulos es él otro aumentado en 10^0. ¿Cuáles serán las medidas de los ángulos de dicho triángulo?

Solución:

Si x es el ángulo más pequeño, el otro ángulo será x + 10. Recordemos que un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto, luego:

$(x) + (x + 10) + 90 = 180$
$2x + 100 = 180$
$2x = 180 – 100 = 80$
$x = 40$



Ahora: $x + 10 = (40) + 10 = 50$

Los ángulos son: 40^0, 50^0, 90^0.

Ejemplo 5.

En una molécula de azúcar se encuentra el doble de átomos de hidrógeno que de oxigeno, también tiene un átomo más de carbono que de oxígeno. Si la molécula de azúcar tiene 45 átomos. ¿Cuántos átomos de cada elemento tiene dicha sustancia?

Solución:

x = Átomos de oxigeno, entonces:
$2x$ = Átomos de hidrógeno
$x + 1$ = Átomos de carbono
Como todo suma 45, entonces:

$(x) + (2x) + (x + 1) = 45$

Operando:
$4x +1 = 45$
$4x = 44$
$x = 11$
$2x = 11x2 = 22$
$x + 1 = 11 + 1 = 12$
Solución: La molécula de azúcar tiene 11 átomos de oxigeno, 22 átomos de hidrógeno y 12 átomos de carbono. $C_{12}H_{22}0_{11}$

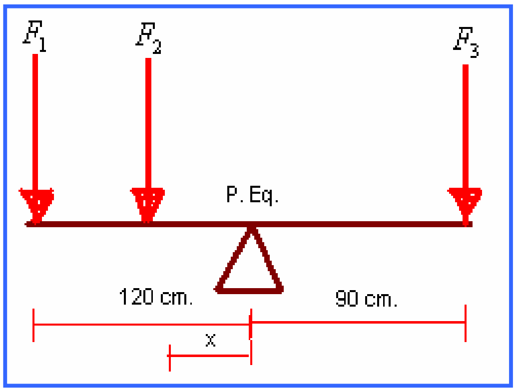
Ejemplo 6:

Un Ingeniero desea desarrollar un equipo hidráulico compuesto por dos cilindros. El primer cilindro está a 120 cm. del punto de apoyo y ejerce una fuerza de 500 Kg.-f, el sistema debe soportar una fuerza de 1.200 Kg.-f ubicada a 90 cm. del punto de apoyo y al lado opuesto de los cilindros. ¿En donde se debe colocar el segundo cilindro para que ejerza una fuerza de 700 Kg-f?

Solución:

Para que el sistema este en equilibrio, la suma de las fuerzas debe ser cero.

F_1 = Fuerza uno, ubicada a x_1 distancia del punto de equilibrio.
F_2 = Fuerza dos, ubicada a x_2 distancia del punto de equilibrio.
F_3 = Fuerza tres, ubicada a 90 cm. del punto de equilibrio.



Según las condiciones del problema:

$F_1X_1 + F_2X_2 = F_3X_3$

Reemplazando:

500x120 + 700x X = 1.200x90

Resolviendo:

6.000 + 700X = 108.000

700 X = 102.000

X = 145,71 Cm.

Solución: El cilindro dos se debe colocar a 145,71 cm. del punto de equilibrio

EJERCICIOS

Hacer el planteamiento de los problemas propuestos y resolverlos adecuadamente.

1. La suma de dos números enteros positivos es igual a 12, uno de ellos es el doble del otro. ¿Cuáles son los números?

Rta: 4 y 8

2. Un voceador reparte el periódico en 1800 seg. su compañero lo hace en 120 seg. Si lo hacen simultáneamente, ¿Cuánto tardarán en hacer la entrega?

Rta: 720 seg.

3. Se desea construir un Silo para granos en forma de cilindro circular y semiesférico en la parte superior. El diámetro del silo debe ser de 30 pies ¿Cuál será la altura del silo, si la capacidad debe ser de 11.250π pie^3?

Rta: 55 pies

4. El largo de un campo de baloncesto es 12 metros más que su ancho. Si el perímetro es de 96 metros, ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

Rta: Largo 30 metros
Ancho 18 metros

5. En un triángulo, el ángulo más pequeño es la mitad del mayor y las dos terceras partes del ángulo intermedio. ¿Cuáles serán las medidas de los ángulos?

Rta: 40^0, 60^0 y 80^0

6. Un fabricante de grabadoras reduce el precio de un modelo X en el 15%, si el precio con el descuento es de $125.000,00 ¿Cuál será el precio original del modelo X?

Rta: $147.059

Problemas con Ecuaciones de Primer Grado con Dos Incógnita

En el desarrollo de ecuaciones de primer grado con una incógnita, se han adquirido destrezas en el planteamiento y resolución de problemas. Sin olvidar los cinco pasos que se recomiendan para este tipo de situaciones, entramos en le análisis y resolución de problemas donde se involucran ecuaciones con dos incógnitas.

En este aparte, los problemas son tal, que se deben plantear dos ecuaciones con dos incógnitas, una vez desarrollado el planteamiento, la solución es más fácil ya que se conocen los diversos métodos para solucionar dos ecuaciones con dos incógnitas.

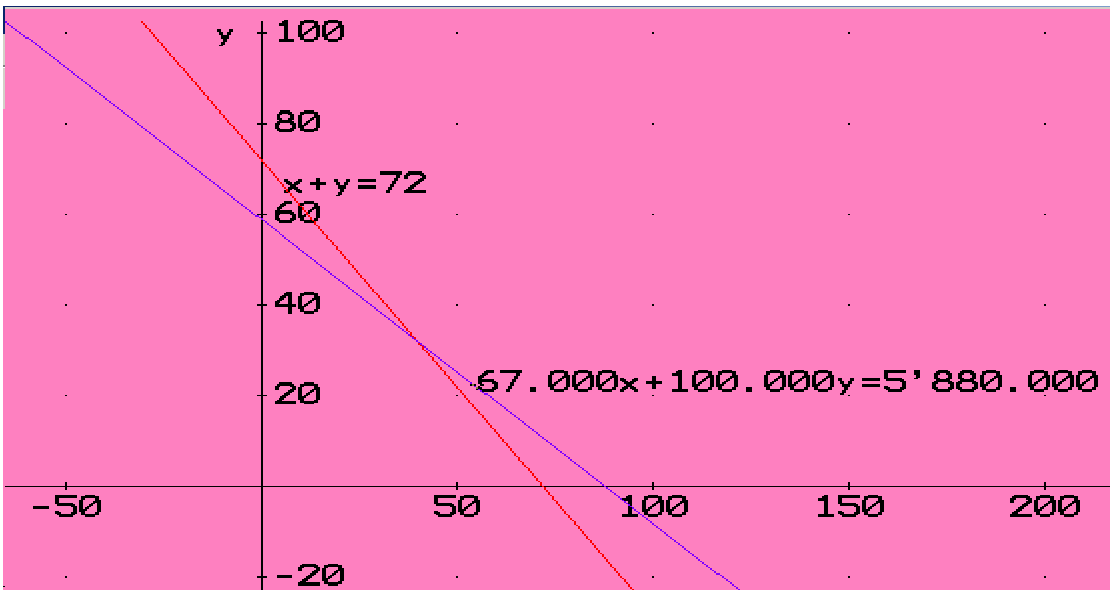
Ejemplo 1:

Una industria tiene dos clases de equipos para comunicación, la clase A cuesta $67.000 y la clase B cuesta $100.000, si fueron vendidos 72 equipos con un costo total de $5'880.000, ¿Cuántos equipos de cada clase fueron vendidos?

Solución:

Como se tiene dos incógnitas: Costo y cantidad, se debe plantear dos ecuaciones.
x = Equipos de clase A
y = Equipos de clase B
Ecuación para cantidad:
$x + y = 72$
Ecuación para costo:
$67.000\,x + 100.000\,y = 5'880.000$
Como se tiene dos ecuaciones con dos incógnitas, se puede utilizar para su solución, grafico, eliminación, determinantes.

Solución grafica:



Solución analítica:

Para este caso utilicemos la eliminación por reducción. Se elimina la incógnita x. Luego la primera ecuación se multiplica por -67.000 y la segunda queda igual.

-67.000 x – 67.000 y = - 4'824.000
67.000 x + 100.000 y = 5'880.000

33.000 y = 1'056.000

Despejando y = 32

Reemplacemos *y* en la primera ecuación:
x + y = 72
x + (32) = 72
x = 40.
Solución: Se vendieron 40 equipos de clase A y 32 equipos de clase B.

NOTA: La solución gráfica, nos da una aproximación, ya que el punto de corte se ubica cerca de 50 en *x* y entre 20 y 40 en *y*. Mientras la solución analítica si nos ofrece los valores exactos de la solución.

Ejemplo 2:

Se debe obtener una solución a partir de dos soluciones componentes. La solución N tiene el 5% y M tiene el 20%. La cantidad resultante debe ser de 200 ml, con una concentración del 15%. ¿Cuántos mililitros de solución N y M se deben mezclar?

Solución:

x = Solución N al 5%
y = Solución M al 20%

Se tiene dos ecuaciones, una para el volumen y otra para la concentración.

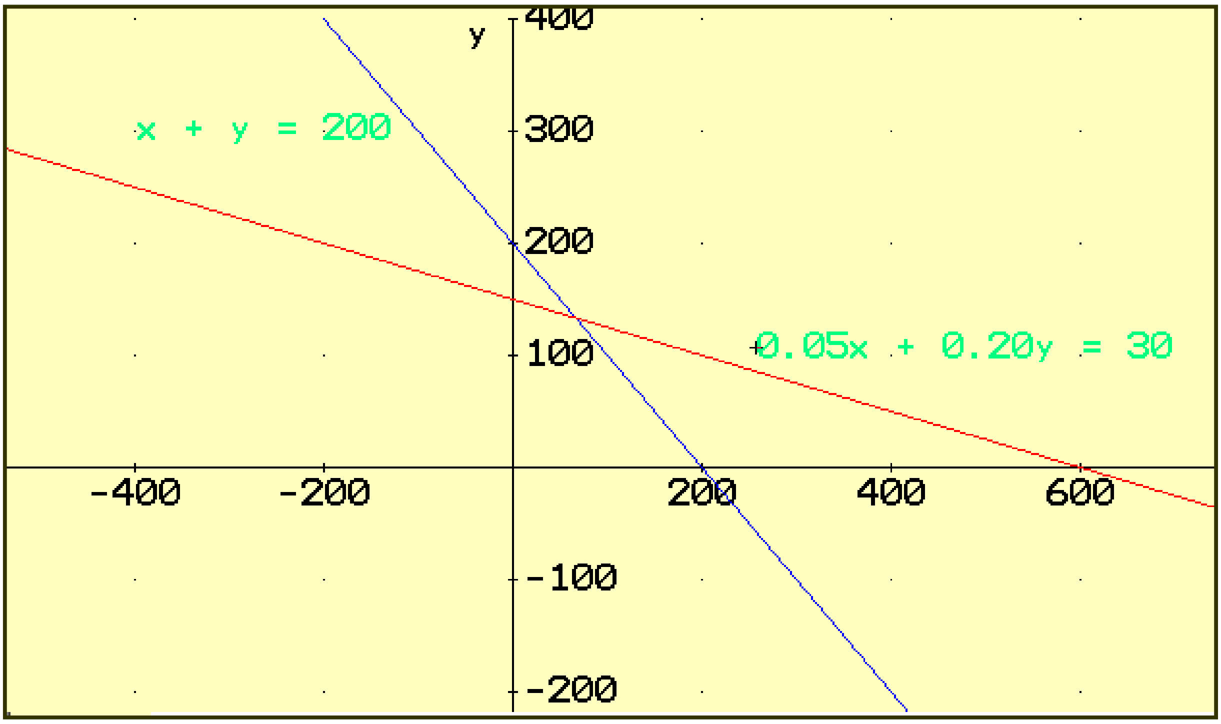
Ecuación para el volumen:
x + y = 200 (mililitros)

Ecuación para la concentración.
0,05x + 0,20y = 200(0,15) entonces: 0,05 x + 0,20 y = 30

Las dos ecuaciones obtenidas son

x + y = 200
0,05 x + 0,20 y = 30

Solución Grafica:



Solución Analítica:

Vamos a resolverlo por sustitución:

x + y = 200
0,05 x + 0,20 y = 30

Despejemos *x* en la primera ecuación
x = 200 – *y*
Reemplazamos en la segunda.
0,05(200 – y) + 0,20 y = 30
10 – 0,05y + 0,20y = 30
0,15y = 20
y = 133,33

Ahora, reemplazamos el valor de *y* en la primera ecuación, recordemos que puede ser también en la segunda.
x + y = 200, entonces: x + (133,33) = 200
x = 200 – 133,33 = 67,67
Solución:
Se deben mezclar 66,67 ml de solución N y 133,33 ml. De solución M.

Ejemplo 3:

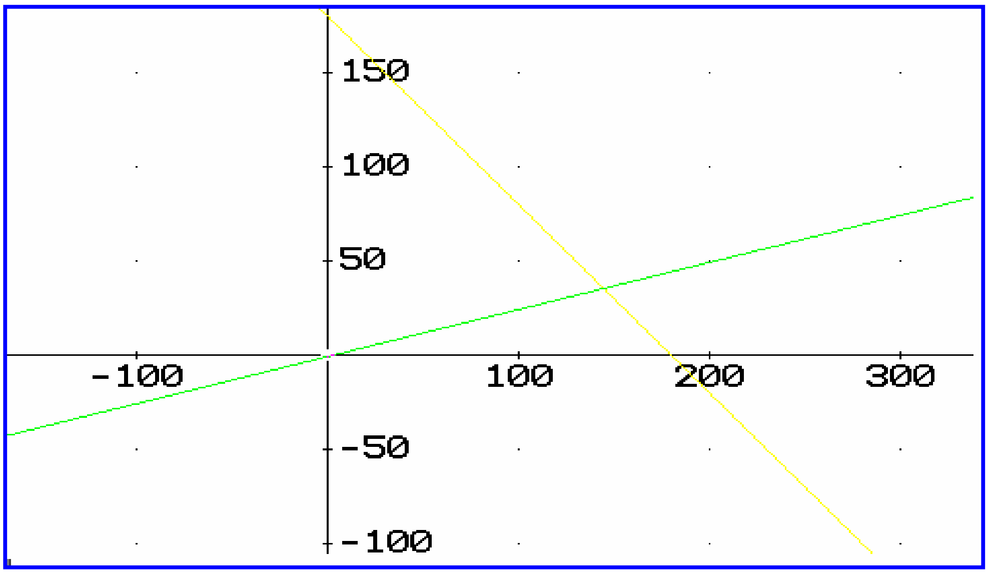
Los ángulos α y β son suplementarios, de tal manera que uno de ellos es 4 veces y 3 grados mayor que el otro. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos α y β?

Solución:

Sea α ángulo mayor
Sea β ángulo menor.

La ecuación de ángulos suplementarios: $\alpha + \beta = 180$
La ecuación, dada la condición del problema: $\alpha = 4\beta + 3$
Organizando:
$\alpha + \beta = 180$
$\alpha - 4\beta = 3$

Solución Grafica:



Solución Analítica:

$\alpha + \beta = 180$
$\alpha - 4\beta = 3$

Por reducción:

$4\alpha + 4\beta = 720$
$\alpha - 4\beta = 3$

$5\alpha = 723$

$\alpha = 144,6$

Para hallar el ángulo β, reemplazamos en la segunda ecuación:
$(144{,}6) - 4\beta = 3$
Desarrollando:
$-4\beta = 3 - 144{,}6 = -141{,}6$
$\beta = 35{,}4$

Solución: El ángulo α mide $144{,}6^0$ y el ángulo β mide $35{,}4^0$

Ejemplo 4:

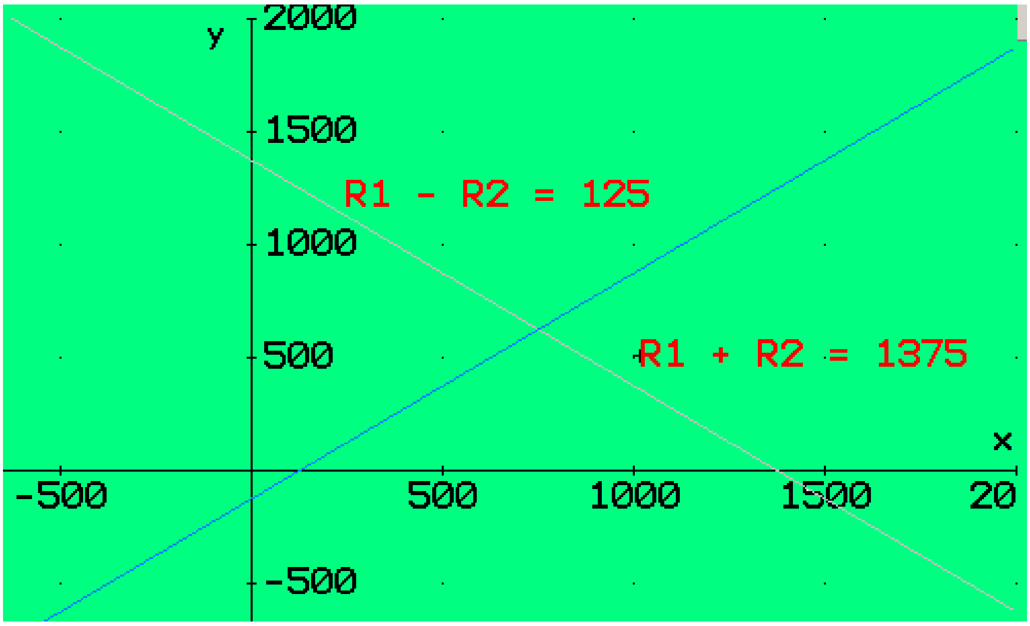
En un circuito en serie la resistencia total es la suma de las resistencias componentes. Un circuito en serie es compuesto por dos resistencias R_1 y R_2, la resistencia total es de 1.375 ohmios, para suministrar el voltaje requerido, R_1 debe tener 125 ohmios más que R_2. ¿Cuál es el valor de las resistencias?

Solución:

Se plantean las ecuaciones.

Ecuación de resistencia total.
$R_1 + R_2 = 1.375$
Según las condiciones del problema:
$R_1 = R_2 + 125$
Entonces:
$R_1 + R_2 = 1.375$
$R_1 - R_2 = 125$
Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas.

Solución Gráfica:



Solución por Sustitución:

Tomando las dos ecuaciones.
$R_1 + R_2 = 1.375$
$R_1 - R_2 = 125$
Despejamos R_1 en la segunda.
$R_1 = R_2 + 125$
Reemplazamos en la primera
$(R_2 + 125) + R_2 = 1.375$
Operando y simplificando:
$2R_2 = 1.375 – 125 = 1.250$
$R_2 = 1250/2 = 625$
Ahora se busca el valor de R_1 reemplazando el valor de R_2 en cualquiera de las ecuaciones, utilicemos la ecuación dos.
$R_1 - R_2 = 125$, entonces: $R_1 = R_2 + 125 = (625) + 125 = 750$
Por consiguiente: las resistencias tienen el valor de 625 y 750 ohmios.

EJERCICIOS

Leer cuidadosamente los problemas propuestos y resolverlos haciendo los pasos necesarios.

1. Un ángulo mide 46^0 más que su complementario. ¿Cuál será la medida de los ángulos?

Rta: 22^0 y 68^0

2. En un distribuidora de dulces, 4 paquetes de dulces y 4 paquetes de galletas valen $7.900. Dos paquetes de galletas cuestas $20 más que un paquete de dulces. ¿Cuánto cuestan un paquete de galletas y un paquete de dulces?

Rta: Galletas: $665, -dulces $1.360

3. Un automóvil recorre 50 Km. En el mismo tiempo que un avión viaja 180 Km. La velocidad del avión es de 143 Km/hr más que el del automóvil. ¿Cual es la velocidad del automóvil?

Rta: 55 Km/hr

4. El perímetro de un rectángulo es de 16 metros, su área es de 15 m^2 ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Rta: Largo 5 metros, ancho 3 metros

5. Para asistir a una función de teatro, se tiene dos tipos de entradas, el preferencial vale $4.500 y el popular vale $3.000, si se vendieron 450 boletas para un recaudo de $1'819.500 ¿Cuántas boletas de cada clase se vendieron?

Rta: Preferencial 313 y popular 137

6. Se desea preparar 200 Litros de ácido nítrico al 34% a partir de dos soluciones del 28% y 36% de concentración. ¿Cuáles deben ser las cantidades de ácido a utilizar para obtener la solución deseada?

Rta: Del 28% 50 Lt y del 36% 150 Lt.

Problemas con Ecuaciones de Primer Grado con Tres Incógnita

Existen problemas donde están involucradas tres incógnitas, la solución de este tipo de problemas son similares a los casos anteriores. Veamos algunos ejemplos modelos, que nos permitirán comprender situaciones de este tipo.

Ejemplo 1:

La suma de tres números es cuatro, el primero, dos veces el segundo y el tercero suma uno. Por otro lado tres veces el primero mas el segundo, menos el tercero equivale a -2. ¿Cuáles son los números?

Solución

El planteamiento.
x = Primer número
y = Segundo número
z = tercer número
Según las condiciones.
$x + 2y + z = 1$ (1)
$3x + y - z = -2$ (2)
$x + y + z = 4$ (3)

Tomamos (1) y (2) y eliminamos z.
$x + 2y + z = 1$ (1)
$3x + y - z = -2$ (2)

$4x + 3y = -1$ (4)

Ahora tomamos (2) y (3), eliminando la misma incógnita z.
$3x + y - z = -2$ (2)
$x + y + z = 4$ (3)

$4x + 2y = 2$ (5)

Se han obtenido dos ecuaciones con dos incógnitas, la forma de resolverlas ya se han estudiado.
$4x + 3y = -1$ (4)
$4x + 2y = 2$ (5)

Eliminemos x.
$- 4x - 3y = 1$
$4x + 2y = 2$

$- y = 3$

Primera solución: **y = - 3**

Reemplazamos el valor de y en cualquiera de las ecuaciones (4) o (5). Tomemos la ecuación 4.
$4x + 3y = -1$, entonces: $4x + 3(-3) = -1$
Operando y simplificando:
$4x = -1 + 9 = 8$
$x = 8/4 = 2$
Segunda solución: **x = 2.**

Para hallar el valor de la tercera incógnita se reemplaza los valores de *y* y *x* en cualquiera de las ecuaciones originales (1), (2), (3). Tomemos la ecuación tres.
$x + y + z = 4$.
Reemplazando: $(2) + (-3) + z = 4$
$z = 4 + 3 – 2 = 5$
Así: **z = 5**

Ejemplo 2:

El ángulo más grande de un triángulo es 70^0 mayor que el ángulo más pequeño y el ángulo restante es 10^0 más grande que tres veces el ángulo más pequeño ¿Cuáles son las mediciones de los ángulos?

Solución:

x = Angulo más pequeño
y = Angulo intermedio
z = Angulo mas grande

Por las condiciones del problema:

$x + y + z = 180$ (1) ¿porqué?
$x – z = -70$ (2)
$3x – y = -10$ (3)

Se elimina la incógnita y, entonces:

$x + y + z = 180$
$x – z = -70$

$2x + y = 110$ (4)

Se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$3x – y = -10$
$2x + y = 110$

Eliminamos y.

$3x - y = -10$
$2x + y = 110$

$5x = 100$

x = 20

Calculemos ahora y:
$3x - y = -10$, entonces: $3(20) - y = -10$, operando: $y = 10 + 60 = 70$

y = 70

Finalmente para hallar z, tomaos la ecuación (1)
$x + y + z = 180$, reemplazando: $(20) + (70) + z = 180$
Por consiguiente **z = 90.**

Así se tiene la solución al problema planteado.

EJERCICIOS

Resolver desarrollando paso por paso los siguientes problemas.

1. Un Biólogo desea probar un fertilizante a partir de tres clases existentes referenciados F_1, F_2, F_3, cuyos contendido de nitrógeno son: 30%, 20% y 15% respectivamente. El Biólogo quiere trabajar con 600 Kg. de mezcla con un contenido de nitrógeno de 25%, pero la mezcla debe tener 100 Kg. más de F_3 que de F_2. ¿Cuanto requiere el Biólogo de cada tipo de fertilizante?

Rta: F_1 = 380 Kg, F_2 = 60 Kg, F_3 = 160 Kg.

2. En la caja de un Banco hay $880 en billetes de $5, $10, $50. La cantidad de billetes es $10 es el doble de la de $50, si hay en total 44 billetes. ¿Cuántos billetes de cada denominación tiene el Banco? Rta: 8 billetes de $5, 24 de $10 y 12 de $50

3. Para tres grupos de investigación hay 1'360.000 millones de pesos, la cantidad de científicos es de 100, cada científico del primer grupo recibió $20.000 millones, del segundo grupo cada científico recibió $8.000 millones y del tercer grupo cada científico recibió $10.000 millones. Los científicos del primer grupo recibieron 5 veces más fondos que el segundo ¿Cuántos científicos hay en cada grupo de investigación?

Rta: Primer grupo 40, segundo 20 y tercero 40

4. Determine la parábola $y = ax^2 + bx + c$, la cual pasa por los puntos: (1, 2), (-2, -7) y (2, -3).

Rta: $y = -2x^2 + x + 3$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$$\boxed{\varphi x^2 + \mu x + \varepsilon = 0}$$

Las ecuaciones de segundo grado han sido motivadas desde tiempos inmemorables, inicialmente la necesidad de resolver problemas de área y volumen, condujeron a manipular ecuaciones de este tipo. Como los números negativos se formalizaron tarde en la historia de las Matemáticas, en sus inicios el manejo de las ecuaciones de segundo grado fue con números positivos.

Se reconocen 5 tipos de ecuaciones de segundo grado.

$x^2 = bx$, $x^2 = c$, $x^2 + c = bx$, $x^2 = bx + c$, $x^2 + bx = c$

La ecuación de tipo $x^2 = bx$, tiene una única solución x = b, ya que no se acepta a cero como solución.
La ecuación $x^2 = c$ equivale a hallar la raíz cuadrada de un número, para lo cual existen diversos métodos, como el de tanteo, el de Heron y el de Euclides.

METODO DE HERON: Heron de Alejandría en el siglo I, propuso una forma de hallar la raíz cuadrada de n número positivo así: Si se tiene por ejemplo $x^2 = 2$, se parte de una solución supuesta, por ejemplo 3/2, para hallar una nueva aproximación se aplica la siguiente regla.

$$\frac{3/2 + \frac{2/3}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12}$$

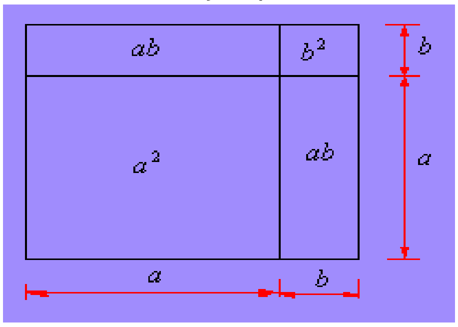
La siguiente aproximación:

$$\frac{17/12 + \frac{12/17}{2}}{2} = \frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408} \cong 1{,}41422156862\ldots$$ Este valor es una buena aproximación a $\sqrt{2}$

El método se repite tantas veces como se requiera una buena aproximación.

MÉTODO EUCLIDES: El colapso de la Aritmética pitagórica provoco una crisis que motivo a los griegos para dar más esfuerzo a la Geometría. Las cantidades fijas (constantes) las representaban con segmentos de recta con longitud relativa a una unidad fija. El producto de dos cantidades lo representaban como el área de un rectángulo y el producto de tres cantidades como el volumen de un prisma rectangular recto. De aquí el origen de la denominación de cuadrado y cubo para las potencias de dos y tres.

A manera de ejemplo.

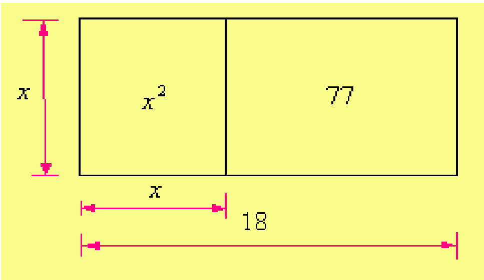


La gráfica representa la expresión muy conocida.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

La ecuación de tipo $x^2 + c = bx$, fue resuelta geométricamente por los griegos y aritméticamente por los babilonios.

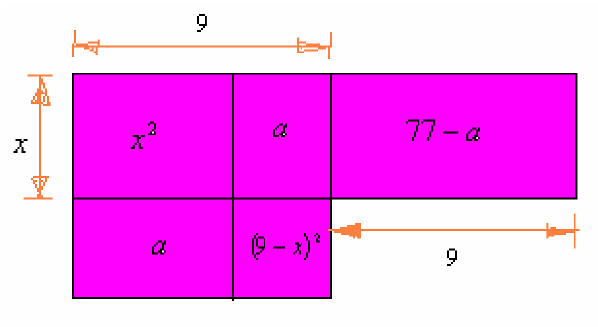
MÉTODO GRIEGO: Inicialmente los griegos y posteriormente los Árabes utilizaron un método geométrico para resolver éste tipo de ecuaciones.
Por ejemplo. Se a la ecuación $x^2 + 77 = 18x$



En la grafica se observa que la suma de las áreas es igual al área total del rectángulo.

Para encontrar el valor de x, se debe completar un cuadrado de lado 9 que incluya el cuadrado de lado x.

El cuadrado lo componen dos rectángulos de igual área y por los cuadrados de área x^2 y $(9 - x)^2$



De la gráfica se infiere:

$$x^2 + a = 77 - a \Rightarrow (x^2 + a) + a = 77$$

También por medio de la gráfica:

$$(9 - x)^2 + 77 = (9)^2$$

Resolviendo: $x = 7$

El segundo caso es hacer un cuadrado de lado x. que incluya un cuadrado de lado 9, veamos.

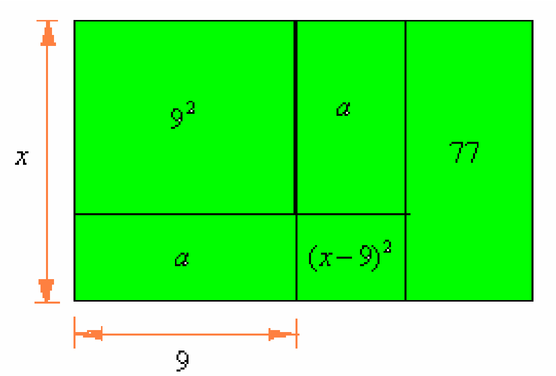
El cuadrado de lado x esta formado por dos rectángulos de igual área y por dos cuadrados, uno de área 9^2 y el otro de área $(x - 9)^2$
Entonces:

$$x^2 - a = 77 + a \Rightarrow x^2 = 77 + 2a$$

Además en la grafica se puede observar:

$$(x - 9)^2 + 9^2 = 77$$

Por lo tanto $x = 11$



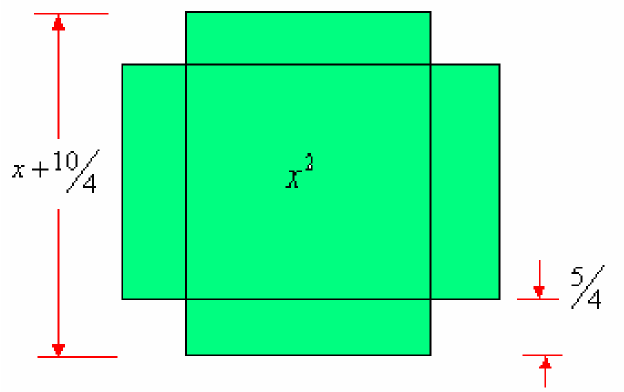
El método griego se fundamento en la proposición 5 del libro II de los Elementos de Euclides, el cual establece:

"*Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera, más el cuadrado de la diferencia entre una de las dos partes iguales y una parte desigual, es equivalente al cuadrado de la mitad de la recta dada*"

La ecuación tipo: $x^2 = bx + c$ fue trabajada por los griegos utilizando la geometría, pero en el siglo XVII en su libro "La Geometra", Renato Descartes describe un método geométrico para construir una solución de la ecuación cuadrática $x^2 = bx + c^2$

La ecuación de tipo $x^2 + bx = c$, fue trabajada por los árabes (Tabit Ben Qurra) y los griegos.

MÉTODO ARABE: Para el tipo de ecuación propuesta, los árabes utilizaron áreas de cuadrados y de rectángulos. Por ejemplo $x^2 + 5x = 36$
Para resolver esta ecuación, Al-Khowarizmi, dibujo un cuadrado de área x^2 y sobre cada lado dibujo 4 rectángulos de dimensiones x y 5/4, la figura tendrá de área 36



El lado del cuadrado es evidentemente x + 10/4

El área 36 + 25/4, luego el lado del cuadrado debe ser: x + 10/4 = 13/2

Por consiguiente x = 4.

Es pertinente que se analice detenidamente esta metodología, es muy interesante.

Hasta aquí se ha trabajado métodos con fundamentos geométricos para valores positivos de la incógnita, pero en muchos casos sabemos que las soluciones involucran valores negativos en ecuaciones de segundo grado.

La resolución de ecuaciones de segundo grado donde se presentan coeficientes negativos fueron trabajados inicialmente por Carlyle (1.775-1.881) y Von Staudt (1.798-1.867), Ambos se basaron en principios geométricos, utilizando círculos; dichos métodos son muy largos, por lo cual no se detallan, pero se consideró pertinente hacer la referencia a estos inquietos de las Matemáticas. En general se ha visto que los métodos utilizados por las civilizaciones antiguas son eminentemente geométricos, en la edad media y posteriormente la matemática ha desarrollado metodologías para el trabajo con ecuaciones que son más dinámicas y con principios matemáticos bien fundamentados.

MÉTODO AXIOMÁTICO: Es el método más utilizado; por no decir que el único, en la actualidad, se soporta en los axiomas, propiedades y definiciones, establecidos a través de toda la historia de las matemáticas.
Sea la ecuación $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, con a, b y c constantes y a ≠ 0. Este tipo de ecuaciones se puede resolver de las siguientes maneras:

1. **FACTORIZACIÓN:**

Se sabe que toda ecuación de segundo grado se puede expresar como producto de dos factores.

$ax^2 + bx + c = (x + \delta)(x + \beta) = 0$

A los factores obtenidos se les aplica la "Regla del Producto Nulo" la cual dice:

Si $(x + \delta)(x + \beta) = 0 \Rightarrow\Rightarrow (x + \delta) = 0, v, (x + \beta) = 0$

De esta manera se puede despejar la incógnita y obtener las soluciones respectivas. Se debe aclarar que las ecuación de tipo $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos soluciones, las cuales pueden ser: Reales iguales, Reales diferentes ó Imaginarias.

Ejemplo 1:

Resolver la siguiente ecuación. $3x^2 - 3x - 18 = 0$

Solución:

Primero factorizamos el trinomio, a esta altura debemos conocer las técnicas de factorización, en caso de dudas por favor consultar el modulo de Matemáticas Básicas para aclarar dudas al respecto.

$$\frac{3(3x^2 - 3x - 18)}{3} = 0 \Rightarrow \frac{(3x)^2 - 3(3x) - 54}{3} = 0$$

La última expresión se puede factorizar como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c = 0$

$$\frac{(3x)^2 - 3(3x) - 54}{3} = \frac{(3x - 9)(3x + 6)}{3} = (3x - 9)(x + 2) = 0$$

Tenemos dos términos a los cuales le podemos aplicar la regla del producto nulo.

$(3x - 9) = 0$, despejando $x = 3$
$(x + 2) = 0$, despenando $x = 2$
Se observa que se obtienen dos soluciones 2 y 3, así se comprueba que toda ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

Ejemplo 2:

Hallar la solución de la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$

Solución:

Se factoriza como trinomio cuadrado de la forma $x^2 + bx + c = 0$.

$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)(x - 5) = 0$

Por la regla del producto nulo:
$x - 5 = 0$, luego $x = 5$
$x - 5 = 0$, luego $x = 5$

Se observa que la solución es la misma.

Ejemplo 3:

Determinar el valor de *x* para la ecuación $x^2 + 16 = 0$

Solución:

Despejamos la incógnita.
$x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-16}$

Se observa que se tiene una raíz par de número negativo, cuya solución esta en el campo de los números imaginarios.
Así: **x = +4i** y **x = -4i**

NOTA: recordemos los números imaginarios, el tema esta explicitado en el modulo de matemáticas Básicas. Por otro lado, en los ejemplos anteriores se puede verificar que la solución puede ser real diferente, real igual ó imaginaria.

Ejemplo 4:

Hallar la solución de la ecuación $9x^2 - 25 = 0$

Solución:

La idea es despajar la incógnita, en este caso la x.

$$9x^2 - 25 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{9}} = \pm\frac{5}{3}$$

La solución es: x = 5/3 y x = -5/3

Ejemplo 5:

Resolver la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$

Solución:

Para este caso, NO es fácil identificar dos números que multiplicados sea - 4 y sumados sea - 2, esto conlleva a buscar otras técnicas para resolver este tipo de ecuaciones.

2. **FÓRMULA CUADRÁTICA**: En muchas ocasiones el trinomio propuesto en la ecuación no se puede resolver directamente por factorización o extracción de raíz, entonces lo que se hace para resolver la ecuación propuesta es utilizar la fórmula cuadrática, es un camino más rápido para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Sea la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b, c, reales y a ≠ 0.
La solución para la incógnita es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostración:

Para demostrar la fórmula cuadrática, aplicamos el principio de completar cuadrados. Veamos:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow ax^2+bx=-c$$

Se debe hacer que el coeficiente de la incógnita al cuadrado sea uno, para esto se divide todo por a.

$$\frac{a}{a}x^2+\frac{b}{a}x=\frac{-c}{a} \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

Se completa cuadrados en la parte izquierda de la ecuación

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

El primer término es un trinomio cuadrado perfecto, entonces:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \Rightarrow\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Se le extrae raíz cuadrado al la última ecuación.

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Rightarrow\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Desarrollando la raíz del denominador y operando las dos fracciones:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Las soluciones por medio de la fórmula cuadrática serán:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A la expresión $\Delta=b^2-4ac$ se le conoce como el discriminarte, debido a que su signo indica el tipo de solución obtenida.
Si $\Delta>0$: Hay dos soluciones reales diferentes.
Si $\Delta=0$: Hay dos soluciones reales iguales
Si $\Delta<0$: Hay dos soluciones imaginarias.

Ejemplo 1:

Resolver la siguiente ecuación utilizando la fórmula cuadrática. $x^2 - 6x + 8 = 0$

Solución:

Para el trinomio dado, a = 1, b = -6 y c = 8. Aplicando la fórmula.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Las soluciones son:

$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4$ y $x_2 = \frac{6-2}{2} = 2$

Ejemplo 2:

Resolver $3x^2 - 4x + 2 = 0$

Solución:

Identificamos las constantes. a = 3, b = - 4, c = 2, entonces:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{8}i}{6}$$

Simplificamos el radicar.

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}i}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{3}$$

Las soluciones:

$x_1 = \frac{2 + \sqrt{2}i}{2}$ y $x_2 = \frac{2 - \sqrt{2}i}{2}$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación: $2x^2 + 6x = -4$

Solución:

Lo primero que debemos hacer es igualar la ecuación a cero:

$$2x^2 + 6x = -4 \Rightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0$$

Así a = 2, b = 6 y c = 4. Se aplica la fórmula.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{-6 \pm 2}{4}$$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{-6+2}{2} = -2 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-6-2}{2} = -4$$

En los ejemplos realizados, donde las soluciones han sido reales, los valores son enteros, pero no siempre es así, en muchas ocasiones las soluciones son fraccionarias.

ECUACIONES DE GRADO n (n par)

$$\boxed{\varphi x^n + \mu x^{n/m} + \varepsilon = 0}$$

A veces se pueden presentar ecuaciones de la forma $ax^n + bx^m + c = 0$, donde m = n / 2, la idea es reducir el grado del trinomio hasta que n = 2. para resolverlo como un trinomio cuadrado.

Algunos ejemplos nos aclaran el proceso.

Ejemplo 1:

Resolver: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Solución:

Se hace un "cambio de variable" digamos $u = x^2$ luego $u^2 = x^4$ Reemplazamos:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow\Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$$

Ahora se puede resolver el último trinomio, se utiliza la factorización.

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \Rightarrow\Rightarrow (u-4)(u-1) = 0$$

Por la regla del producto nulo:
u – 4 = 0, u = 4
u – 1 = 0, u = 1

Ahora se reemplaza el valor de u por x^2
$x^2 = 4$, x = +2 y -2
$x^2 = 1$, x = +1 y -1

Se observa que se obtienen 4 soluciones, ya que la ecuación original es de grado cuarto.

Ejemplo 2:

Resolver la siguiente ecuación $y^{10} + 6y^5 - 16 = 0$

Solución:

Hacemos el "cambio de variable" $w = y^5$, luego $w^2 = y^{10}$ entonces:

$$y^{10} + 6y^5 - 16 = 0 \Rightarrow\Rightarrow w^2 + 6w - 16 = 0$$

La última expresión se puede resolver por factorización o por la cuadrática, resolvámosla por los dos métodos.

Factorización:

$$w^2+6w-16=0 \Rightarrow\Rightarrow (w+8)(w-2)=0$$

Por la regla del producto nulo:
w + 8 = 0, luego: w = -8
w -2 = 0, luego w = 2

Cuadrática:

$$w=\frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(1)(-16)}}{2(1)}=\frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-6\pm 10}{2}$$

Las soluciones:

$w_1=\frac{-6+10}{2}=2$ y $w_2=\frac{-6-10}{2}=-8$

Se nota que por los dos métodos las soluciones son iguales.

Pero la solución final se debe dar es en la incógnita y. Como $w = y^5$ Se hace el reemplazo:

Para w_1: $y^5=2 \Rightarrow\Rightarrow y=\sqrt[5]{2}$
Para w_2: $y^5=-8 \Rightarrow\Rightarrow y=\sqrt[5]{-8}$

Podemos ver que sólo se obtuvieron dos soluciones, pero la ecuación es de grado 10, luego hacer falta ocho soluciones, las cuales se pueden obtener por métodos matemáticos más avanzados.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación: $x^{2/3}+2x^{1/3}-15=0$

Solución:

Como en los casos anteriores se hace "cambio de variable".

$v=x^{1/3} \Rightarrow\Rightarrow v^2=x^{2/3}$ Procedemos a reemplazar.

$$x^{2/3}+2x^{1/3}-15=v^2+2v-15=0$$

La última expresión al resolvemos por factorización.

$$v^2+2v-15=0 \Rightarrow\Rightarrow (v+5)(v-3))=0$$

Por la regla del producto nulo.
v + 5 = 0, v = -5

v – 3 = 0, v = 3

Finalmente, reemplazamos nuevamente para x.

$$v=-5 \Rightarrow\Rightarrow x^{1/3}=-5 \Rightarrow\Rightarrow \left(x^{1/3}\right)^3=(-5)^3 \Rightarrow\Rightarrow x=-125$$

$$v=3 \Rightarrow\Rightarrow x^{1/3}=3 \Rightarrow\Rightarrow \left(x^{1/3}\right)^3=(3)^3 \Rightarrow\Rightarrow x=27$$

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones, realizando el procedimiento adecuadamente y justificando las respuestas.

1. $x^2--2x-24=0$ Rta: x = 6 y X = - 4

2. $(x-4)^2=16$ Rta: x = 0 y x = 8

3. $2y^2-5y+8=0$ Rta: $y=\dfrac{5\pm\sqrt{39}i}{4}$

4. $z^2+\sqrt{2}z-2=0$ Rta: $z=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{10}}{2}$

5. $y^6-10y^3=-21$ Rta: $y=\sqrt[3]{7}$ y $y=\sqrt[3]{3}$

6. Demuestre que la solución de la ecuación $x^{2/3}-x^{1/3}-6=0$ es 27 y -8.

7. Demuestre que la suma de las raíces de una ecuación cuadrática es $-\dfrac{b}{a}$

8. Para la ecuación $y^2-\beta y=-4$ Encontrar el valor de β tal que la ecuación tenga dos soluciones reales repetidas.

PROBLEMAS CON ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Muchos fenómenos del mundo que nos rodea, se pueden expresar matemáticamente por medio de ecuaciones cuadráticas. Para resolver problemas de este tipo, se debe seguir la metodología propuesta en la sección de problemas con ecuaciones de primer grado, es una buena orientación. La manera más pertinente de ilustrar problemas que se resuelven con ecuaciones de segundo grado, es por medio de ejemplos modelos.

Ejemplo 1:

La cuarta parte del producto de dos números enteros pares consecutivos es 56. ¿Cuáles son los números?

Solución:

Sea *x* el entero par, luego (*x + 2*) será el entero par consecutivo. Según las condiciones del problema.

$$\frac{1}{4}(x)(x+2)=56.$$

Desarrollando.

$$\frac{1}{4}(x)(x+2)=56 \Rightarrow\Rightarrow x^2+2x-224=0$$

Como e tiene una ecuación de segundo grado, desarrollémosla por la fórmula cuadrática.

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(1)(-224)}}{2(1)}=\frac{-2\pm\sqrt{900}}{2}=\frac{-2\pm 30}{2}$$

Las soluciones:

$$x_1=\frac{-2\pm 30}{2}=\frac{-2+30}{2}=14$$

$$x_2=\frac{-2\pm 30}{2}=\frac{-2-30}{2}=-16$$

Como se trata de enteros positivos, entonces la solución será 14 y 16

Ejemplo 2:

La raíz cuadrada de un número más cuatro, es lo mismo que el número menos ocho. ¿Cuál será el número?

Solución:

Sea y = el número a buscar. Aplicando las condiciones dadas en el problema.

$$\sqrt{y+4}=y-8$$

Teniendo el modelo matemático, se puede resolver la ecuación, para obtener la solución al problema. Lo que se puede hacer es eliminar la raíz y luego despejar la incógnita.

$$\sqrt{y+4} = y-8 \Rightarrow\Rightarrow \left(\sqrt{y+4}\right)^2 = (y-8)^2 \Rightarrow\Rightarrow y+4 = y^2-16y+64$$

Reorganizando la última ecuación:

$$y+4 = y^2-16y+64 \Rightarrow\Rightarrow y^2-17y+60=0$$

Por la cuadrática:

$$y = \frac{-(-17)\pm\sqrt{(-17)^2-4(1)(60)}}{2(1)} = \frac{17\pm\sqrt{289-240}}{2} = \frac{17\pm\sqrt{49}}{2}$$

Las soluciones:

$$y_1 = \frac{17\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{17+7}{2} = 12$$

$$y_2 = \frac{17\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{1777}{2} = 5$$

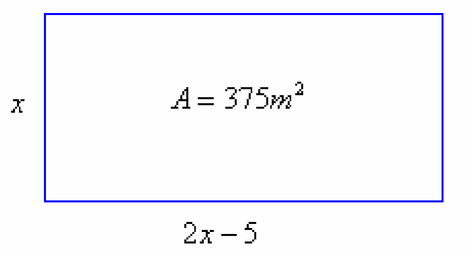
Se observa que la condición dada en el problema se cumple para los números 5 y 12.

Ejemplo 3:

Calcular las dimensiones de un rectángulo, cuya área es de 375 m^2; además, el largo es el doble del ancho menos cinco.

Solución:

Una gráfica nos ilustra la situación.



El planteamiento del modelo será:

$$(x)(2x-5) = 375$$

Multiplicando y resolviendo:

$$2x^2-5x = 375 \Rightarrow\Rightarrow 2x^2-5x-375=0$$

Se resuelve la ecuación por la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{25-4(2)(-375)}}{2(2)} = \frac{5\pm\sqrt{25+3000}}{4} = \frac{5\pm\sqrt{3025}}{4} = \frac{5\pm55}{4}$$

Las soluciones:

$$x = \frac{5+55}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

$$x = \frac{5-55}{4} = \frac{-50}{4} = -12,5$$

Como el problema es sobre longitudes, los valores negativos no son válidos, luego la solución es: x = 15.

Por consiguiente.

Largo: 2(15)-5 = 25

Ancho: x = 15

Ejemplo 4:

Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 400 m/seg. la altura tiene como modelo matemático $y = -16t^2 + v_0 t$ Siendo t el tiempo y v_0 la velocidad inicial.

A -) En que tiempo el objeto regresa al suelo

b -) Cuanto tarda en alcanzar 2.500 metros de altura

Solución:

a-) Cuando el objeto regresa al suelo, la altura es cero (y = 0)

$$y = -16t^2 + v_0 t \Rightarrow\Rightarrow -16t^2 + 400t = 0$$

Recordemos que la velocidad inicial es de 400 m/seg. Factorizamos para despejar el tiempo.

$$-16t^2 + 400t = 0 \Rightarrow\Rightarrow t(-16t + 400) = 0$$

Por la regla del producto nulo:

t = 0

-16t + 400 = 0, luego t = 25 seg.

El objeto regresa al suelo a los 25 seg. de haber sido lanzado.

b-) Para determinar el tiempo en que la altura es de 2.500, en la ecuación de altura, se despeja el tiempo.

$$2.500 = -16t^2 + 400t \Rightarrow\Rightarrow 16t^2 - 400t + 2.500 = 0$$

Aplicamos la cuadrática a la última ecuación:

$$t = \frac{-(-400) \pm \sqrt{160000 - 4(16)(2.500)}}{2(16)} = \frac{400 \pm \sqrt{0}}{32} = \frac{400}{32} = 12,5$$

El tiempo que utiliza para alcanzar los 2.500 metros es de 12,5 segundos.

Ejemplo 5:

En una planta manufacturera el costo mensual por producir x unidades esta dada por la ecuación $C(x) = 10x^2 - 100x - 2000$ ¿Cuántas unidades se pueden producir para un costo de 10.000?

Solución:

Primero se identifica C = costo y x = unidades producidas.
Como se conoce el costo, se debe despejar la incógnita x.

$$C(x) = 10x^2 - 100x - 2000 \Rightarrow\Rightarrow 10.000 = 10x^2 - 100x - 2000 \Rightarrow\Rightarrow 10x^2 - 100x - 12.000 = 0$$

Resolvemos por la cuadrática:

$$x = \frac{-(-100) \pm \sqrt{10000 - 4(10)(-12.000)}}{2(10)} = \frac{100 \pm \sqrt{490.000}}{20} = \frac{100 \pm 700}{20}$$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{100+700}{20} = 40 \qquad x_2 = \frac{100-700}{20} = -30$$

Por obvias razones la solución es 40 unidades.

Ejemplo 6:

La suma de los *n* enteros pares consecutivos esta dada por la ecuación $s = n(n+1)$. ¿Cuántos enteros pares consecutivos y positivos se deben sumar para que dicha suma sea de 342?

Solución:

A partir de la ecuación se reemplaza el valor de *s* y se opera:

$$s = n(n+1) \Rightarrow\Rightarrow n^2 + n = 342 \Rightarrow\Rightarrow n^2 + n - 342 = 0$$

$$n^2 + n - 342 = (n+19)(n-18) = 0$$

Por el producto nulo:
n + 19 = 0, entonces n = -19
n – 18 = 0, entonces n = 18
Se deben sumar los primeros 18 enteros pares consecutivos positivos para que la suma de 342.

Ejemplo 7:

Una tubería puede llenar un tanque en 5 hr. más rápido que otra tubería, las dos tuberías pueden llenar el tanque en 5 hr. ¿Cuánto tiempo tomará llenar el tanque cada una?

Solución:

El llenado de la tubería más lenta es $\frac{1}{x}$ Para x tiempo en segundos.

El llenado de la tubería más rápida es $\frac{1}{x+5}$

El llenado las dos tuberías simultáneamente es $\frac{1}{5}$

La suma de los llenados, permite obtener el tiempo de cada tubería.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{5}\Rightarrow\Rightarrow\frac{x+5+x}{x(x+5)}=\frac{1}{5}\Rightarrow\Rightarrow\frac{2x+5}{x(x+5)}=\frac{1}{5}$$

Por el principio de fracciones equivalentes:

$$\frac{2x+5}{x^2+5x}=\frac{1}{5}\Rightarrow\Rightarrow 10x+25=x^2+5x\Rightarrow\Rightarrow x^2-5x-25=0$$

Por la cuadrática:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4(1)(-25)}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{125}}{2}$$

Las soluciones:

$$x_1=\frac{5+\sqrt{125}}{2}=8{,}09 \qquad x_2=\frac{5-\sqrt{125}}{2}=--3{,}09$$

La solución será 8,09.

La tubería más lenta tarda en llenar el tanque 8,09 seg. y la tubería más rápida tardará en llenar el tanque 8,09 + 5 = 13,09

EJERCICIOS

Lea cuidadosamente cada problema y con los conocimientos adquiridos, resolverlos adecuadamente.

1. Dos números enteros pares consecutivos tienen como producto 168, ¿Cuáles son dichos números? Rta: 12 y 14

2. El largo de un rectángulo es de 4 metros y el ancho de 2 metros, si las dos dimensiones se aumentan en la misma cantidad, el área del nuevo rectángulo será el doble del área original. ¿ Cuales serán las dimensiones del nuevo rectángulo? Rta: Largo 5,12 y ancho 3,12

3. La ecuación $P(t)=1.000\left(30+17t-t^2\right)$ corresponde al crecimiento de una población de peces en t tiempo, medido en años. La primera medida se hizo en el año 1.997.
a-) Cuantos peces había en el año 1.997
b-) A los cuantos años se mueren todos los peces. Rta: a-) 30.00 y b-) 18,61 años

4. Un triángulo rectángulo tiene su hipotenusa 7 metros más larga que un de sus lados, el perímetro del rectángulo es de 392 metros ¿Cual es la longitud de los lados del triángulo? Rta: 168, 175 y 49

5. La cantidad de dinero A que resulta al invertir un capital P a una tasa de interés r compuesta anualmente por dos años, esta dada por la ecuación $A=P1+r)^2$ Si \$10.000 se invierten a una tasa de interés compuesto anualmente, el capital aumenta a \$12.321 en dos años. ¿De cuanto fue la tasa de interés? Rta: 11%

ECUACIONES DE TERCER GRADO

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Las ecuaciones de tercer grado han sido muy estudiadas, pero no se ha encontrado una solución general como la que tiene las de segundo grado. Para resolver este tipo de ecuaciones, se van a analizar dos caminos, diferenciados por la época donde fue propuesto.

METODO ANTIGUO:

La resolución de ecuaciones de tercer grado se remonta a los babilonios, quienes resolvieron problemas que involucraban raíces cúbicas, tenían planteamientos como el siguiente:

$$z = 12x \qquad y = x \qquad v = xyz \qquad v = 12x^3$$

Para lo cual usaron tablas de potencias cúbicas y raíces cúbicas.

Un profesor de Matemáticas de la Universidad de Bolognia, *Scipione del Ferro* (1.465 – 1.526) fue quien por primera vez resolvió algebraicamente una ecuación cúbica. de la forma $x^3 + px = q$. Posteriormente *Nicolo Tartaglia*, en una competencia con *Fior;* alumno de *Scipione del Ferro* revolvió 30 ecuaciones de este tipo.

El matemático *Girolamo Cardano* (1.501 – 1.576) se inquietó por los avances de *Tartaglia* y al reunirse con el en marzo de 1.539, éste último revela sus secretos a Cardano, después de muchos ires y venires, la formula obtenida para ecuaciones de tercer grado se le llamo "Formula de Cardano-Tartaglia". En resumen del proceso que se realizó, se obtuvo una formula de la siguiente manera:

Sea la ecuación: $x^3 + px = q$ La solución es de la forma:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano, no acepto ni coeficientes, ni soluciones complejas para las ecuaciones de este tipo.

Vale la pena comentar que *Vietá*, quien trabajo las ecuaciones cúbicas utilizando transformaciones y sustituciones, obtuvo ecuaciones cuadráticas para resolver ecuaciones cúbicas, la característica era que solo utilizaba raíces cúbicas positivas.

METODO MODERNO:

A partir de los trabajos de Cardano y Tartaglia, se han venido buscando formas más prácticas para resolver ecuaciones de tercer grado. El primer intento llevo a plantear una fórmula parecida a la de Cardano-Tartaglia, pero era muy larga y complicada de manejar. Con el estudio de los polinomios se logró establecer algunos principios que ayudaron a buscar un camino dinámico para resolver ecuaciones cúbicas.

DEFINICIÓN: Sea P(x) un polinomio de grado n, sea r un número real o complejo, tal que P(r) = 0, entonces se dice que r es un cero del polinomio. Por consiguiente r es una solución o raíz de la ecuación Polinómica.

Con la definición anterior, se puede inferir que una ecuación de grado tres, se puede reducir a grado dos, buscando una de sus raíces, ya que:

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Además si P(r) = 0, entonces:

$$P(x) = (x - r)(px^2 + qx + w)$$

Este proceso es una forma de linealizar la ecuación, recordemos que linealizar es expresar un polinomio de grado *n*, en *n* factores de grado uno; o sea, factores lineales.

Los matemáticos se han preocupado por determinar el tipo de soluciones que puede tener una ecuación cúbica. A partir de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, se identifica su discriminate:

$$\Delta = 18abc - 4a^3c + a^2b^2 - 4b^3 - 27c^3$$

Según el signo del discriminante se puede identificar el tipo de solución:

Si $\Delta > 0$: La ecuación tiene tres soluciones reales diferentes.

Si $\Delta = 0$: La ecuación tiene tres soluciones reales y por lo menos dos de ellas iguales.

Si $\Delta < 0$: La ecuación tiene una solución real y dos soluciones imaginarias.

Solución para una ecuación de tercer grado:

El principio consiste en reducir la ecuación a un producto de dos factores, uno lineal y otro cuadrático. De esta manea se puede despajar la incógnita y obtener las soluciones respectivas. La técnica de reducción es por medio la llamada ***División Sintética***, la cual se mostrará simbolizará a continuación.

Sea la ecuación: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

La división: Se organizan los coeficientes como se observa en la gráfica.

a	b	c	d	r
	A	B	D	
a	P	Q	0	

r son los divisores de *a* y *d* positivos y negativos. Es pertinente aclara que ***a*** debe ser diferente de cero

El proceso inicia bajando el valor ***a***, luego este se multiplica por ***r*** para obtener el valor A. En seguida se suma b + A para obtener P. Seguido se multiplica P por **r** para obtener B, se suma c + B y se obtiene Q, Luego se multiplica Q por **r** para obtener D, se suma d + D cuyo resultado debe ser cero (0).

Si la última suma (d + D) no da cero, lo que indica es que el **r** escogido no es raíz del polinomio, entonces se prueba con otro **r** hasta obtener aquel que permita que dicha suma sea cero (d + D = 0).

Es pertinente aclarar que se debe probar con los valores positivos y negativos de los divisores identificados.

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$

Solución:

Es evidente que se deben tener tres soluciones. Para buscar la primera se identifican los **r** que para este caso son: 1, -1, 2, -2. Se inicia con 1. Como el polinomio, no tiene término en x^2 se completa con cero.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\
 & 1 & 1 & -2 & \\
\hline
1 & 1 & -2 & 0 &
\end{array}
$$

Ilustremos el proceso realizado:

1x1 = 1, 0 + 1 = 1
1x1 = 1, -3 + 1 = -2
-2x1 = -2, 2 + (-2) = 0

r = 1 es cero del polinomio.

Ahora la ecuación inicial se expresa como producto de dos factores, el primero será (x – r) y el segundo será un trinomio cuadrado cuyos coeficientes son los valores del residuo de la división sintética.

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

El trinomio cuadrado se puede resolver como ya se ha analizado:

$$(x^2 + x - 2) = (x+2)(x-1)$$

Las soluciones son: -2 y 1, *recordemos por qué*.

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x-1)(x+2)$$

Las soluciones de la ecuación inicial será entonces: x = 1, x = 1, x = -2
Como se observa en la solución hay dos factores lineales iguales, entonces se dice que el polinomio tiene una raíz doble; es decir, raíz con multiplicidad dos.

Ejemplo 2:

Hallar la solución de la siguiente ecuación:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$$

Solución:

Los posibles **r** son: 1, -1

Probamos con r = 1.

1	-3	1	1	1
	1	-2	-1	
1	-2	-1	0	

1 x 1 = 1, luego -3 + 1 = - 2
- 2 x 1 = -2, luego 1 + (-2) = - 1
- 1 x 1 = -1, luego 1 + (-1) = 0

r = 1 es cero del polinomio.

Entonces:

$$x^3-3x^2+x+1=(x-1)(x^2-2x-1)$$

El trinomio cuadrado se resuelve por la cuadrática:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{4-4(1)(-1)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

La solución de la ecuación inicial es: $x=1$, $x=1+\sqrt{2}$, $x=1-\sqrt{2}$. Corresponde a tres soluciones reales diferentes.

Multiplicidad: La multiplicidad de un polinomio es el número de factores lineales que se repiten. El ejemplo 1 tiene multiplicidad dos. El ejemplo 2 tiene multiplicidad uno.

Ejemplo 3:

Resolver $2x^3-3x^2+6x+40=0$

Solución:

Los posibles ceros del polinomio: 1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 8, -8, 10, -10, 20, -20, 40, -40. Como siempre se prueba con uno, pero para este caso la suma d + D es diferente de cero, así para -1, 2, pero para -2 si se obtiene cero, veamos:

2	-3	6	40	-2
	-4	14	-40	
2	-7	20	0	

2 x -2 = - 4, luego - 3 + (- 4) = -7
- 7 x (- 2) = 14, luego 6 + 14 = 20
20 x (-2) = - 40, luego 40 + (-40) = 0

r = -2 es cero ó raíz del polinomio.

Entonces, expresamos la ecuación inicial como producto de dos factores:

$$2x^3-3x^2+6x+40=(x+2)(2x^2-7x+20)$$

El trinomio cuadrado se resuelve pro la cuadrática:

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{49-4(2)(20)}}{2(2)}=\frac{7\pm\sqrt{49-160}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{-111}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{111}i}{4}$$

Las soluciones:

$x_1=\frac{7+\sqrt{111}i}{4}$ y $x_2=\frac{7-\sqrt{111}i}{4}$

La ecuación inicial tiene tres soluciones, una solución real x = - 2 y dos imaginarias. $x=\frac{7+\sqrt{111}i}{4}$ $x=\frac{7-\sqrt{111}i}{4}$

ECUACIONES POLINÓMICAS

$$\boxed{ax^{n}+bx^{n-1}+...+d=0}$$

Las ecuaciones que presenten un grado mayor o igual a tres, se les llama polinómicas, se han estudiado por separado las ecuaciones de primero, segundo y tercer grado, ahora se pretende hacer un análisis general a las ecuaciones polinómicas.

Una ecuación de la forma $ax^{n}+bx^{n-1}+...+k=0$, con $a \neq 0$ y n entero positivo, se le conoce como ecuación Polinómica.

Haciendo algo de historia, en la resolución de ecuaciones, los Babilonios formularon problemas que condujeron a ecuaciones de cuarto grado, donde la incógnita era un cuadrado, por lo que se les llamaron ecuaciones bicuadradas. Ferrari desarrolló el método de solución de ecuaciones de cuarto grado, lo que fue publicado en Ars Magna de Cardano. En trabajos encontrados de Cardano, Tartaglia y Ferrari, se detecto que deseaban establecer un forma general para resolver ecuaciones de cuarto grado.

La metodología actual propone para resolver ecuaciones de cuarto grado, buscar los factores lineales por división sintética, como se hizo para las deterger grado.

Respecto a las ecuaciones de quinto grado, el gran famoso matemático noruego ***Niels Henrik Abel*** demostró que no es posible resolver ecuaciones de quinto grado por medio de un número finito de operaciones algebraicas, allá por los años 1.824 Para fortalecer esta teoría un prestigioso matemático de tan solo 20 años de edad y de nacionalidad francesa ***Evariste Galois***, dedujo bajo que condiciones una ecuación se puede resolver por radicales. Galois desarrollo la teoría de grupos para analizar métodos generales de solución de ecuaciones, basado únicamente en las operaciones fundamentales y extracción de raíces, llegando a la demostración de que NO hay un método general para resolver ecuaciones de quinto grado o mayor.

Los avances en los inicios de la edad moderna dieron buenos resultados y a partir de allí, se establecieron ciertas consideraciones para el desarrollo de ecuaciones polinómicas.

REGLA DE SIGNOS DE DESCARTES:

El Matemático francés René Descartes, padre de la Geometría Analítica, en 1.636 propone una técnica para identificar el número de soluciones reales positiva y negativas para un polinomio de grado *n*, con *n* є Z^+. El teorema cuya prueba esta fuera del alcance de este curso dice:

> *TEOREMA: Sea P(x) un polinomio con coeficientes reales cuyo término independiente es diferente de cero, tendrá un número de soluciones reales positivas de P(x) = 0, igual al número de variaciones de signo en P(x) ó es menor que el número de variaciones en cantidad par. El número de variaciones negativas de la ecuación P(x), es igual al número de variaciones de signo en P(-x) = 0, ó es menor que el número de variaciones en cantidad par.*

En resumen, el teorema permite saber cuantas soluciones reales positivas y negativas tiene el polinomio, basado en la variación de signos. Algunos ejemplos nos ilustran la aplicación del teorema.

Ejemplo 1:

Determinar las posibles soluciones reales del polinomio: $P(x)=2x^5-x^4+3x-6$

Solución:

Por ser un polinomio de grado cinco, entonces debe tener cinco soluciones ó cinco raíces.

Para identificar las soluciones reales positiva:

$$P(x)=2x^5-x^4+3x-6$$

1 2 3

Tomando P(x) e identificando los cambios de signo, los cuales según la grafica son tres, entonces P(x) puede tener una ó tres raíces reales positivas.

Para identificar las soluciones reales negativas, aplicamos P(-x) y observar los cambios de signo.

$$P(-x)=2(-x)^5-(-x)^4+3(-x)-6=-2x^5-x^4-3x-6$$

0 0 0

P(-x) no presenta cambios de signo, luego P(x) no tiene raíces reales negativas.

El polinomio tiene 5 raíces, como puede tener 1 ó 3 reales positivas y NO tiene reales negativas, por consiguiente podrá tener 2 ó 4 raíces imaginarias.

Es pertinente recordar que las raíces imaginarias, SIEMPRE se dan en pares, ya que si hay una solución imaginaria, su conjugada también es solución.

Ejemplo 2:

Dado el polinomio $Q(x)=5x^4-6x^3+x-9$ identificar las posibles soluciones.

Solución:

El polinomio debe tener 4 raíces. *Ya sabemos porque.*

Raíces reales positivas.

$$Q(x) = 5x^4 - 6x^3 + x - 9$$

1 2 3

Se observa que Q(x) presenta tres variaciones de signo, luego puede tener 1 ó 3 soluciones reales positivas.

Raíces reales negativas.

$$Q(-x) = 5(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x) - 9 = 5x^4 + 6x^3 - x - 9$$

$$Q(-x) = 5x^4 + 6x^3 - x - 9$$

0 1 0

Para Q(-x) se observa que hay un cambio de signo, lo que nos indica que el polinomio tiene una raíz real negativa.

Según los resultados, el polinomio Q(x) puede tener:

-) Una solución real positiva, una solución real negativa y dos soluciones imaginarias.
-) Tres soluciones reales positivas y una solución real negativa.

Ejemplo 3:

Identificar los ceros del polinomio: $N(x) = 7x^5 - 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$

Solución:

N(x) debe tener 5 ceros, veamos cuales podrían ser:

Ceros reales positivos:

$$N(x) = 7x^5 - 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$$

1 0 2 3

Para N(x) se observan tres cambios de signo, Luego dicho polinomio tendrá 1 ó 3 raíces reales positivas.

Ceros reales negativos:

$$N(-x) = 7(-x)^5 - 2(-x)^3 - 5(-x)^2 + 2(-x) - 1$$

$$N(-x) = -7x^5 + 2x^3 - 5x^2 - 2x - 1$$

1 2 0 0

Para N(-x) se observa que presenta dos cambios de signo, luego el polinomio puede tener, cero ó dos soluciones reales negativas.

Así el polinomio N(x) puede presentar las siguientes soluciones:
-) Una solución real positiva, dos soluciones reales negativas y dos soluciones imaginarias
-) Tres soluciones reales positivas y dos soluciones reales negativas.
-) Una solución real positiva y cuatro soluciones imaginarias.

Acotación de las Soluciones:

El siguiente teorema permite identificar el intervalo en el que se encuentran las soluciones reales, si éstas existen.

> **TEOREMA:** Sea P(x) un polinomio, tal que si P(x) = 0, no tiene raíz real alguna mayor al numero real K, entonces K se le llama cota superior de las raíces reales. Análogamente, si P(x) = 0, no tiene raíz real menor que el numero real k, luego k se le llama cota inferior de las raíces reales.

$$k \leq \text{Raíces Reales} \leq K$$

Ejemplo:

Dado el polinomio: $P(x) = (x-1)(2x-1)(2x+1) = 0$ Determinar la acotación del mismo.

Solución:

Por la regla del producto nulo.
(x – 1) = 0, luego x = 1
(2x – 1) = 0, luego x = 1/2
(2x + 1) = 0, luego x = -1/2
Así k = -1/2. Cualquier número menor que -1/2 será cota inferior de P(x).
K = 1. Cualquier número superior a 1 será cota superior de P(x).

TEOREMA DE RAICES RACIONALES:

Para determinar las soluciones de una ecuación Polinómica con coeficientes enteros, hay un teorema que simplifica la identificación de las raíces del polinomio.

> **TEOREMA:** *Sea* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + ax + a_o = 0$ *Un polinomio con coeficientes enteros, Si p/q es un real irreducible tal que p/q es una raíz de P(x); es decir, P(p/q) = 0, entonces p es factor de* a_o *y q es factor de* a_n*.*

El teorema permite obtener los ceros del polinomio en forma directa, dando una lista limitada de soluciones racionales posibles.
Veamos: Si se tiene un polinomio P(x) y suponemos que p/q es una raíz del mismo, entonces

(x – p/q) es un factor de P(x); además, P(x) = (x – p/q) Q(x). Donde Q(x) es un polinomio de un grado menor que P(x). Las soluciones adicionales para P(x), se obtiene resolviendo Q(x).

Ejemplo:

Determinar los ceros del polinomio: $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$

Solución:

Inicialmente se identifica p y q. Siendo p los divisores del término independiente y q del coeficiente de x^4.
p = 1, -1, 2, -2, 4, -4.
q = 1, -1, 2, -2.
Posibles soluciones racionales: 1, -1, 2, -2, 4, -4, 1/2, -1/2.

A cada uno de estas posibilidades se le aplica la división sintética para identificar las soluciones. Por la Regla de Descartes se puede inferir las posibles soluciones:
-) Tres soluciones reales positivas y una negativa.
-) Una solución real positiva, una negativa y dos imaginarias

Probando las posibles soluciones, se detecta que x = 2 es solución, veamos:

2	−3	2	−6	−4	2
	4	2	8	4	
2	1	4	2	0	

El polinomio inicial quedaría así:

$$P(x) = (x-2)(2x^3 + x^2 + 4x + 2)$$

Donde $Q(x) = (2x^3 + x^2 + 4x + 2)$

Ahora tomamos el polinomio Q(x) e identificamos los divisores de p y q:
p = 1, -1, 2, -2.
q = 1, -1, 2, -2.
Las posibles soluciones (p/q): 1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2.

Al probar las diferentes posibilidades, se identifico que -1/2 es cero del polinomio, veamos:

2	1	4	2	$-\frac{1}{2}$
	−1	0	−2	
2	0	4	0	

Se observa que -1/2 es cero, luego el polinomio se puede escribir como:

$$Q(x) = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)(2x^2 + 4)$$

El último polinomio se resuelve por factorización o cuadrática. Si se revisa se puede determinar que los ceros son: $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$

Volviendo al polinomio inicial $P(x)=2x^4-3x^3+2x^2-6x-4$, se puede concluir que los ceros de dicho polinomio son: 2, -1/2, $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$ Una solución real positiva, una solución real negativa y dos soluciones imaginarias.

MULTIPLICIDAD DE LAS SOLUCIONES:

En un aparte anterior se hizo referencia a la multiplicidad, pero es pertinente darle un soporte formal, a través de la siguiente definición.

DEFINICIÓN:

Sea P(x) un polinomio de grado *n*; además, $(x-r)^m$ un factor de P(x), entonces *r* es llamado cero de P(x), con multiplicidad *m*.

Ejemplo:

Sea el polinomio: $P(x)=4(x-2)(x+3)^2(x-1)^3$ Identificar los ceros y su multiplicidad.

Solución:

Los ceros son: 2, -3, 1.
La multiplicidad:
Para 2: La multiplicidad es 1
Para -3: la multiplicidad es 2
Para -1: La multiplicidad es 3

EJERCICIOS

Para las ecuaciones dadas, identificar la cantidad y tipo de raíces más posible que se tiene en cada polinomio.

1. $2x^6 - 4x^4 + x^2 - 3 = 0$ Rta: 3 reales positivas y 3 reales negativas

2. $x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ Rta: 2 reales positivas, 1 real negativa

3. $x^3 + 3x^2 - x - 9 = 0$ Rta: 1 real positiva, 2 reales negativas

4. $8x^8 + 3x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 10 = 0$ Rta: 8 raíces imaginarias

5. $x^6 - 1 = 0$ Rta: 1 real positiva, 1 real negativa y 4 imag.

En los siguientes ejercicios hallar las soluciones de los polinomios propuestos.

6. $3x^3 + x^2 + 12x + 4 = 0$ Rta: -1/3, 2i, -2i

7. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ Rta: 1, -1, -2

8. $x^4 + x^2 - 2 = 0$ Rta: 1, -1, $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$

9. $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$ Rta: 1, 1, -1, -2

10. La ecuación $x^3 - 8x^2 + 16x - 3 = 0$ tiene entre sus raíces a x = 3. Hallar la suma de las otras dos raíces.

Rta: $x_2 + x_3 = 5$

ECUACIONES RACIONALES

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

Las ecuaciones racionales son de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

Donde P(x) y Q(x) son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

En los casos de ecuaciones racionales, se pueden presentar dos caso:
-) El grado de P(x) ≤ Que el grado de Q(x)
-) El grado de P(X) > Que el grado de Q(x)

Resolver ecuaciones de este tipo, sigue los principios matemáticos aplicados a los aplicados para fracciones, principalmente fracciones equivalentes.

Ejemplo 1:

Hallar la solución de la siguiente ecuación.

$$\frac{2x-4}{x+2} = \frac{1}{2}$$

Solución:

Por el principio de ecuaciones equivalentes.

$$\frac{2x-4}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow\Rightarrow 2(2x-4) = 1(x+2) \Rightarrow\Rightarrow 4x-8 = x+2$$

Se debe despajar la incógnita, agrupando las x a un lado y los términos independientes al otro lado.

$$4x-8 = x+2 \Rightarrow\Rightarrow 4x-x = 2+8 \Rightarrow\Rightarrow 3x = 10$$

Así la solución será: x = 10/3

Ejemplo 2:

Resolver: $\frac{6x+8}{5} - \frac{3x-4}{2} = 0$

Solución:

Con lo aprendido ya podemos trabajar consecutivamente, por favor analizar cada paso.

$$\frac{6x+8}{5} = \frac{3x-4}{2} \Rightarrow\Rightarrow 12x+16 = 15x-20 \Rightarrow\Rightarrow 12x-15x = -20-16$$

Despejando:

$$12x-15x = -20-16 \Rightarrow\Rightarrow -3x = -36 \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{36}{3} = 12$$

Ejemplo 3:

Resolver: $\frac{x}{x+2}-\frac{2}{x-1}=0$

Solución:

Aplicando los principios sobre fracciones se tiene:

$$\frac{x}{x+2}-\frac{2}{x-1}=0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x(x-1)-2(x+2)}{(x+2)(x-1)}=0 \Rightarrow\Rightarrow x(x-1)-2(x+2)=0$$

$$x(x-1)-2(x+2)=0 \Rightarrow\Rightarrow x^2-x-2x-4=0 \Rightarrow\Rightarrow x^2-3x-4=0$$

La última ecuación se resuelve por factorización:

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow\Rightarrow (x-4)(x+1)=0$$

Por el producto nulo:
x – 4 = 0, entonces x = 4
x + 1 = 0, entonces x = -1
Así la solución será x = -1 y x = 4.

Ejemplo 4:

Hallar los valores de la incógnita que hacen verdadero la expresión dada.

$$1-\frac{2}{y}=\frac{3}{y^2}$$

Solución:

Veamos el procedimiento.

$$1-\frac{2}{y}=\frac{3}{y^2} \Rightarrow\Rightarrow 1-\frac{2}{y}-\frac{3}{y^2}=0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{y^2-2y-3}{y^2}=0$$

$$\frac{y^2-2y-3}{y^2}=0 \Rightarrow\Rightarrow y^2-2y-3=0 \Rightarrow\Rightarrow (y-3)(y+1)=0$$

Por la regla del producto nulo:
y – 3 = 0, entonces y = 3
y + 1 = 0, entonces y = -1
Solución: y = -1 ó y = 3

ECUACIONES CON FRACCIONES

$$\boxed{\frac{ax+b}{x-c}=0}$$

En el mundo de las ecuaciones racionales, no se puede dejar pasar por alto unas ecuaciones muy particulares, son aquellas que están expresadas como fracciones. Este tipo de ecuaciones se pueden llevar a ecuaciones lineales o cuadráticas, según el tipo de expresión dada. Dentro de los conocimientos previos requeridos se tiene la suma de fracciones.

Ejemplo 5:

Resolver la ecuación $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=10$

Solución:

Como indica la expresión, se debe sumar las fracciones.

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=10 \Rightarrow\Rightarrow \frac{2x+3x}{6}=10 \Rightarrow\Rightarrow \frac{5x}{6}=10 \Rightarrow\Rightarrow 5x=60$$

Así se puede despajar la incógnita:
x = 60 / 5 = 12.
Solución: x = 12.

Ejemplo 6:

Resolver $\frac{y}{y+2}=\frac{2}{y-1}$

Solución:

Primero se iguala la expresión acero.

$$\frac{y}{y+2}=\frac{2}{y-1} \Rightarrow\Rightarrow \frac{y}{y+2}-\frac{2}{y-1}=0$$

Ahora se sumar las fracciones, donde se busca el común denominador para hacer dicha suma

$$.\ \frac{y}{y+2}-\frac{2}{y-1}=0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{y(y-1)-2(y+2)}{(y+2)(y-1)}=0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{y^2-3y-4}{(y+2)(y-1)}=0$$

Operando la fracción:

$$\frac{y^2-3y-4}{(y+2)(y-1)}=0 \Rightarrow\Rightarrow y^2-3y-4=0 \Rightarrow\Rightarrow (y-4)(y+1)=0$$

Por el producto nulo:
y – 4 = 0, luego y = 4
y + 1 = 0, luego y = -1

En los ejemplos estudiados, el primero nos llevó a una ecuación de primer grado con una incógnita y el segundo a una ecuación cuadrática con una incógnita.

EJERCICIOS

Desarrollar los siguientes ejercicios, verificar la respuesta.

1. $\frac{13+2x}{4x+1}=\frac{3}{4}$ — Rta: x = 49 / 4

2. $\frac{1}{x+4}+\frac{3}{x-4}=\frac{3x+8}{x^2-16}$ — Rta: x = 0

3. $\frac{x+1}{3x+2}-\frac{x-2}{2x-3}=0$ — Rta: $x=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$

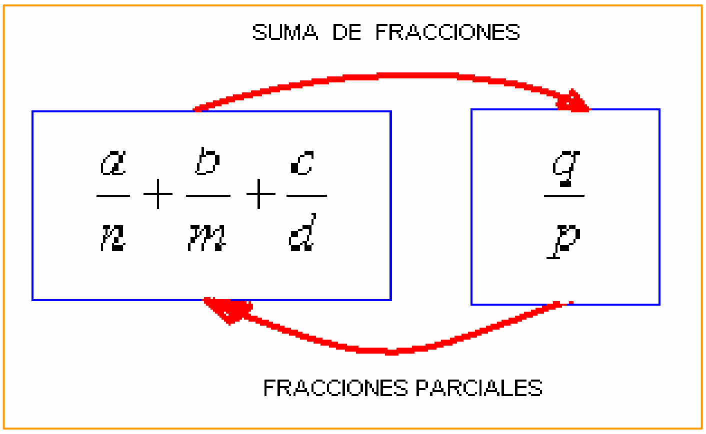
4. $\frac{5y}{y^2+9}=-1$ — Rta: $y=\frac{-5\pm\sqrt{11}i}{2}$

FRACCIONES PARCIALES

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Toda fracción racional de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ con *p*(x) y *q*(x), polinomios y *q*(x) ≠ 0, se pueden expresar como suma o resta de fracciones racionales más simples. Para que se pueda hacer este procedimiento, el grado de *p*(x) debe ser menor que el grado de *q*(x); además, *q*(x) se puede descomponer en factores primos. Por teoría algebraica, cualquier polinomio de coeficientes reales, se puede escribir como producto de factores lineales o cuadráticos.

En los principios de álgebra, aprendimos que a partir de dos o más fracciones, se obtenía una como resultado de la suma, en este aparte lo que se va a analizar es el caso contrario, a partir de una fracción, buscar las fracciones que fueron sumadas para llegar a esta.



De acuerdo al denominador, se pueden encontrar varios casos.

1. **q(x) es producto de factores lineales diferentes:**

Se puede generalizar este caso de la siguiente manera, se tiene la fracción $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, esta se puede descomponer en la suma de fracciones tales como:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A}{ax+\lambda_1}+\frac{B}{bx+\lambda_2}+\dots+\frac{N}{nx+\lambda_n}$$

Siendo A, B, … , N constantes.

Ejemplo 1:

Dada la fracción siguiente, expresarla como fracciones parciales.

$$\frac{4x-5}{x^2-5x+6}$$

Solución:

La idea es linealizar el denominador. Primero factorizamos el trinomio cuadrado.

$$\frac{4x-5}{x^2-5x+6}=\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)}$$

Según la teoría, la fracción obtenida se puede escribir como suma de fracciones simples, para este caso dos fracciones ya que hay dos factores lineales simples.

$$\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

El trabajo consiste en encontrar el valor de A y B. Para esto se operan las dos fracciones así:

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}=\frac{Ax-2A+Bx-3B}{(x-3)(x-2)}=\frac{x(A+B)-2A-3B}{(x-3)(x-2)}$$

La última fracción es equivalente a la primera, luego se igualan:

$$\boxed{\frac{4x-5}{x^2-5x+6}=\frac{x(A+B)-2A-3B}{(x-3)(x-2)}}$$

Esta es la parte principal del proceso, ya que se observa que los denominadores son iguales, por ende los numeradores también deben serlo. Así se comparan numeradores.

- 4x – 5 = x(A + B) – 2A – 3B

Los coeficientes de *x* deben ser iguales: 4 = A + B
Los términos independientes también son iguales: - 5 = -2A – 3B

Se tiene dos ecuaciones con dos incógnitas, *que ya sabemos resolver*. Aplicando eliminación se obtiene:
A = 7
B = -3

Se reemplaza los valores de A y B en al ecuación propuesta:

$$\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{7}{x-3}-\frac{3}{x-2}$$

Por consiguiente:

$$\frac{4x-5}{x^2-5x+6}=\frac{7}{x-3}-\frac{3}{x-2}$$

Ejemplo 2:

Escribir como fracciones parciales la siguiente fracción:

$$\frac{5}{2x^2-9x+4}$$

Solución:

Se linealiza el denominador.

$$\frac{5}{2x^2-9x+4}=\frac{5}{(2x-1)(x-4)}$$

Por favor confirmar la factorización que se hizo en el denominador.

Es seguida se propone descomponer la fracción como suma de fracciones parciales.

$$\frac{5}{(2x-1)(x-4)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x-4}$$

Se operan las dos fracciones que se propusieron:

$$\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(2x-1)}{(2x-1)(x-4)}=\frac{Ax-4A+2Bx-B}{(2x-1)(x-4)}=\frac{x(A+2B)-4A-B}{(2x-1)(x-4)}$$

Como la última fracción es equivalente a la primera, se hace la igualación:

$$\boxed{\frac{5}{2x^2-9x+4}=\frac{x(A+2B)-4A-B}{(2x-1)(x-4)}}$$

Ahora, como el denominador es igual, los numeradores también lo son. Entonces:
5 = x(A + 2B) – 4A – B

Comparando los coeficientes en *x*, se observa que en el primer término de la igualdad el coeficiente de *x* es cero, ya que no hay término en dicha incógnita, luego:
0 = A + 2B
Para el término independiente:
5 = - 4A – B

Se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas.
A + 2B = 0
-4A – B = 5

Utilizando cualquiera de los métodos de resolución, se obtiene:
A = -10/7
B = 5/7

Finalmente se reemplaza en la suma de fracciones propuesta:

$$\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x-4}=\frac{5}{7(x-4)}-\frac{10}{7(2x-1)}$$

Solución:

$$\frac{5}{2x^2-9x+4}=\frac{5}{7(x-4)}-\frac{10}{7(2x-1)}$$

2. **q(x) es producto de factores lineales, algunos repetidos:**

Hay casos donde el polinomio del denominador presenta factores lineales simples que se repiten *k* veces, cuando esto se presenta la descomposición es de la siguiente manera:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{(x-\lambda)(x-\beta)^k}=\frac{A}{(x-\lambda)}+\frac{B}{(x-\beta)}+\frac{C}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{N}{(x-\beta)^k}$$

Ejemplo 1:

Descomponer en fracciones parciales.

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}$$

Solución:

El procedimiento es similar al caso anterior, solo que aquí se debe proponer tantas fracciones simples como indique el exponente del factor que se repite.

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

Se operan las fracciones y se organizan los términos.

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}\frac{A(x+1)^2+B(x)(x+1)+C(x)}{x(x+1)^2}=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}$$

Se organizan los términos según la incógnita:

$$\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}$$

Se iguala la última fracción con la inicial:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}$$

Se igualan los numeradores, *ya sabemos por que.*

$$2x-1=x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A$$

Para el caso de la incógnita al cuadrado (x^2):
0 = A + B
Para el caso de la incógnita (x):
2 = 2A + B + C
Para el caso del término independiente:
-1 = A

Así ya se tiene una solución:
A = -1
De la ecuación 0 = A + B, se puede obtener el valor de B, es decir: B = 1
Para el caso de C, en la ecuación: 2 = 2A + B + C; se reemplaza A y B: 2 = 2(-1) + (1) + C, despejando C = 3

Volviendo a la expresión propuesta:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$$

Finalmente la fracción original queda expresada como suma de fracciones parciales así:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{1}{x}$$

3. q(x) Tiene factores Cuadráticos irreducibles:

Cuando el polinomio del denominador tiene términos cuadráticos irreducibles, la forma de descomponer en fracciones parciales es como se muestra a continuación.

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{(x+n)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x+n}+\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$$

Donde $q(x)=(x+n)(ax^2+bx+c)$

Como siempre los ejemplos son la mejor forma de mostrar el método.

Ejemplo 1:

Expresar como suma de fracciones parciales:

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)}$$

Solución:

Se escribe la fracción como se presenta a continuación:

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Operando y organizando:

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}=\frac{A(x^2+2)+x(Bx+C)}{x(x^2+2)}=\frac{Ax^2+2A+Bx^2+Cx}{x(x^2+2)}$$

Agrupando términos semejantes:

$$\frac{Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+2)} = \frac{x^2(A+B) + x(C) + 2A}{x(x^2+2)}$$

Igualando las fracciones original y la última:

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{x^2(A+B) + x(C) + 2A}{x(x^2+2)}$$

Comparando términos:
Para la incógnita al cuadrado: (x^2): 0 = A + B
Para la incógnita (x): 1 = C
Para los términos independientes: - 5 = 2A

Así: A = - 5/2
B = 5/2
C = 1

Reemplazando estos valores en las fracciones propuestas:

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = -\frac{5}{2x} + \frac{\frac{5}{2}x+1}{x^2+2}$$

Por consiguiente la fracción inicial queda expresada como suma de fracciones parciales así:

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{5x+2}{2x^2+4} - \frac{5}{2x}$$

EJERCICIOS

Dadas las siguientes expresiones, escribirlas como suma de fracciones parciales.

1. $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$ Rta: $\dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{1}{3(x+2)}$

2. $\dfrac{5}{(x-1)(x+4)}$ Rta: $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+4}$

3. $\dfrac{x+14}{x^2-2x-8}$ Rta: $\dfrac{3}{x-4} - \dfrac{2}{x+2}$

4. $\dfrac{x^2+1}{x^3+x^2}$ Rta: $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

5. $\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3+x}$ Rta: $\dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{x^2+1}$

6. $\dfrac{3x^3+1}{x^3-x^2+x-1}$ Rta: $\dfrac{x-2}{x^2+1} + \dfrac{2}{x-1} + 3$

ECUACIONES CON RADICALES

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx}+c=0}$$

Cuando se tiene ecuaciones con radicales, el primer paso es buscar la forma de reducir el radical por medio de operaciones opuestas y obtener una ecuación cuadrática, siempre y cuando el índice de la raíz sea par. Aquí se va a analizar fundamentalmente las raíces cuadradas, pero se puede hacer extensivo a otros índices.

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación $x+\sqrt{x-4}=4$

Solución:

A partir de la expresión, se busca que la parte radical quede a un lado de la igualdad.

$$x+\sqrt{x-4}=4 \Rightarrow\Rightarrow \sqrt{x-4}=4-x$$

Ahora se elimina la raíz utilizando operación opuesta.

$$\sqrt{x-4}=4-x \Rightarrow\Rightarrow \left(\sqrt{x-4}\right)^2=(4-x)^2 \Rightarrow\Rightarrow x-4=16-8x+x^2$$

Organizando la expresión:

$$x-4=16-8x+x^2 \Rightarrow\Rightarrow x^2-9x+20=0$$

La última ecuación se puede resolver por factorización o por la fórmula cuadrática.

$$x^2-9x+20=(x-4)(x-5)=0$$

Por la regla del producto nulo:

x – 4 = 0, entonces x = 4

x – 5 = 0, entonces x = 5

Ejemplo 2:

Hallar los valores de y que hagan verdadera la igualdad. Dada.

$$\sqrt{2y+3}-\sqrt{y-2}=2$$

Solución:

Lo primero es pasar uno de los radicales al otro lado de la ecuación, ya se sabe que principios se tiene en cuenta para hacerlo, recordemos las ecuaciones lineales con una incógnita.

$$\sqrt{2y+3}-\sqrt{y-2}=2 \Rightarrow\Rightarrow \sqrt{2y+3}=2+\sqrt{y-2} \Rightarrow\Rightarrow \left(\sqrt{2y+3}\right)^2=\left(2+\sqrt{y-2}\right)^2$$

Desarrollando los cuadrados.

$$\left(\sqrt{2y+3}\right)^2=\left(2+\sqrt{y-2}\right)^2 \Rightarrow\Rightarrow 2y+3=4+4\sqrt{y-2}+(y-2)$$

Reorganizando términos.

$$2y+3=4+4\sqrt{y-2}+(y-2) \Rightarrow\Rightarrow 2y+3-4-y+2=4\sqrt{y-2} \Rightarrow\Rightarrow y+1=4\sqrt{y-2}$$

Para eliminar el nuevo radical, se vuelve a aplicar operación opuesta.

$$y+1=4\sqrt{y-2} \Rightarrow\Rightarrow (y+1)^2=\left(4\sqrt{y-2}\right)^2 \Rightarrow\Rightarrow y^2+2y+1=16(y-2)$$

Reorganizando de nuevo los términos.

$$y^2+2y+1=16(y-2) \Rightarrow\Rightarrow y^2-14y+33=0$$

La última expresión se puede resolver por factorización o por la formula cuadrática. Apliquemos factorización.

$$y^2-14y+33=(y-11)(y-3)=0$$

Por la regla del producto nulo.
y – 11 = 0, luego y = 11
y – 3 = 0, luego y = 3

EJERCICIOS

Desarrollar el procedimiento apropiado para resolver los ejercicios propuestos.

1. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+9}=-2$ Rta: x = 0 y x = 16

2. $\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}-6=0$ Rta: x = 64

3. $y^{3/1}-64=0$ Rta: y = 4

4. $y^{3/2}-81=0$ Rta: $y=9\sqrt[3]{9}$

CAPÍTULO DOS: LAS INECUACIONES

INTRODUCCIÓN

Las inecuaciones son expresiones donde dos términos son comparados utilizando principios matemáticos bien definidos. Por esto a las inecuaciones también son conocidas como Desigualdades.

Para desarrollar el tema, inicialmente se analizarán los intervalos, ya que la solución de una desigualdad esta dada por uno ó varios intervalos. También se analizarán las propiedades que gobiernan las desigualdades, demostrando algunas de ellas. Al igual que se hizo en las ecuaciones, se estudiarán las clases de inecuaciones, siendo las más importantes las inecuaciones lineales con una incógnita, las inecuaciones lineales con dos incógnitas, las cuadráticas con una incógnita y las mixtas.

Las desigualdades son muy importantes como herramientas para el análisis de temáticas como la Investigación de Operaciones, un área de las Matemáticas muy utilizadas en Ingeniería, Administración, economía y otros campos del saber.

Para abordar con éxito esta temática es pertinente recordar los símbolos de comparación entre dos expresiones algebraicas tales como: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$. Que en su orden indican mayor, menor, mayor o igual y menor o igual, su significado se ira comprendiendo a medida que se vayan estudiando las inecuaciones.

Un trabajo juicioso y sistemático para el desarrollo de las temáticas, permitirá adquirir conocimientos sólidos que conlleven a resolver problemas del mundo real en donde se necesiten las desigualdades.

Objetivo General

Que los estudiantes identifiquen claramente las inecuaciones, sus propiedades, principios, clasificación y las formas de resolverlas; además, plantear situaciones descriptivas con desigualdades.

Objetivos Específicos

1. Conocer los principios sobre intervalos y desigualdades.

2. Reconocer las inecuaciones lineales, sus propiedades y resolver inecuaciones de este tipo.

3. Identificar inecuaciones cuadráticas, sus propiedades y resolver inecuaciones de este tipo.

4. Plantear y resolver problemas que involucran inecuaciones.

DESIGUALDADES

$\boxed{ax - b < c}$

Las desigualdades son expresiones matemáticas donde dos términos p(x) y q(x) se comparan, siendo éstos polinomios ó uno de ellos término independiente. Las formas de comparación se pueden observar a continuación:

$\boxed{p(x) < q(x)}$ $\boxed{p(x) > q(x)}$ $\boxed{p(x) \leq q(x)}$ $\boxed{p(x) \geq q(x)}$

En el primer caso p(x) es menor que q(x), para el segundo p(x) es mayor que q(x), en el tercero p(x) es menor o igual a q(x) y en el cuarto p(x) es mayor o igual a q(x). Las dos primeras se les llama *desigualdades estrictas*.

Por ejemplo si se dice que $x > 2$, esta indicando que cualquier valor mayor que dos, satisface la desigualdad propuesta. Si de dice que $x \leq 5$, se esta indicando que cualquier valor menor que cinco es solución; pero inclusive cinco es también solución.

Propiedades de las Desigualdades:

Sean a, b, c números reales:

1. **Si a < b, entonces a + c < b + c**

Demostración:

Como a < b, por definición b – a es positivo; además, (b + c) – (a + c) = b – a, entonces (b + c) – (a + c) es positivo, así a + c < b + c.

2. **Si a < b, entonces a - c < b – c**

Demostración:

Con el mismo argumento del caso anterior, tenemos que a + (-c) < b + (-c), así a – c < b – c.

3. **Si a < b y c > 0, entonces a x c < b x c**

Demostración:

Como (a < b), luego (b – a) es positivo; además, c es positivo, entonces el producto (b – a) x c es positivo, así (b x c – a x c) es positivo, por lo tanto (a x c < b x c).

4. **Si a < b y c < 0, entonces a x c > b x c**

Demostración:

Como ejercicio para hacer en el grupo colaborativo, para cualquier duda consultar con el tutor.

5. **Tricotomía:**

Si *a* y *b* son números reales, una de las siguientes expresiones se cumple.

$\boxed{a < b}$ $\boxed{a > b}$ $\boxed{a = b}$

Reflexión: ¿Qué pasa si b = 0?

6. **La NO Negatividad:**

Para cualquier número real a: $a^2 \geq 0$

7. **La Reciprocidad:**

Para cualquier número real a ≠ 0:

Si a > 0, entonces $\frac{1}{a} > 0$

Si a < 0, entonces $\frac{1}{a} < 0$

Es pertinente que usted estimado estudiante, plantee al menos dos ejemplo donde se aplique cada propiedad, esto le permitirá comprender la esencia de as mismas.

Las desigualdades pueden ser simples o compuestas.

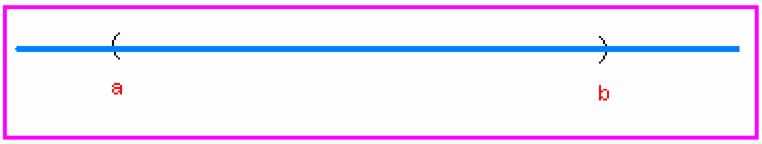
Simples: $ax < b$ $px \geq q$

Compuestas: $a < x < b$ $a \leq px < b$

INTERVALOS:

Cuando se tienen expresiones como x > 3, x > 2, x > - 5, otros, se podría preguntar cómo se grafican, la respuesta esta en los intervalos.

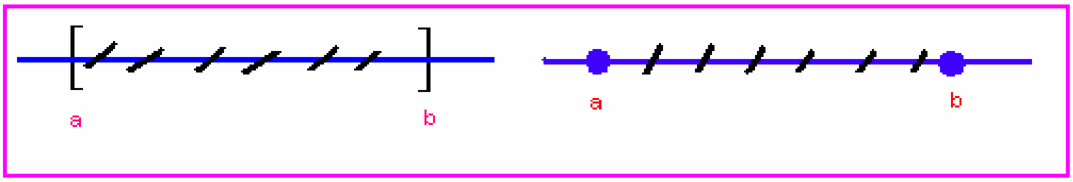
Un intervalo es un segmento de recta con extremos inferior (a) y superior (b), el cual contiene todos los valores que satisfacen la desigualdad.



Existen varias clases de intervalos.

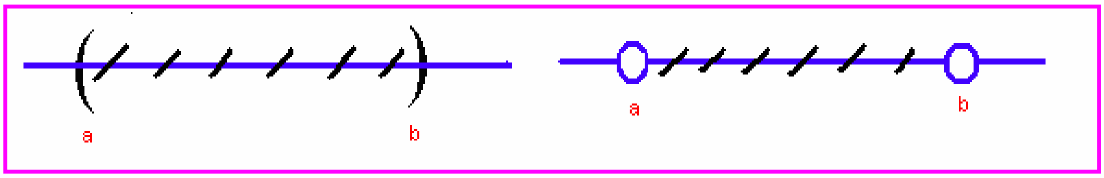
Intervalo Cerrado: Son todos aquellos donde los extremos del mismo, hacen parte del intervalo. La notación es la siguiente:

- Parejas ordenadas: $[a,b]$
- Desigualdades: $a \leq x \leq b$
- Gráficamente:



Intervalo Abierto: Son todos aquellos donde los extremos del mismo, NO hacen parte del intervalo. La notación es la siguiente:

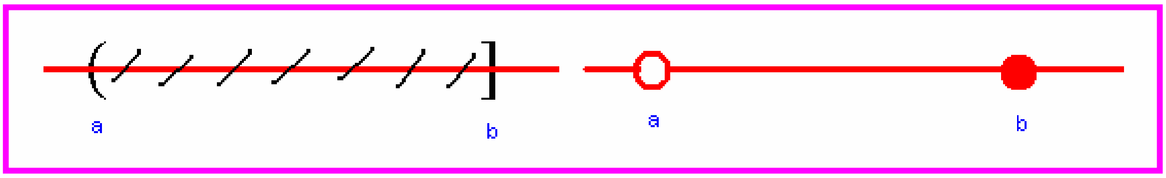
- Parejas ordenadas: (a,b)
- Desigualdades: $a < x < b$
- Gráficamente:



Intervalo Semiabierto: Son todos aquellos intervalos donde uno de los extremos NO hace parte del mismo, pueden ser abiertos a izquierda ó abiertos a derecha.

Intervalo Abierto a Derecha: Corresponde a los intervalos donde el extremo derecho es abierto. La notación es:

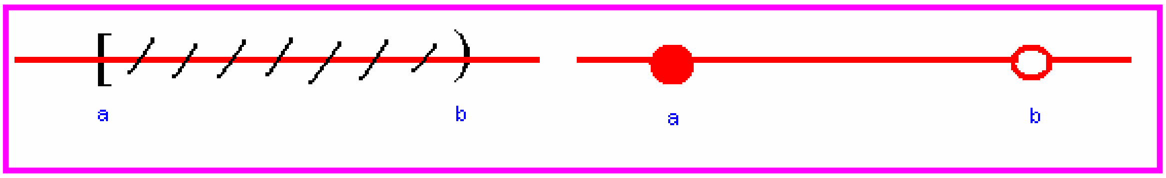
- parejas ordenadas: $(a,b]$
- Desigualdades: $a < x \leq b$
- Gráficamente:



Intervalo Abierto a izquierda: Corresponde a los intervalos donde el extremo izquierdo es abierto. La notación es:

- parejas ordenadas: $[a,b)$
- Desigualdades: $a \leq x < b$

- Gráficamente:

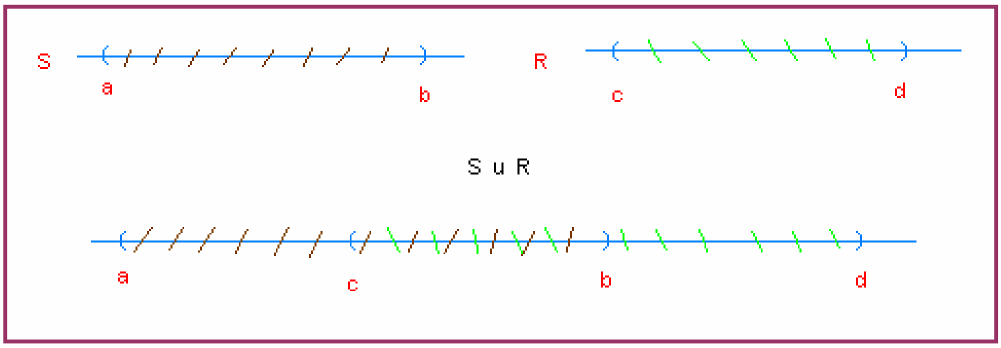


Los intervalos semiabiertos a la izquierda, serán semicerrados a la derecha y viceversa.

OPERACIONES CON INTERVALOS:

Las operaciones estudiadas en los conjuntos, como unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento, son aplicables también en intervalos.

UNION: Se sabe que la unión es la agrupación bajo un mismo conjunto de todos los elementos que hacen parte de la operación.
Sea S = (a, b) y R = (c, d), entonces S u R = (a, b) u (c, d)
Gráficamente:



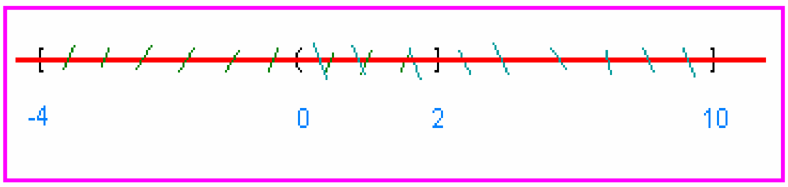
Ejemplo 1:

Sea S = [- 4, 2] y R = (0, 10]
Hallar S u R.

Solución:

S u R = [- 4, 2] u (0, 10] = [- 4, 10]

Gráficamente S u R será:

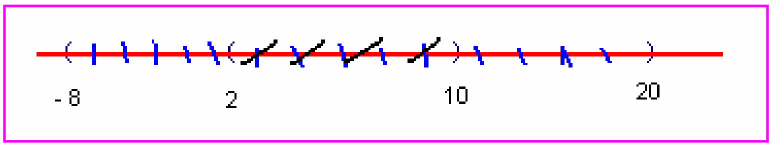


Ejemplo 2:

Dados P = (- 8, 20) y Q = (2, 10) Hallar P u Q.

Solución:

La operación es: P u Q = (- 8, 20) u (2, 10) = (- 8, 20)
Gráficamente:



La solución nos hace ver que $Q \subseteq P$; es decir, Q esta contenido en P.

INTERSECCIÓN: Se trata de identificar los *elementos comunes* de los conjuntos que participan en la operación.

Ejemplo 1:

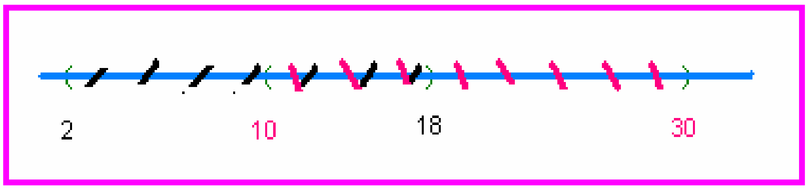
Dados los intervalos A = (2, 18) y B = (10, 30). Hallar la intersección de A y B.

Solución:

La intersección se expresa así: $A \cap B$

$$A \cap B = (2,18) \cap (10,30) = [10,18]$$

Gráficamente:



La intersección involucra los elementos que están en los dos intervalos.

Las demás operaciones son similares a como se hace en las operaciones con conjuntos, para el fin de las desigualdades, las operaciones más importantes son al unión e intersección.

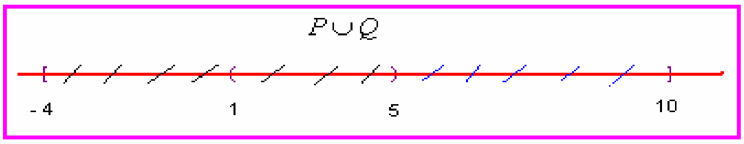
A manera de ilustración veamos el siguiente ejercicio, por favor discutir los resultados con sus compañeros de grupo colaborativo y aclararlo con el Tutor.

Ejemplo 2.

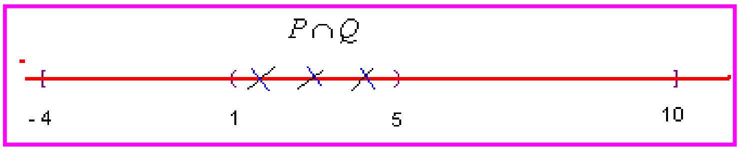
Sean los intervalos P = [- 4, 5) y Q = (1, 10]. Hallar las siguientes operaciones.
$P \cup Q$, $P \cap Q$, $P - Q$, $P \Delta Q$

Solución:

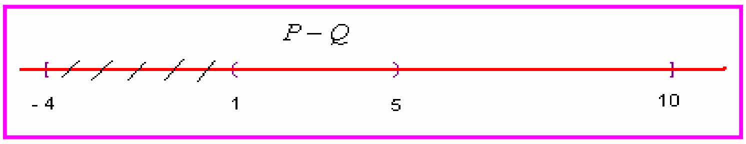
-) $P \cup Q$:   [-4, 10]



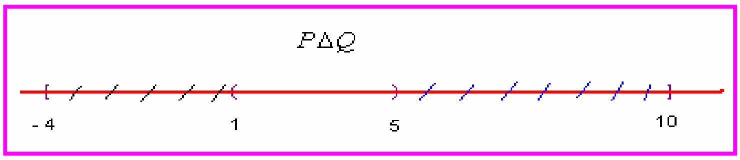
-) $P \cap Q$:   [1, 5]



-) $P - Q$: [- 4, 1]



-) $P \Delta Q$: [- 4, 1] u [5, 10]



INECUACIONES LINEALES

$$\boxed{ax+b<0}$$

Las inecuaciones lineales son aquellas donde la incógnita es un polinomio de grado uno, para este caso se van a analizar dos tipos. Una inecuación lineal con una incógnita y dos inecuaciones lineales con dos incógnitas, éstas últimas se analizaran posteriormente.

INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA:

Las inecuaciones lineales con una incógnita son de la forma $ax+b>c$, aunque puede ser con cualquiera de los signos de comparación. La resolución de inecuaciones de este tipo, requiere el uso de las propiedades analizadas en desigualdades y los principios matemáticos básicos.

Ejemplo 1:

Resolver la siguiente inecuación: $3x+4<11$

Solución:

El proceso consiste en espejar la incógnita, dejándola al lado derecho de la desigualdad.

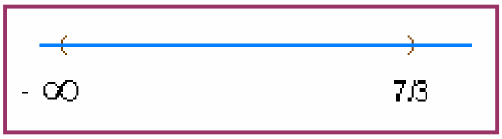
Por la propiedad 1, adicionamos – 4 a los dos lados de la expresión, para ir despejando la incógnita.

$3x+4-4<11-4 \Rightarrow\Rightarrow 3x<7$

Por la propiedad 7, sobre la reciprocidad, se divide por 3, como es un valor positivo, el sentido de la desigualdad no cambia, de esta manera se despeja completamente la incógnita.

$$3x<7 \Rightarrow\Rightarrow \frac{1}{3}(3x)<\frac{1}{3}(7) \Rightarrow\Rightarrow x<\frac{7}{3}$$

Solución: x < 7/3.



Esto significa que cualquier valor menor que 7/3 satisface la desigualdad. Veamos un caso particular x = 0, si lo reemplazamos en la desigualdad, ésta debe ser verdadera.

$3x+4<11 \Rightarrow\Rightarrow 3(0)<11 \Rightarrow\Rightarrow 3<11$ Lo cual es verdadero. Cuando en la solución se toma un solo valor y se cumple, significa que en los demás valores del intervalo también se cumple. Para el ejemplo analizado, la solución NO incluye el extremo ya que es una desigualdad estricta.

Ejemplo 2:

Hallar el conjunto solución de la inecuación: $4(x+5)+x \geq 3(x+1)$

Solución:

Lo primero que se debe realizar es operar los paréntesis.

$$4(x+5)+x \geq 3(x+1) \Rightarrow\Rightarrow 4x+20+x \geq 3x+3 \Rightarrow\Rightarrow 5x+20 \geq 3x+3$$

Aplicando las propiedades básicas de desigualdades tenemos:

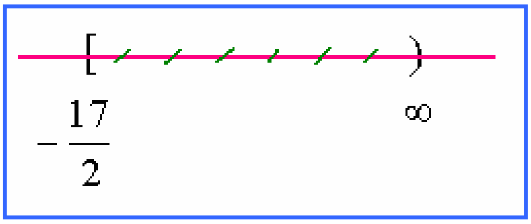
$$5x+20 \geq 3x+3 \Rightarrow\Rightarrow 5x-3x \geq 3-20 \Rightarrow\Rightarrow 2x \geq -17 \Rightarrow\Rightarrow x \geq -\frac{17}{2}$$

La solución indica que el extremo también hace parte del intervalo. Expresemos dicha solución como pareja ordenada, como desigualdad y gráficamente.

-) $[-\frac{17}{2}, \infty)$

-) $-\frac{17}{2} \leq x < \infty$

-)



Ejemplo 3:

Resolver $-5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1$

Solución:

Se observa que se trata de una desigualdad compuesta, el procedimiento para despajar la incógnita lo podemos ver en seguida.
Primero multiplicamos toda la expresión por 2 para eliminar el dos del denominador del la parte que contiene la incógnita.

$$-5(2) \leq \frac{(4-3x)(2)}{2} < (2)1 \Rightarrow\Rightarrow -10 \leq 4-3x < 2$$

Ahora restamos – 4 a los términos para seguir despejando la incógnita

$$-10 \leq 4-3x < 2 \Rightarrow\Rightarrow -10-4 \leq 4-4-3x < 2-4 \Rightarrow\Rightarrow -14 \leq -3x < -2$$

Dividimos todo por -3 para que la incógnita quede despajada, pero recordemos que si una desigualdad la dividimos por un valor negativo, el sentido cambia.

$$-14 \leq -3x < -2 \Rightarrow\Rightarrow \frac{-14}{-3} \geq \frac{-3x}{-3} > \frac{-2}{-3} \Rightarrow\Rightarrow \frac{14}{3} \geq x > \frac{2}{3}$$

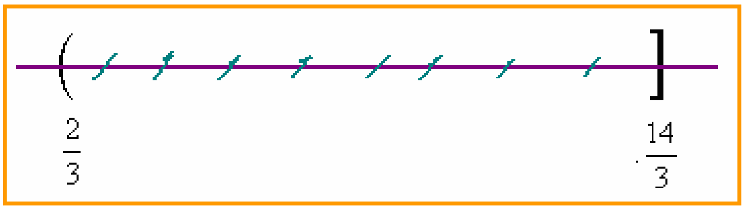
La solución indica que todo valor menor o igual que 14/3 y mayor que 2/3 satisface la desigualdad. El intervalo solución es semiabierto a derecha.

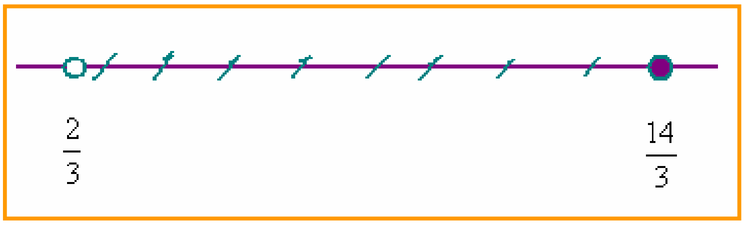
Expresemos la solución como se acostumbra.

-) $(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}]$

-) $\frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}$

-)





Ejemplo 4:

Hallar los valores de x que satisfagan la expresión.

$$\frac{1}{x-2} > 0$$

Solución:

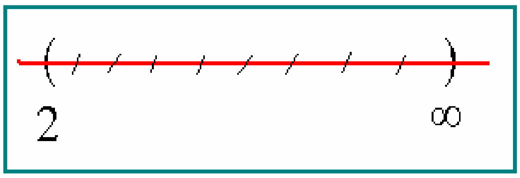
Analizando la desigualdad, se observa que el numerador siempre es positivo, entonces para que la fracción sea mayor que cero, el denominador debe ser mayor que cero. Así:

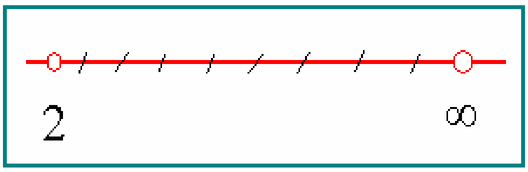
$x - 2 > 0$, despejando la incógnita: $x - 2 + 2 > 0 + 2$, entonces: $x > 2$.

-) $(2, \infty)$

-) $2 < x < \infty$

-)





Ejemplo 5:

Resolver $\frac{y+1}{3} \leq \frac{y+1}{2}$

Solución:

Por el principio de facciones equivalentes, transformamos las fracciones a expresiones enteras.

$\frac{y+1}{3} \leq \frac{y+1}{2} \Rightarrow\Rightarrow 2(y+1) \leq 3(y+1)$

Ahora se hacen las multiplicaciones indicadas y se simplifica.

$2(y+1) \leq 3(y+1) \Rightarrow\Rightarrow 2y+2 \leq 3y+3 \Rightarrow\Rightarrow 2y-3y \leq 3-2 \Rightarrow\Rightarrow -y \leq 1$

Como la incógnita nos da negativa, entonces multiplicamos toda la expresión por -1.

$-y \leq 1 \Rightarrow\Rightarrow y \geq -1$

La solución:

-) $[-1, \infty)$

-) $-1 \leq y < \infty$

-)

INECUACIONES RACIONALES:

en este apartado se van a analizar las inecuaciones racionales cuyo numerador y denominador son polinomios lineales.

Sea $\frac{p(x)}{q(x)} < c$ Siendo q(x) ≠ 0.

La resolución de este tipo de inecuaciones se puede hacer por dos métodos, por conectivos lógicos o por el diagrama de signos.

-) Conectivos Lógicos:

Consiste en comparar la fracción frente al cero.

a) Sea $\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} < 0}$

Para que la fracción sea negativa (menor que cero) puede ocurrir dos situaciones:

p(x) > 0 y q(x) < 0 o p(x) < 0 y q(x) > 0

Ya que positivo y negativo ó negativo y positivo, producen siempre negativo.

b) Sea $\boxed{\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0}$

Para que la fracción sea positiva (mayor que cero) puede ocurrir dos situaciones:

$$\boxed{\mathbf{p(x) > 0 \;\; y \;\; q(x) > 0 \qquad o \qquad p(x) < 0 \;\; y \;\; q(x) < 0}}$$

Ya que positivo y positivo, ó negativo y negativo, siempre produce positivo.

Si nos detenemos un poco a analizar este método, se puede ver que hay involucrados dos conectivos lógicos, la Conjunción (Λ) y la Disyunción (V).

-) Diagrama de Signos:

Por este método, se toma el polinomio del numerador y del denominador y se identifica cual valor hace que dichos polinomios sean cero, a ese valor se le llama *valor crítico*. Cada polinomio es representado por una recta real donde se ubica el valor crítico y se coloca signos positivos donde el polinomio es positivo y signos negativos donde el polinomio sea negativo. Finalmente se aplica la ley de los signos para cociente y se obtiene intervalos positivos y negativos para la fracción. La solución depende del tipo de comparación: Si la fracción es mayor que cero, la solución serán los intervalos positivos, pero si la fracción es menor que cero, la solución serán los intervalos negativos.

Por medio de los ejemplo modelos, se puede comprender mejor los métodos mencionados.

Ejemplo 1:

Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x+2}{x+3} > 0$$

Solución:

Método de los Conectivos Lógicos:

$$\frac{x+2}{x+3} > 0$$

Llamemos p(x) = x + 2 y q(x) = x + 3, entonces:

Para que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$ Pueden ocurrir dos situaciones:

P(x) > 0 ∧ q(x) > 0 , V, **p(x) < 0 ∧ q(x) < 0**

Dichos en palabras: Los dos positivos o los dos negativos (*tiene lógica verdad*)

Analicemos las dos posibilidades:

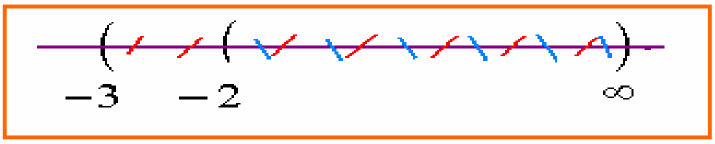
Primera: **P(x) > 0 ∧ q(x) > 0**

x + 2 > 0, x > -2

x + 3 > 0, x > -3

Como entre p(x) y q(x) hay una conjunción (∧) se debe hacer intersección entre los intervalos.

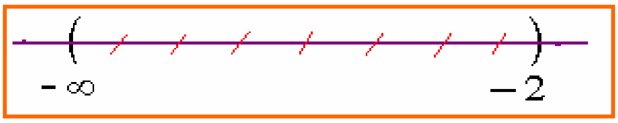
P(x) ∧ q(x)



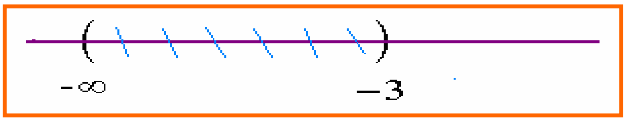
Primera solución

Segunda: **p(x) < 0 ∧ q(x) < 0**

x + 2 < o, x < -2

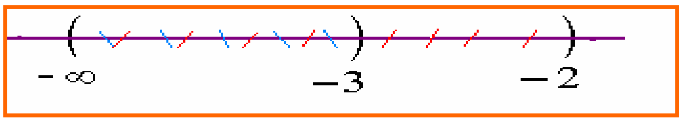


x + 3 < 0, x < -3



Igual que en el caso anterior:

p(x) ∧ q(x)

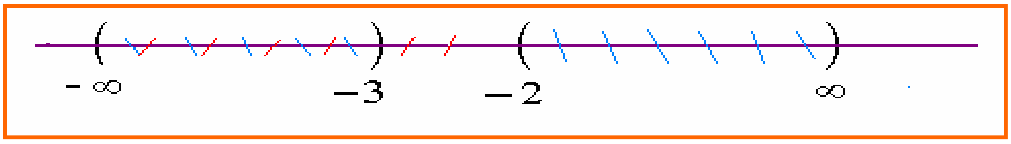


Segunda Solución.

Como ya se contemplaron las dos posibilidades, la solución total es la unión (V) de la primera y segunda solución.

Solución Total : $(-\infty,-3) \cup (-2,\infty)$

Gráficamente :

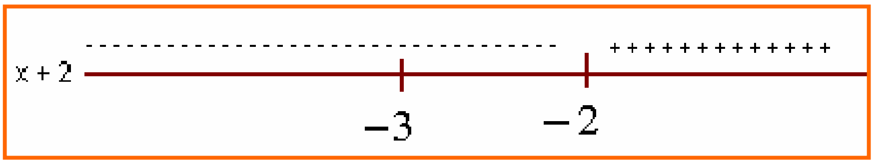


Método de Diagrama de Signos:

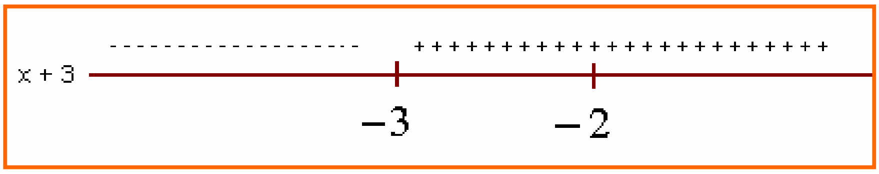
$$\frac{x+2}{x+3} > 0$$

Llamemos p(x) = x + 2 y q(x) = x + 3, entonces:

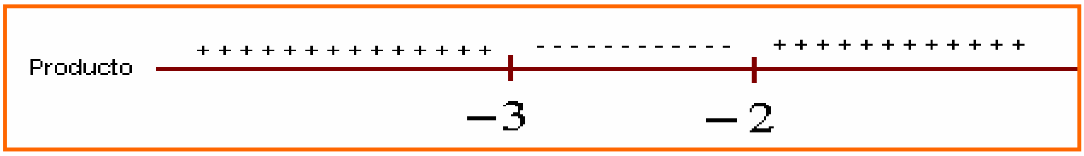
Para el numerador: x + 2 = 0, el valor de x que hace cero la expresión es - 2, punto critico x = – 2. Cualquier valor mayor de – 2 hace positiva la expresión (x + 2) y cualquier valor menor de -2 hace negativa dicha expresión. Se hace la recta real con este análisis.



Para el denominador: x + 3 = 0, el valor de x que hace cero la expresión es -3, punto crítico x = - 3.



Se agrupan los dos resultados y se hace producto de signos.



Como la fracción debe ser mayor que cero, la solución será los intervalos positivos del producto, es decir: $(-\infty,-3) \cup (-2,\infty)$

Los dos métodos son interesantes, aunque el segundo es algo más corto. Se recomienda aprender los dos.

Ejemplo 2:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{3x-12}{2x+6} < 0$$

Solución:

Para que la fracción sea negativa, se requiere que uno término sea negativo y el otros positivo y viceversa.

Método de Conectivos Lógicos:

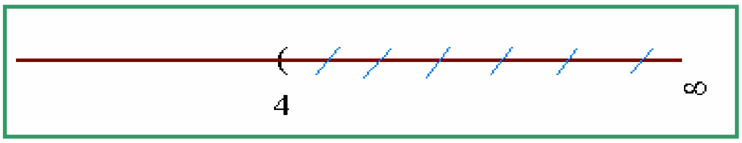
Como la fracción es menor que cero se pueden presentar dos posibilidades:

$p(x) > 0$ y $q(x) < 0$ o $p(x) < 0$ y $q(x) > 0$

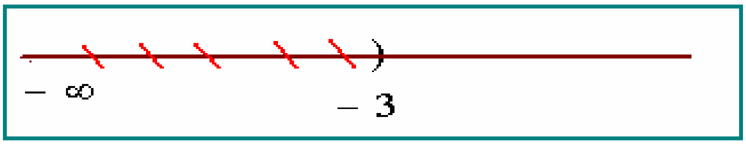
Primera posibilidad:
$p(x) > 0$ y $q(x) < 0$

Reemplazamos

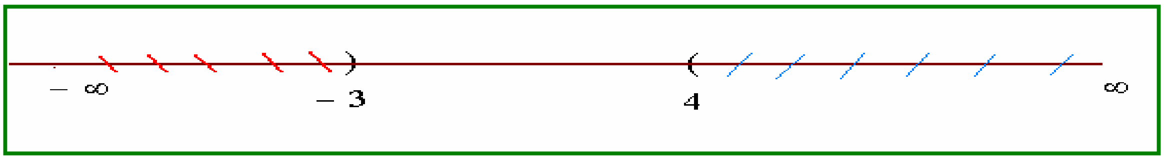
$3x - 12 > 0, \quad x > 4$



$2x + 6 < 0, \quad x < -3$



Como entre p(x) y q(x) hay una conjunción ($\wedge$) se debe hacer intersección entre los intervalos.



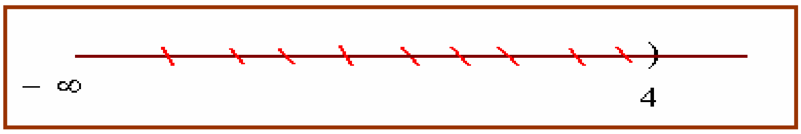
Se observa que NO hay elementos comunes, luego la solución es vacía. $\{\phi\}$

Segunda posibilidad:

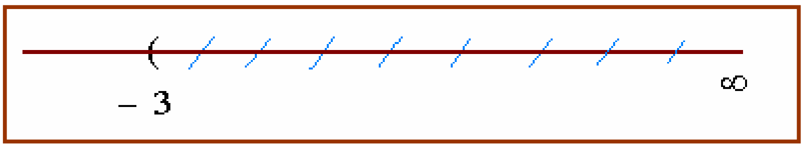
$p(x) < 0$ y $q(x) > 0$

Reemplazando:

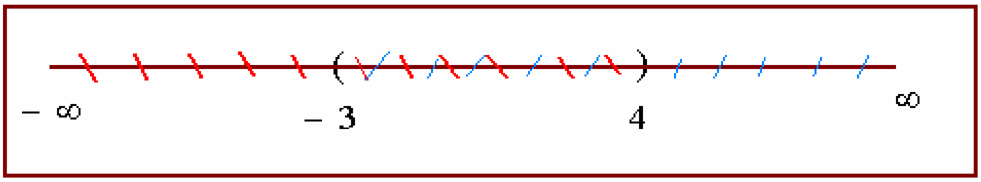
$3x - 12 < 0, \quad x < 4$



$2x + 6 > 0, \quad x > -3$



Hacemos la intersección de los intervalos:



La solución total será: $\{\phi\} \cup (-3,4) = (-3,4)$
Cualquier valor del intervalo (-3, 4) satisface la desigualdad propuesta. Recordemos que para este caso, los extremos NO se incluyen en la solución.

Ejemplo 3:

Resolver la inecuación:

$$\frac{x+4}{2x-1} < 2$$

Solución:

Antes de aplicar cualquiera de los métodos descritos, se debe transformar la expresión de tal forma que el segundo término sea cero, para hacer la comparación.

$$\frac{x+4}{2x-1} < 2 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x+4}{2x-1} - 2 < 0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{(x+4)-2(2x-1)}{2x-1} < 0$$

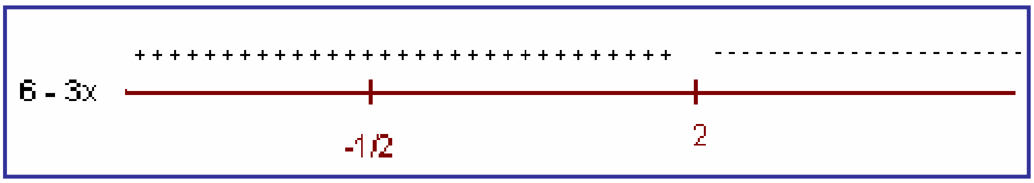
Operando y simplificando:

$$\frac{(x+4)-2(2x-1)}{2x-1} < 0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{6-3x}{2x-1} < 0$$

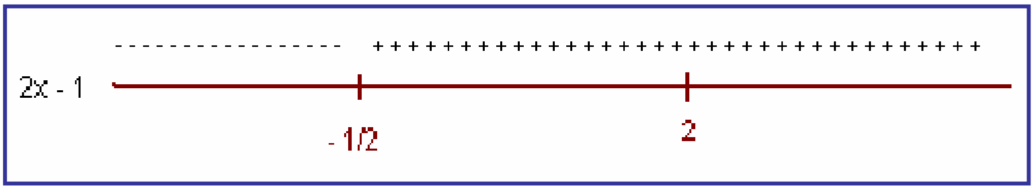
Ahora si tenemos la fracción comparada con cero, por lo que se puede aplicar cualquiera de los métodos analizados para este tipo de inecuaciones.

Método de Diagrama de Signos:

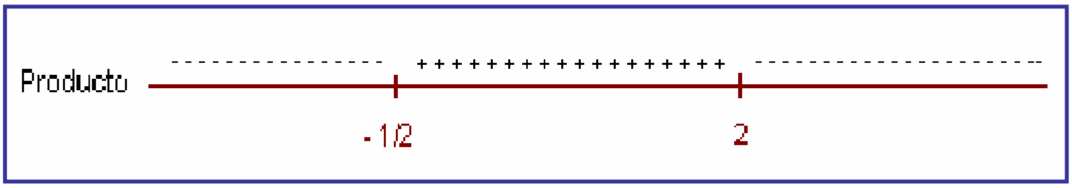
6 – 3x = 0, x = 2. Punto crítico (2). Todos los valores mayores que x = 2, hacen la expresión negativa y todos los valores menores que x = 2 la hacen positiva.



2x – 1 = 0, x = ½ Punto crítico (½). Todos los valores mayores que ½ hacen la expresión positiva y los valores menores que ½ la hacen negativa.



Al hacer el producto de los intervalos se obtiene la siguiente grafica:



Como la desigualdad inicial debe ser negativa; es decir, temor que cero, entonces la solución serán los intervalos negativos.

Solución: $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$

EJERCICIOS

Desarrollar los ejercicios, explicando cada paso.

1. Dada la desigualdad – 2 > - 4, cual será la desigualdad obtenida si:
   a-) Se suma - 4
   b-) Se resta 10
   c-) Se multiplica por – 3

2. Expresar las siguientes desigualdades como intervalos y hacer la grafica.
   a-) x > 4
   b-) x ≥ -3
   c-) - 5 > x ≤ 2
   d-) 0 ≤ x ≤ 8

3. Expresar los siguientes intervalos como desigualdades.
   a-) (- 3, 4]
   b-) (- ∞, 6) – [-5]
   c-) [-2, 4] – (0)

4. Resolver las siguientes inecuaciones.

a-) $2x + 5 \leq 7$ Rta: $x \leq 1 \quad (-\infty, 1]$

b-) $\dfrac{x}{3} \geq 2 + \dfrac{x}{6}$ Rta: $x \geq 12 \quad [12, \infty)$

c-) $3 \leq \dfrac{2x-3}{5} < 7$ Rta: $9 \leq x < 19 \quad [9,19)$

d-) $9 + \dfrac{1}{3}x \geq 4 - \dfrac{1}{2}x$ Rta: $-6 \leq x < \infty \quad [-6, \infty)$

5. Resolver las siguientes inecuaciones racionales.

a-) $\dfrac{4}{3x+2} \geq 0$ Rta: $x > -2/3$

b-) $\dfrac{x+1}{1-x} < 0$ Rta: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

c-) $\dfrac{7R}{7+R} > 3$ Rta: $R > 21/4$

INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

$$\boxed{ax + by + c > 0}$$

Las inecuaciones con dos variables pueden ser de la forma $ax + by < k$, $ax^2 + by > k$, otras. Siendo k un real. Inicialmente se estudiarán las técnicas de resolución de este tipo de inecuaciones para luego analizar algunas aplicaciones.

Resolver una inecuación con dos incógnitas, es hallar un conjunto de puntos en el plano, que llamaremos R, los cuales deben satisfacer la inecuación.

Se expondrá una metodología general para resolver una inecuación con dos incógnitas.

1. Dada la desigualdad $ax + by < 0$, se expresa temporalmente como igualdad $ax + by = 0$, para hacer una gráfica, que puede ser una recta, una parábola, etc. Si la desigualdad es estricta (>, <) la línea límite se hace interrumpida (- - - - -), pero si la desigualdad no es estricta (≥, ≤), la línea será continua (————).

2. La línea obtenida divide el plano en dos semiplanos, se prueba un punto (x, y) en cada semiplano, para determinar en cual de ellos la desigualdad se hace verdadera. Esto nos indica que solo en uno de ellos, la inecuación es válida.

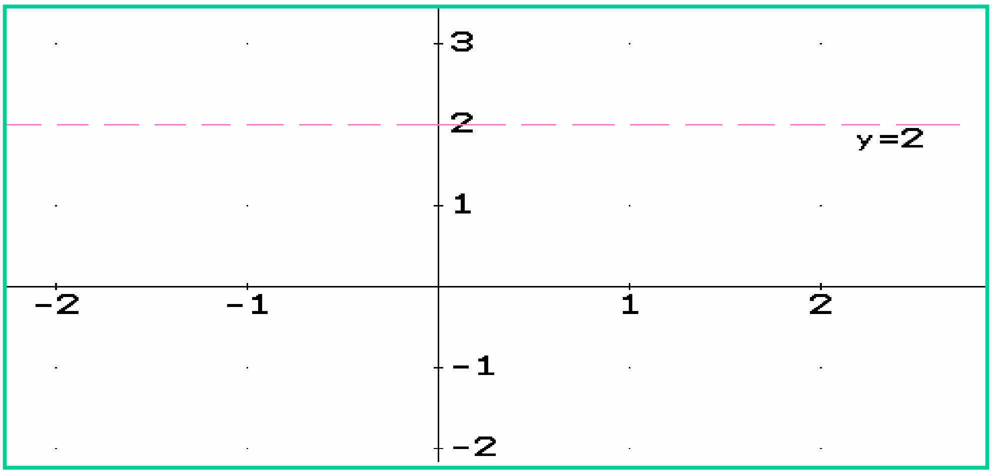
3. El punto que hace verdadera la desigualdad incluye el semiplano que lo contiene, luego dicho semiplano será la solución, generalmente se subraya o sombrea.

Ejemplo 1:

Resolver la desigualdad: y > 2.

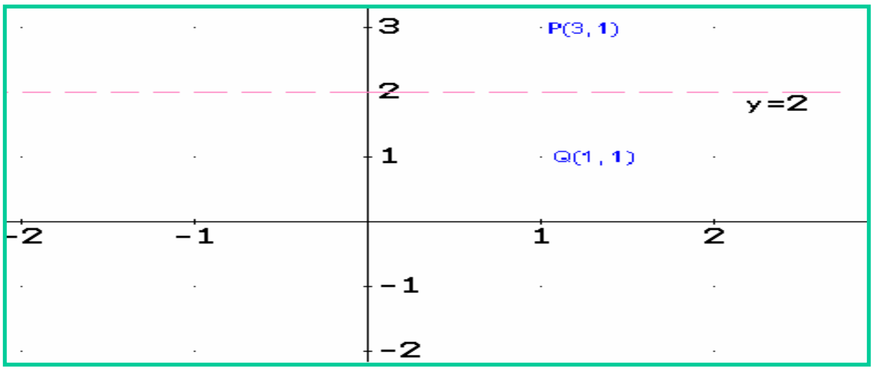
Solución:

Primero hacemos y = 2, para graficar, se sabe que esto corresponde a una recta horizontal, se observa de color rojo en la ilustración, con líneas interrumpidas, ya que la desigualdad es estricta.

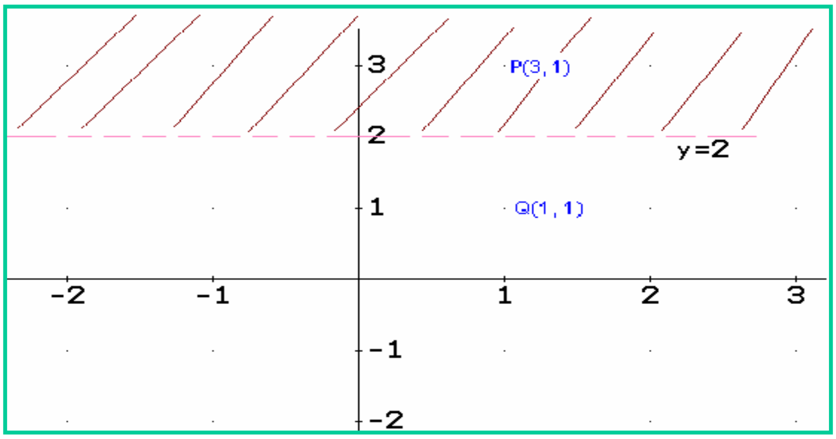


Reemplazamos dos puntos, digamos P(3, 1) y Q(1, 1). Se puede ver que P esta en el semiplano superior y Q en el semiplano inferior.

Según la desigualdad dada, y > 0, el semiplano superior, satisface la desigualdad; es decir, el que inicia en la recta interrumpida de color rojo hacia arriba. El punto Q no satisface la desigualdad.



El conjunto solución será el semiplano superior, lo que se expresa subrayado.



Ejemplo 2:

Dada la expresión, $y \geq 2x$, hallar el conjunto de punto en el plano que satisfaga la inecuación dada.

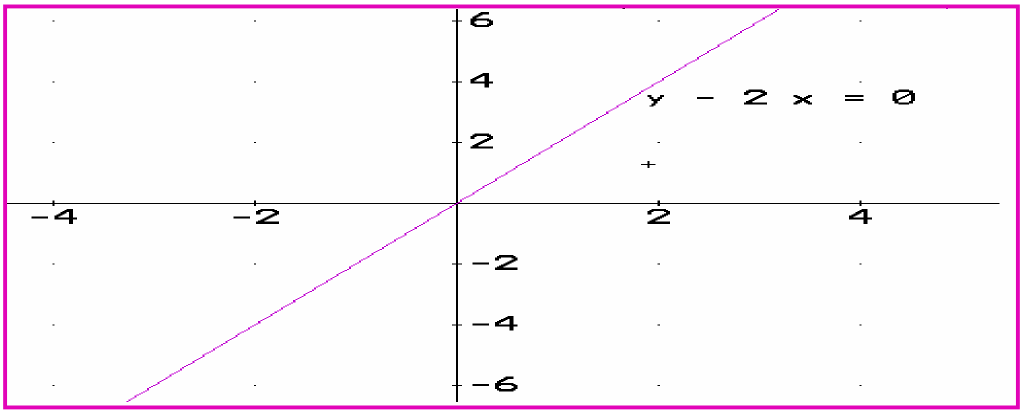
Solución:

Primero ajustamos la desigualdad: $y - 2x \geq 0$. En seguida expresamos $y - 2x = 0$ para graficar, como corresponde a una ecuación de primer grado, la gráfica es una recta, entonces se toman dos puntos:

Para $x = 0$, $y - 2(0) = 0$, entonces $y = 0$. (0, 0)

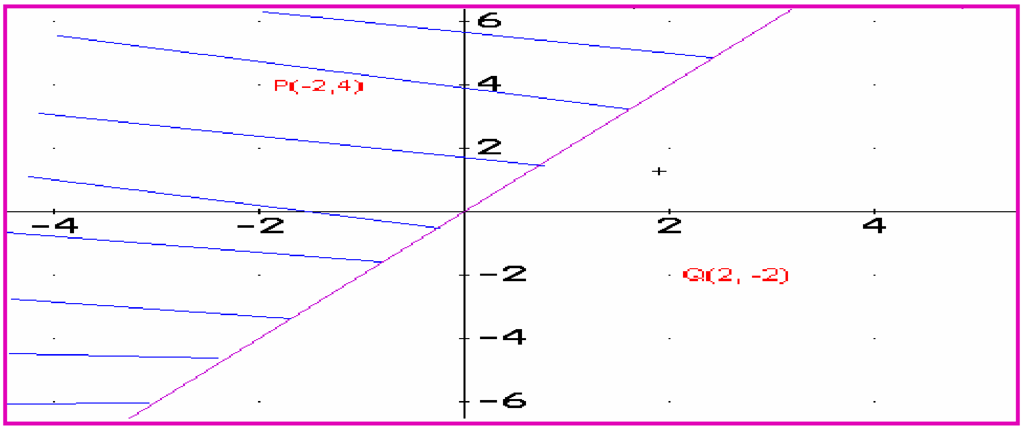
Para $x = 2$, $y - 2(2) = 0$, entonces $y = 4$ (2, 4)

Como se tienen dos puntos, por los axiomas euclidianos, entre los que se tiene aquel famoso que dice: "*Por dos puntos solo pasa una y solo una recta*" Esta será continua, ya que la desigualdad no es estricta.



Para identificar el semiplano de solución reemplacemos dos puntos, digamos: P(-2, 4) y Q(2, - 2), ya que P esta por encima del plano y Q esta por debajo. Si se reemplaza dicho puntos en la inecuación:
Para P(-2, 4): Como y ≥ 2 x, entonces: 4 ≥ 2(-2) Verdadero.
Para Q(2, - 2): para la misma desigualdad: - 2 ≥ 2(2) Falso.

El punto P es solución de la inecuación, luego el semiplano que contiene a dicho punto es la solución de la inecuación planteada.



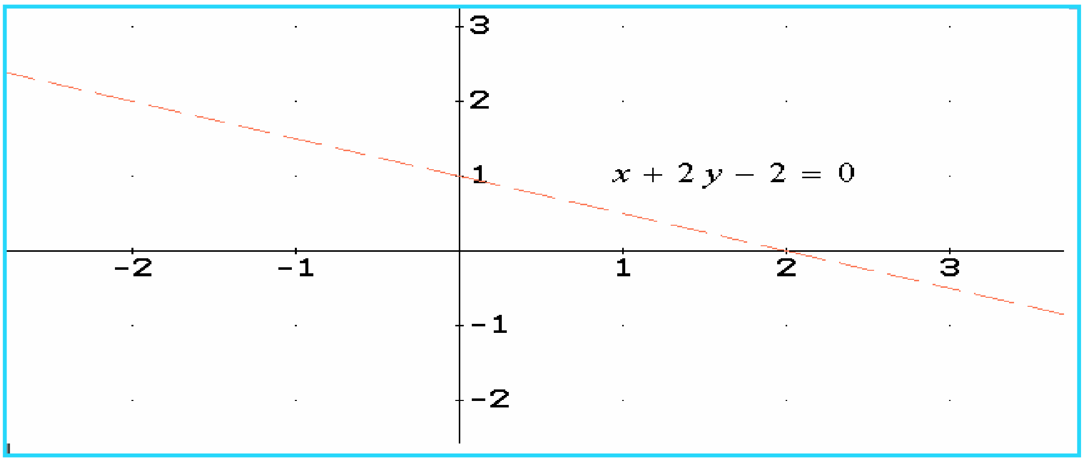
Cualquier punto de la parte rayada, es solución de la inecuación.

Ejemplo 3:

Determinar el conjunto solución de la desigualdad: $x + 2y < 2$

Solución:

Llevamos la expresión a una comparación con cero. $x + 2y - 2 < 0$ Luego planteamos la ecuación temporal: $x + 2y - 2 = 0$ Por ser una ecuación lineal, con dos puntos es suficiente para graficar. Tomemos por ejemplo x = 0 y x = 2.
x = 0, reemplazando: 0 + 2 y – 2 = 0, y = 1, luego el punto: (0, 1)
x = 2, reemplazando: 2 + 2 y - 2 = 0, y = 0, luego el punto: (2, 0)



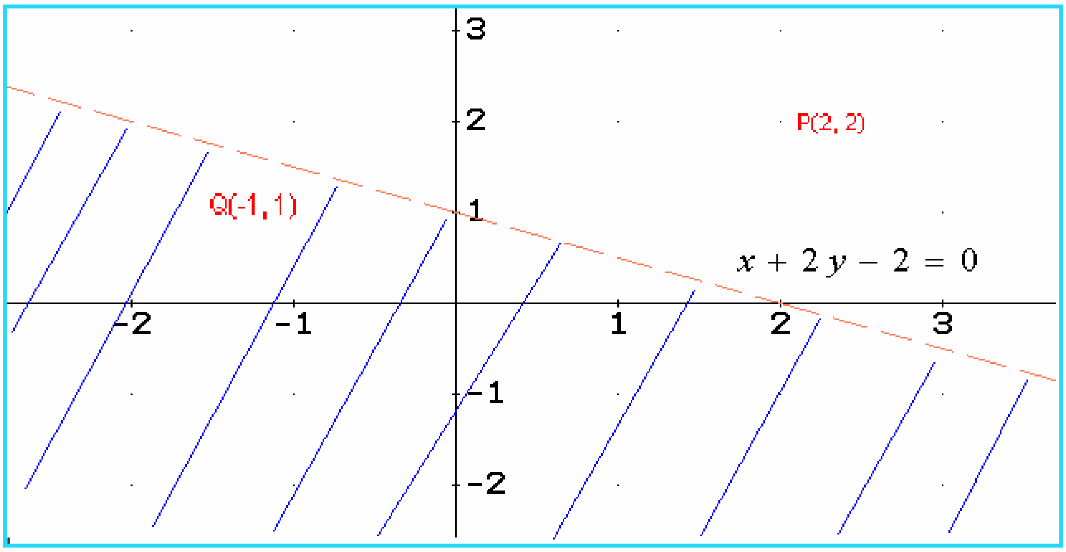
Ahora buscamos un punto por encima y por debajo del plano que esta separado por la recta, para identificar el conjunto de puntos solución.

Tomemos los puntos: P(2, 2) y Q(- 1, 1) Es de aclarar que los puntos que se toman son arbitrarios, solo se debe tener presente que estén en la parte del plano correspondiente.

Para P (2, 2) $2 + 2(2) - 2 < 0$ Falso.

Para Q (- 1,1) $-1 + 2(1) - 2 < 0$ Verdadero

El conjunto solución contiene el punto Q.



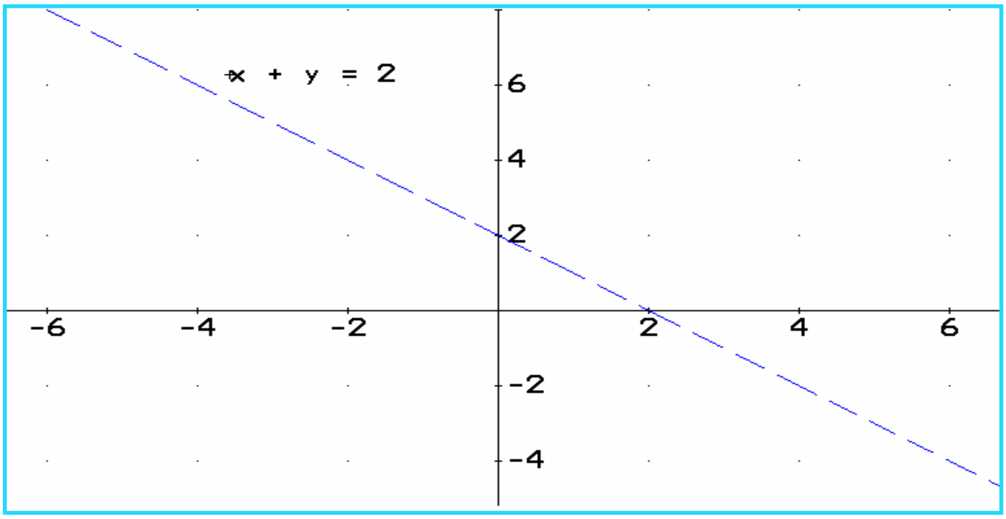
Ejemplo 4:

Resolver el sistema: $x + y > 2$ y $2x - y \leq 4$

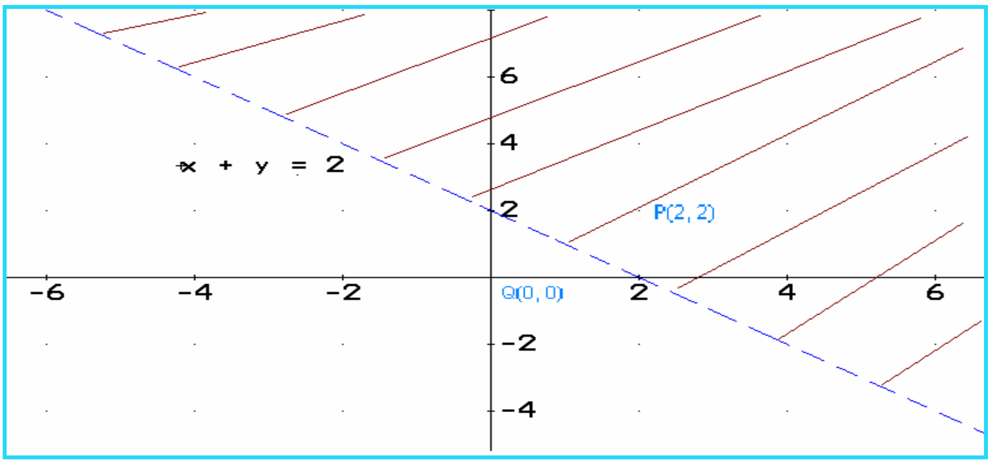
Solución:

Para este caso se debe hacer dos procesos uno para cada inecuación, la solución será la intersección de los dos casos.

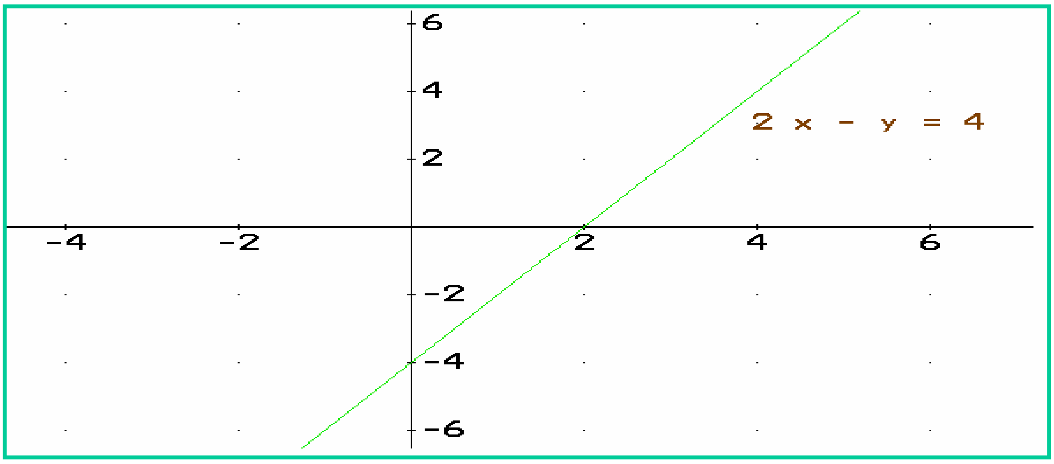
Primer Caso: **x + y > 2**. Planteamos la ecuación temporal x + y = 2, damos valores a x, veamos:
x = 0, entonces y = 2, el punto (0, 2)
x = 2, entonces y = 0, el punto (2, 0)
La gráfica será.



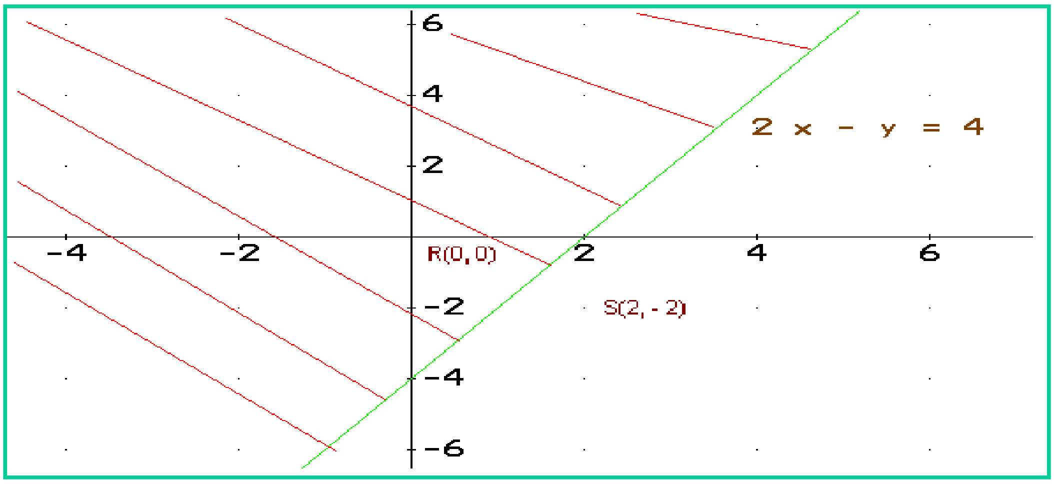
Tomemos el punto P(2, 2) y el punto Q(0, 0), los reemplazamos en la inecuación.
Para P(2, 2): x + y > 2, luego: (2) + (2) > 2. Verdadero
Para Q(0, 0): x + y > 2, luego: (0) + (0) > 2. Falso.
El semiplano solución será el que contiene el punto P(2, 2).



Segundo Caso: 2 x – y ≤ 4. La ecuación temporal 2 x – y = 4. Los puntos:
Tomemos x = 0, entonces y = -4, el punto (0, -4)
x = 2, entonces y = 0, el punto (2, 0). La gráfica:



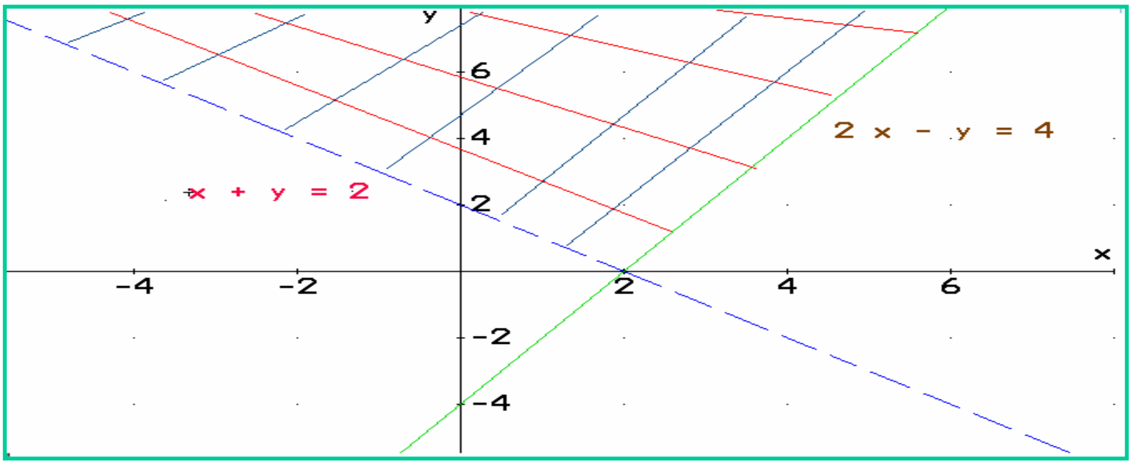
Tomemos los puntos:
R(0, 0): $2x - y \leq 4$, luego: $2(0) - (0) \leq 4$. Verdadero
S(2, -2): $2x - y \leq 4$, luego: $2(2) - (-2) \leq 4$. Falso
El semiplano solución debe contener al punto R(0, 0)



Como ya se tienen las dos soluciones, una para cada inecuación, en seguida se debe hallar la solución total, la cual será *la intersección* de las soluciones obtenidas.

El cruce de líneas en la siguiente gráfica, esta indicando la intersección, dicho semiplano satisface simultáneamente las dos inecuaciones planteadas en el ejemplo. Si tomamos un punto cualquiera en dicho semiplano digamos (2, 4), éste debe hacer verdaderas las dos desigualdades simultáneamente.

Para $x + y > 2$: $(2) + (4) > 2$. Lo cual es verdadero.
Para $2x - y \leq 4$: $2(2) - (4) \leq 4$. Que también es verdadero.



La solución es la parte que presenta cuadrículas.

Ejemplo 5:

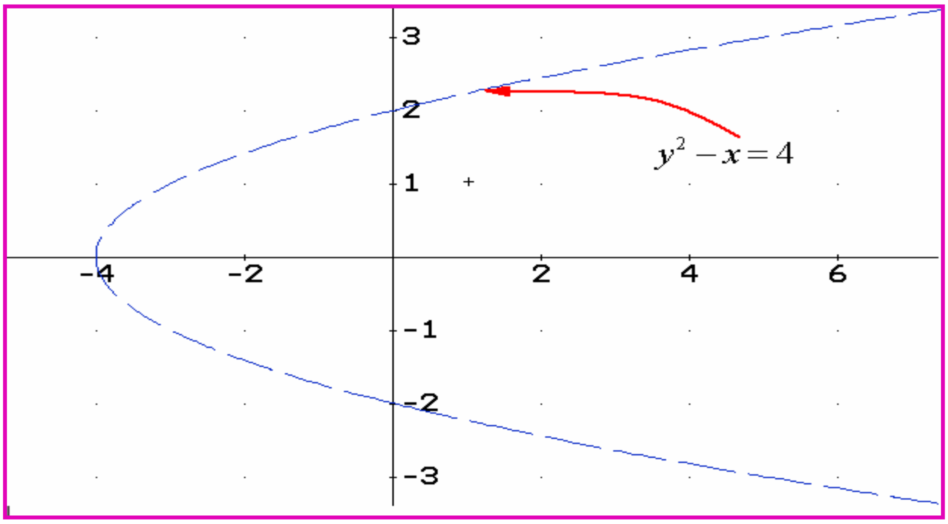
Identificar el conjunto solución para la inecuación:

$$x+4>y^2$$

Solución:

Se observa que corresponde a una expresión cuadrática: Entonces: $x+4=y^2$

Reorganizándolo: $y^2-x=4$. La grafica:



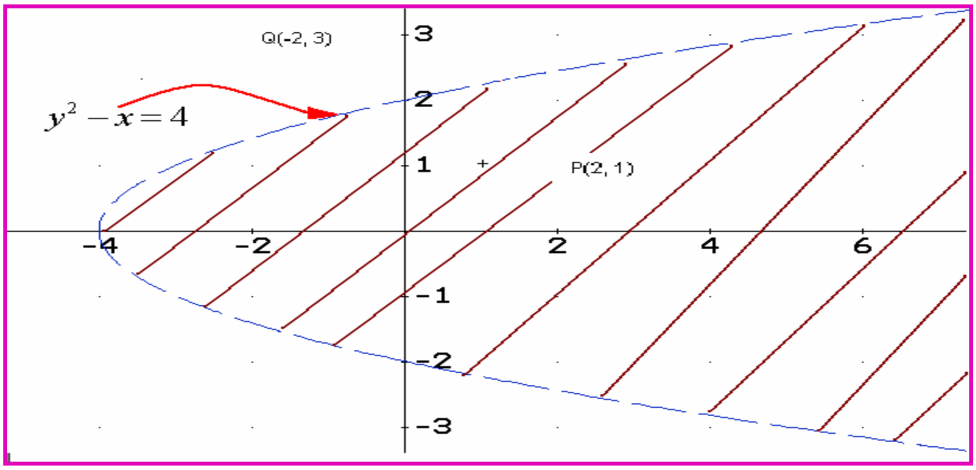
Para encontrar el semiplano solución, tomemos dos puntos un dentro y otro fuera de la curva.

P(2, 1) y Q(-2, 3)

Para P(2, 1): $x+4>y^2 \Rightarrow\Rightarrow (2)+4>(1)^2$. Verdadero.

Para Q(-2, 3): $x+4>y^2 \Rightarrow\Rightarrow (-2)+4>(3)^2$. Falso.

La solución será el semiplano que contenga a el punto P(2, 1), que en este caso es la parte interna de la curva.



Ejemplo 6:

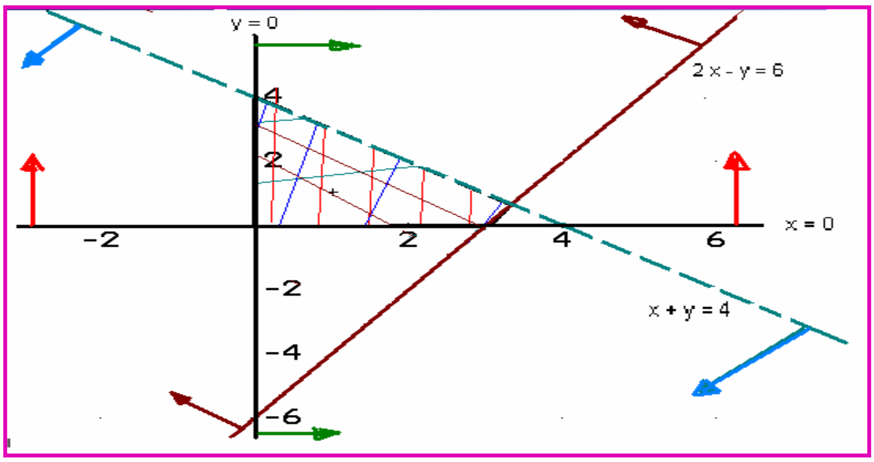
Hallar la solución total para el sistema:

$$x \geq 0,\quad y \geq 0,\quad x+y<4,\quad 2x-y \leq 6$$

Solución:

A continuación se dará la solución total, por favor hacer el procedimiento con el grupo colaborativo y aclarar las dudas con el Tutor.

Para $x \geq 0$ las líneas son rojas.
Para $y \geq 0$ las líneas son verdes
Para $x + y < 4$ las líneas son azules
Para $2x - y \leq 6$ las líneas son cafés.



INECUACIONES CUADRATICAS

$$\boxed{ax^2 + bx + c > 0}$$

Las inecuaciones cuadráticas son de la forma $ax^2 + bx + c < 0$, pero puede ser >, ≤, ≥. Con a ≠ 0. La resolución para este tipo de inecuaciones es similar al caso de las inecuaciones racionales lineales.

Lo primero que se debe hacer para resolver una inecuación cuadrática es llevarla a la comparación con cero y luego linealizarla; es decir, expresarla como producto de dos factores lineales, lo que se puede hacer por factorización o por la fórmula cuadrática.

Si se tiene la inecuación: $ax^2 + bx + c < 0$, se puede transformar en un producto: $\alpha \, x \, \beta \;<\; 0$. Cuando la inecuación este de esta manera, se aplica uno de los métodos propuestos, ya sea conectivos lógicos o diagrama de signos.

Conectivos Lógicos:

Dada una inecuación cualquiera, $ax^2 + bx + c > 0$ ó $ax^2 + bx + c < 0$ se puede presenta los siguientes casos.

1. $\alpha \, x \, \beta \;>\; 0$

Para que el producto de los dos factores sea positivo, hay dos posibilidades:

-) $\alpha > 0 \;\; \Lambda \;\; \beta > 0$ Positivo por positivo produce positivo.

V

-) $\alpha < 0 \;\; \Lambda \;\; \beta < 0$ Negativo por negativo produce positivo

2. $\alpha \, x \, \beta \;<\; 0$

Para que el producto de los dos factores sea negativo, hay dos posibilidades:

-) $\alpha > 0 \;\; \Lambda \;\; \beta < 0$ Positivo por negativo produce negativo

V

-) $\alpha < 0 \;\; \Lambda \;\; \beta > 0$ Negativo por positivo produce negativo.

Se puede observar que cada posibilidad origina dos intervalos los cuales se intersecan y las dos soluciones de las dos posibilidades se une para obtener la solución total.

Diagrama de Signos:

Por este método se toman los polinomios de los dos factores y se identifica cual valor hace que dichos polinomios sean cero, a ese valor se le llama *valor crítico*. A cada polinomio se le hace una recta real donde se ubica el valor crítico y se coloca signos positivos donde el polinomio es positivo y signos negativos donde el polinomio sea negativo. Finalmente se aplica la ley de los signos para producto y se obtiene intervalos positivos y negativos para la inecuación. La solución depende del tipo de comparación: Si la inecuación cuadrática es mayor que cero, la solución serán los intervalos positivos, pero si es menor que cero, la solución serán los intervalos negativos.

Ejemplo 1:

Resolver la inecuación: $x^2 - x - 6 < 0$

Solución:

Para ilustrar los procedimientos, este ejemplo se va a resolver por los dos métodos.

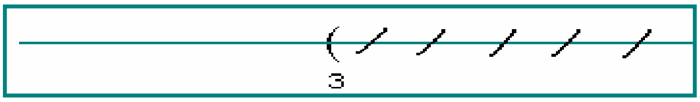
Conectivos Lógicos:

Se linealiza el trinomio cuadrado. $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) < 0$

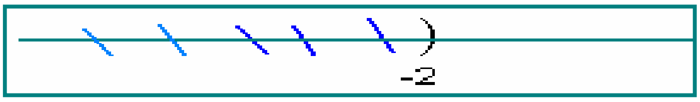
Como los factores deben ser menor que cero, las posibilidades son:

a-)

$x - 3 > 0$, $x > 3$



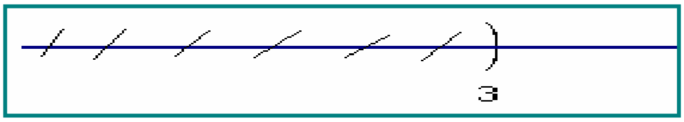
$x + 2 < 0$, $x < -2$



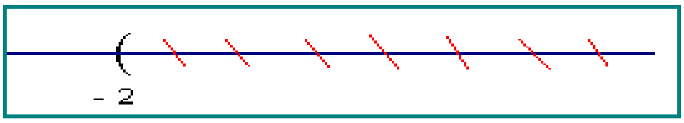
La intersección entre estos intervalos es vacío: (Φ)

b-)

$x - 3 < 0$, $x < 3$



$x + 2 > 0$, $x > -2$



La intersección para esta posibilidad es el intervalo (- 2, 3)

La solución total será la unión de las dos soluciones obtenidas, (Φ) ∪ (- 2, 3)

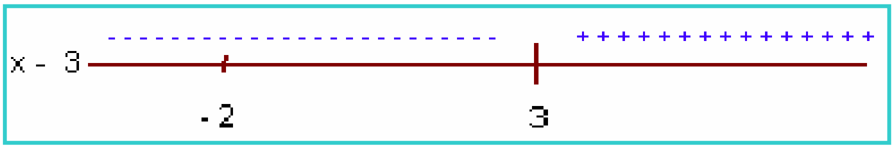
Solución total: (- 2, 3)

Diagrama de Signos:

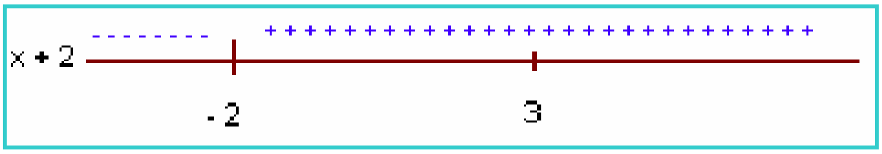
A partir de la inecuación dada y linealizada, iniciamos el proceso.

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) < 0$$

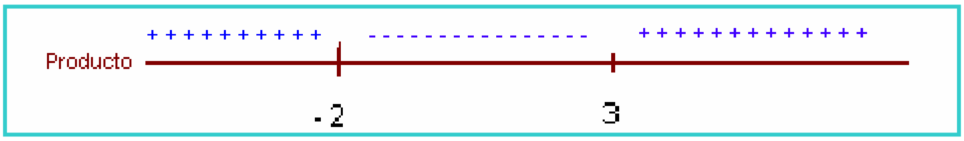
x – 3 = 0, valor critico x = 3. Cualquier valor mayor que 3 hará positiva la expresión y cualquier valor menor que 3 la hará negativa.



x + 2 = 0, valor crítico x = -2. Cualquier valor mayor que -2 hará positiva la expresión y viceversa.



Producto de signos:



Así como la inecuación debe ser menor que cero, la solución será la parte negativa del producto.

Solución: (- 2, 3)

Ejemplo 2:

Hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$x^2 - 4x - 12 > 0$$

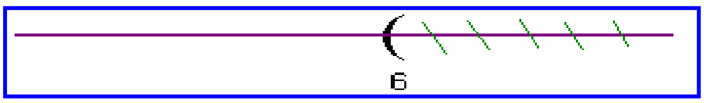
Solución:

Se va a utilizar los conectivos lógicos.

$$x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2) > 0$$

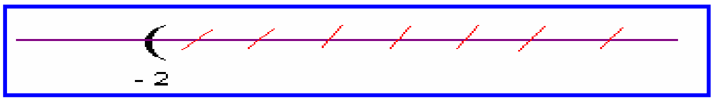
Como el producto de los factores debe ser positivo, entonces las posibilidades son:

a-) x – 6 > 0, x > 6



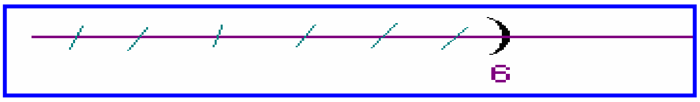
$\wedge$

$x + 2 > 0,\ \ x > -2$



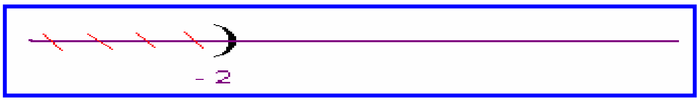
Primera solución: La intersección de los intervalos es: $(6, \infty)$

b-) $x - 6 < 0,\ \ x < 6$



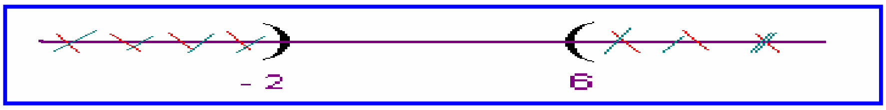
$\wedge$

$x + 2 < 0,\ \ x < -2$



Segunda solución: La intersección de los intervalos es: $(-\infty, -2)$

La solución total: $(-\infty, -2) \cup (6, \infty)$



Ejemplo 3:

Resolver la siguiente inecuación: $x^4 \leq x$

Solución:

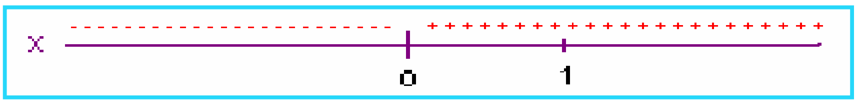
Diagrama de signos:

Primero la comparamos con cero. $x^4 - x \leq 0$

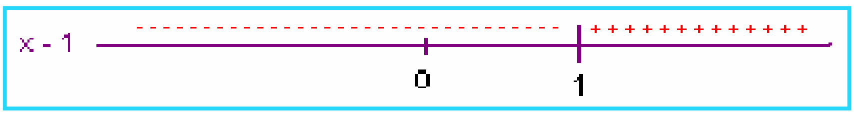
Ahora la linealizamos: $x(x^3 - 1) \leq 0 \Rightarrow\Rightarrow x(x-1)(x^2 + x + 1) \leq 0$

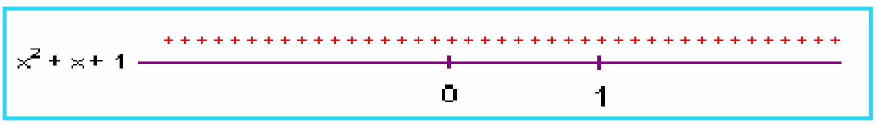
Para cada término identificamos el punto crítico y los intervalos positivos y negativos.

x: Valor crítico x = 0.



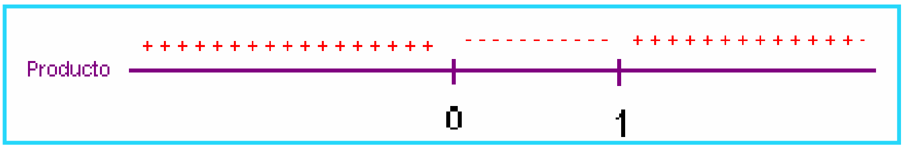
x – 1: Valor crítico x = 1





$x^2 + x + 1$: No hay valor crítico. (por qué)

El producto:



Como la inecuación no es estricta y debe ser menor que cero, la solución incluye los extremos y será la parte negativa del intervalo obtenido.

Solución:

Como pareja ordenada: [0, 1]
Como desigualdad: $0 \leq x \leq 1$

OBSERVACIÓN:

Los ejemplos modelos que se han ilustrado, muestran que las inecuaciones racionales y cuadráticas (también polinómicas) se pueden resolver por el método de los conectivos lógicos y del diagrama de signos; también llamado técnica del cementerio por aquello de las cruces. Cualquiera de los métodos es válido para desarrollar inecuaciones, pero para muchos casos es más pertinente el diagrama de signos, como es el caso de las inecuaciones mixtas o de grado tres o más.

INECUACIONES MIXTAS:

En este contexto se ha determinado que las *inecuaciones mixtas* sean aquellas que además de ser racionales, tengan en el numerador polinomios de grado dos o más, igual en el denominador. El camino de solución para este tipo de inecuaciones es el *diagrama de signos* por su facilidad y mejor manejo.

Ejemplo 1:

Hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x} < 0$$

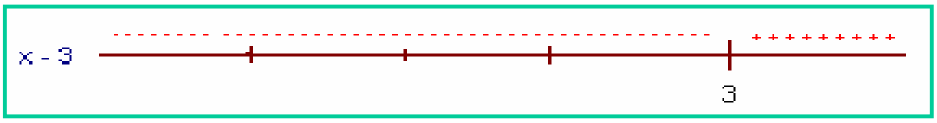
Solución:

Como se ha venido trabajando, lo primero es linealizar los términos.

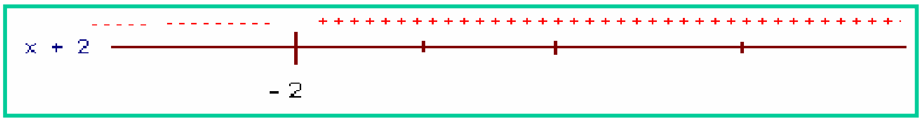
$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x} = \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-1)} < 0$$

Como ya la tenemos linealizada, entonces se procede a tomar cada término para identificar el valor crítico.

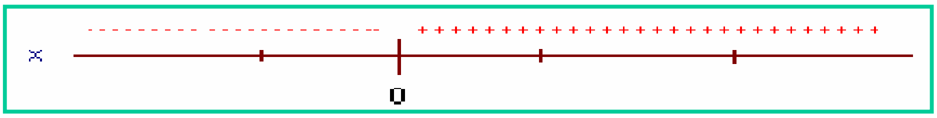
$x - 3 = 0$, valor critico $x = 3$



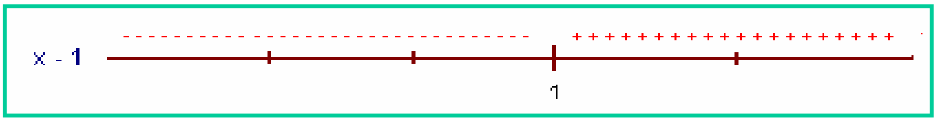
$x + 2 = 0$, valor crítico $x = -2$



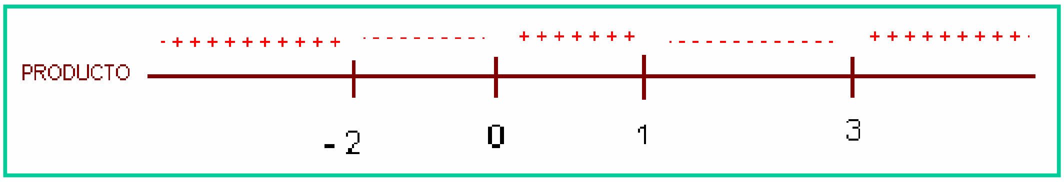
x, valor critico $x = 0$



$x - 1 = 0$, valor crítico $x = 1$



Por la ley de los signos para producto.



Como la fracción debe ser menor que cero, entonces la solución serán los intervalos: (- 2, 0) U (1, 3)

Ejemplo 2:

Resolver: $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1} \leq 2$

Solución:

Primero se lleva la fracción a compararla con cero.

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \leq 2 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} - 2 \leq 0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x^2 - x - 2 - 2x + 2}{x - 1} \leq 0$$

Operando y simplificando:

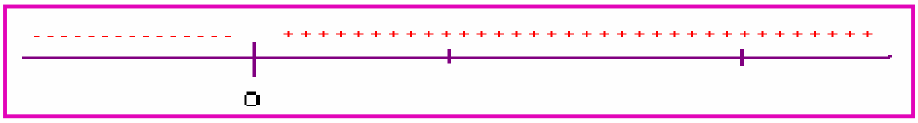
$$\frac{x^2 - x - 2 - 2x + 2}{x - 1} \leq 0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x^2 - 3x}{x - 1} \leq 0$$

Ahora se linealiza los términos de la fracción.

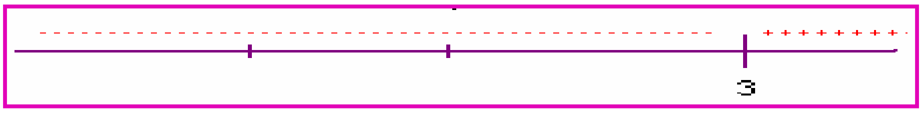
$$\frac{x^2 - 3x}{x - 1} \leq 0 \Rightarrow\Rightarrow \frac{x(x - 3)}{x - 1} \leq 0$$

Se identifican los valores críticos.

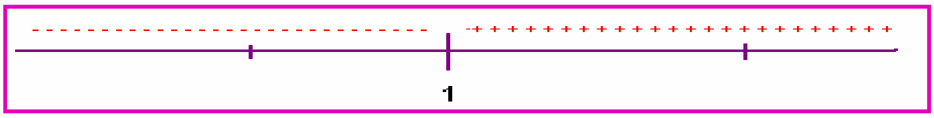
x, valor crítico x = 0



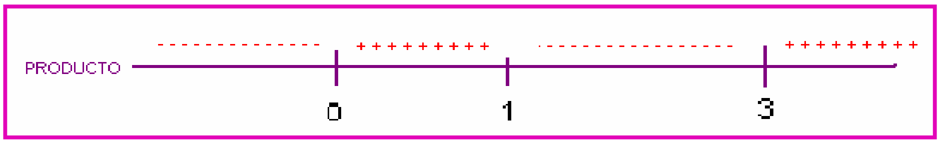
x – 3, valor crítico x = 3



x – 1, valor crítico x = 1



Por la ley de los signos para producto.



De la expresión original, se infiere que x ≠ 1, ya que cuando x = 1 la fracción se vuelve indeterminada; además, la desigualdad no es estricta, luego la solución puede incluir los extremos, teniendo en cuenta por supuesto la restricción identificada.
Se observa que la fracción debe ser menor o igual que cero, entonces la solución será los intervalos negativos del producto obtenido.

Solución: $(-\infty ,0] \cup (1,3]$

En la medida que se estudien detalladamente los ejemplos modelos y se resuelvan los ejercicios propuestos, se podrá comprender e interiorizar las inecuaciones, así su aplicación en cualquier contexto.

EJERCICIOS

Para los ejercicios propuestos, por favor resolverlos con mucho cuidado y hacer los pasos requeridos en su resolución.

1. $(x+2)(x-1)(4-x)<0$ Rta: $(-2,1)\cup(4,\infty)$

2. $2x^2-2x<12$ Rta: $(-2,3)$

3. $\frac{1}{2}(x-4)>x+8$ Rta: $(-\infty,-20)$

4. $x^3-2x^2-3x\geq 0$ Rta: $[-1,0]\cup[3,\infty)$

5. $x^3>x^2$ Rta: $1<x<\infty$

6. $\frac{x+4}{x-2}\leq 1$ Rta: $-\infty<x<2$

7. $\frac{2x+5}{x+1}>\frac{x+1}{x-1}$ Rta: $(-\infty,-3)\cup(-1,1)\cup(2,\infty)$

8. $\frac{x^2-x}{x^2+2x}\leq 0$ Rta: $(-2,0)\cup(9,1]$

9. $\frac{(x+3)^2(x-4)(x+5)^2}{x^2+x-20}\geq 0$ Rta: $(-\infty,-5)\cup(-5,3]\cup[3,4)\cup(4,\infty)$

PROBLEMAS CON INECUACIONES DE UNA INCÓGNITA:

En la vida diaria se presentan diversos problemas donde el camino adecuado para la resolución son las inecuaciones, una vez estudiados los principios y técnicas de solución de inecuaciones, ahora corresponde darle sentido de aplicabilidad a las mismas.

El primer paso para resolver problemas que involucran inecuaciones, es leer muy bien el problema hasta comprenderlo completamente. En seguida plantear el modelo matemático que expresa con simbología matemática las especificidades del mismo. Para el caso particular de las inecuaciones, es pertinente tener claro algunos términos usados para comparar, como; *A lo más, como mínimo, etc,* que son los que dan las condiciones para plantear las condiciones de comparación.

Para la inmersión en problemas de inecuaciones, por favor leer el problema las veces que sea pertinente hasta que se comprenda completamente, ya que de esta manera, se podrá plantear el modelo adecuado y posteriormente su resolución, lo cual ya sabemos hacer.

Ejemplo 1:

La función utilidad al vender *x* unidades esta dada por el modelo: $P = x^2 + 7x - 120$, ¿cual será el mínimo de unidades vendidas para que se presente ganancia.

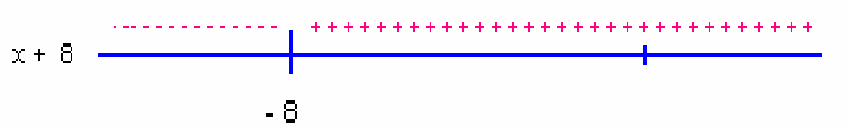
Solución:

Para que no haya perdida ni ganancia, P = 0, luego el mínimo de unidades para que haya ganancia debe ser tal que P > 0.

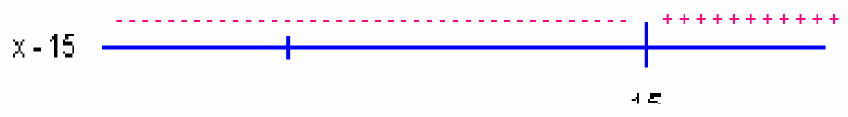
$x^2 + 7x - 120 > 0$ Linealizando: $(x+8)(x-15) > 0$

Recordemos que se puede resolver por los conectivos lógicos o por diagrama de signos. Utilicemos diagrama de signos.

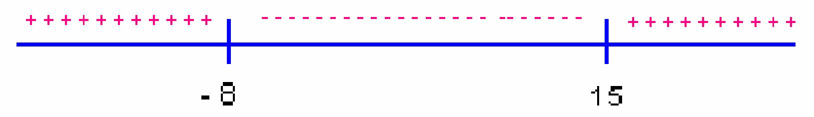
x + 8 = 0, valor crítico x = -8



x – 15 = 0, valor crítico x = 15.



Producto:



La solución: presenta un intervalo negativo y otro positivo, es obvio que por las características del problema, solo se tendrá en cuenta la parte positiva, luego la cantidad mínima para obtener ganancia será de 15 unidades.

Ejemplo 2:

En una clase de Matemáticas un estudiante obtuvo las notas en sus primeras 4 evaluaciones de 60, 80, 78, 82. Faltando el examen. Para obtener una calificación de aprobatoria el promedio de las 5 notas debe ser igual o mayor a 80 y menor que 95. ¿Cuál debe ser la nota mínima en el examen para que el estudiante apruebe el curso?

Solución:

Según las condiciones del problema, el promedio será:

$$\frac{60+80+78+82+x}{5}$$

El promedio debe estar entre 80 y 95.

$$80 \le \frac{60+80+78+82+x}{5} < 95$$

Iniciamos la resolución, eliminando el 5 del denominador de la fracción.

$$80(5) \le \frac{5(60+80+78+82+x)}{5} < (5)95$$

$$400 \le 300 + x < 475$$

Eliminamos 300 que acompaña a la incógnita.

$$400-300 \le 300-300+x < 475-300 \Rightarrow\Rightarrow 100 \le x < 175$$

El estudiante debe obtener mínimo 100 puntos para aprobar el curso.

Ejemplo 3:

En la fabricación de equipos para calentamiento, la renta obtenida por venta de *x* unidades es de 450 *x*. El costo de producción para *x* equipos es 200*x* + 750. ¿Cuántos equipos mínimo se deben fabricar para obtener utilidad?

Solución:

La utilidad se mide así: Ingresos – Egresos > 0. Luego:

$450x - (200x + 750) > 0$. Operando:

$$250x - 750 > 0 \Rightarrow\Rightarrow 250x - 750 + 750 > 750$$

$$250x - 750 + 750 > 750 \Rightarrow\Rightarrow 250x > 750$$

Despejando la incógnita:
x = 750 / 250 = 3.

El mínimo de unidades que se debe fabricar es de 3 equipos para obtener ganancia.

Ejemplo 4:

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 90 m/seg. La distancia y de la pelota al suelo después de de t segundos esta dada por: $y = 80t - 16t^2$ ¿En qué intervalo de tiempo la pelota estará a más de 96 metros de altura?

Solución:

Como $y = 80t - 16t^2$ y además y > 96, entonces: $80t - 16t^2 > 96$

Organizando la expresión para compararla con cero. $80t - 16t^2 - 96 > 0$.

Cambiamos de signo para que la incógnita al cuadrado quede positiva ya sí poder linealizar más fácil. $16t^2 - 80t + 96 < 0$

Ahora dividimos por 16 para que la expresión quede más sencilla.

$\frac{16t^2 - 80t + 96}{16} < \frac{0}{16} \Rightarrow\Rightarrow t^2 - 5t + 6 < 0$. Ahora linealizamos la expresión, utilizando la factorización.

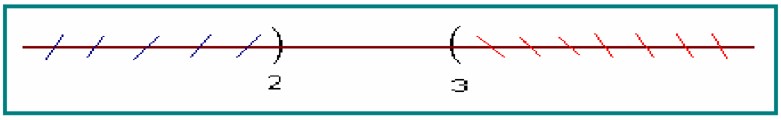
$t^2 - 5t + 6 < 0 \Rightarrow\Rightarrow (t-3)(t-2) < 0$

La resolver la última desigualad, utilicemos los conectivos lógicos. Como la expresión debe ser menor que cero, entonces las dos posibilidades serán:

$$(t - 3 > 0 \ \wedge \ t - 2 < 0) \quad \vee \quad (t - 3 < 0 \ \wedge \ t - 2 > 0)$$

Comencemos con la primera posibilidad.

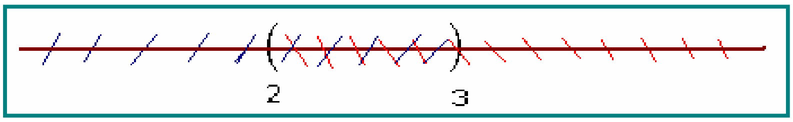
$t - 3 > 0,\ t > 3 \ \wedge \ t - 2 < 0,\ t < 2$



Para este caso NO hay solución, ya que no se presenta elementos comunes entre los dos intervalos, así la solución: (Φ)

Segunda posibilidad:

$t - 3 < 0,\ t < 3 \ \wedge \ t - 2 > 0,\ t > 2$



Para este caso la solución esta en el intervalo (2, 3), que son los elementos comunes a los dos intervalos.

La solución total será la unión de las soluciones obtenidas: (Φ) U (2, 3) = (2, 3).

Volviendo al problema planteado, la pelota estará a más de 96 metros de altura entre los 2 y 3 segundos.

EJERCICIOS

Leer cuidadosamente cada problema, para que sean resueltos adecuadamente.

1. El costo de producción de *x* unidades de un producto esta dado por la expresión: $C = x^2 + 6x$, la utilidad por concepto de ventas esta dada por $U = 2x^2 + x$. ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener utilidad.

Rta: $x > 5$

2. Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba, cuya función altura esta dada por la expresión: $h = -9{,}8t^2 + 147t$, donde h se da en metros y t en segundos. ¿En qué intervalo de tiempo el objeto estará por encima de 592,2 metros?

Rta: $6 < t < 9$

3. Según la Ley de Boyle, para un gas específico a temperatura constante, se tiene la relación: P V = 200. Para P presión en psi y V volumen en plg^3. ¿ En qué intervalo se desplaza la presión, si el volumen se encuentra entre 25 y 50 plg^3?

Rta: $4 \leq P \leq 8$

4. El cuerpo humano tiene una temperatura normal de 37^0C, si una temperatura *x* difiere a la normal al menos en 2^0C, se considera anormal. ¿Cuál será el intervalo de temperatura que se considera anormal?

Rta: $x \leq 35^0C$ y $x > 37^0C$.

5. La función ingreso por venta de un producto esta dado por la expresión $40x - \frac{1}{5}x^3$. El costo de producción de una unidad es de $28. ¿Cuántas unidades se deben vender para que la utilidad sea de $100?

Rta: $10 < x < 50$

PROBLEMAS CON INECUACIONES DE DOS INCÓGNITAS

Para resolver problemas que involucran inecuaciones, se requieren varias situaciones, primero leer muy bien el problema para comprenderlo, luego plantear el modelo matemático a través de una inecuación, en seguida resolver la inecuación planeada, finalmente analizar los resultados para dar las conclusiones al problema dado. En este aspecto, se diría que lo nuevo es el planteamiento del modelo; es decir, la inecuación que explica el fenómeno a analizar, ya que lo demás se conoce.

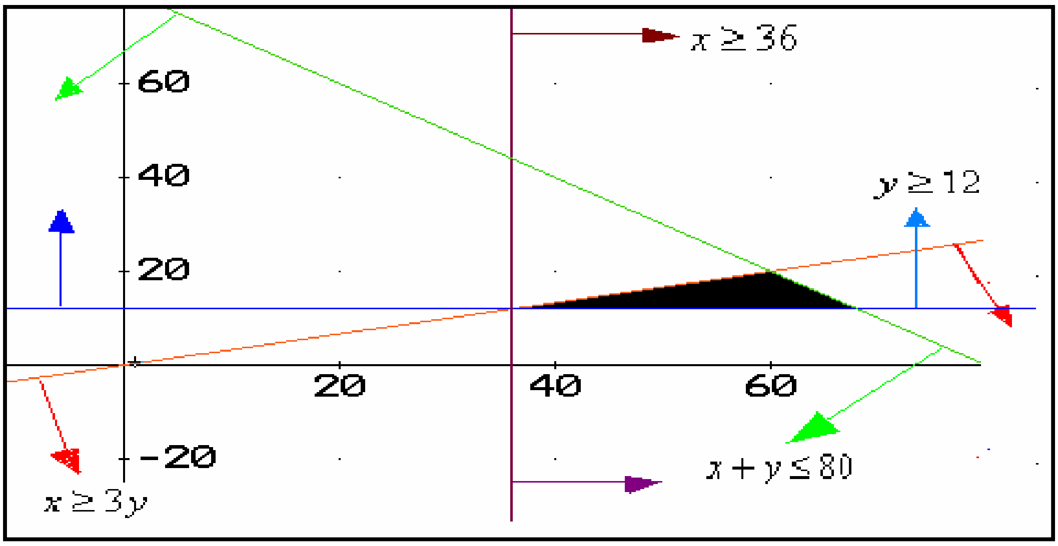
Ejemplo 1:

Un Almacén vende dos clases de artículos tipo A y tipo B, las condiciones del almacén establecen que se debe tener al menos tres veces artículos tipo A que de tipo B; además, se debe tener al menos 12 artículos tipo B, el espacio permite tener máximo 80 artículos exhibidos. Plantear el sistema que describe la situación y describir la región solución del fenómeno.

Solución:

Sea *x* cantidad de artículos tipo A y sea *y* cantidad de artículos tipo B.
$x \geq 3y$: Tres veces artículo tipo A que de B.
$y \geq 12$: Tener al menos 12 artículos tipo B
$x \geq 36$. Tener tres veces artículo tipo A.
$x + y \leq 80$. Capacidad máxima de exhibición.

Planteamos las ecuaciones temporales para graficar.
$x \geq 3y$, entonces: $x - 3y = 0$. Los puntos: (0, 0), (6, 2). Línea roja
$y \geq 12$, entonces: $y = 12$. Es una recta horizontal. Línea azul
$x \geq 36$, entonces: $x = 36$. Es una recta vertical. Línea café
$x + y \leq 80$, entonces: $x + y = 80$. Los puntos: (0, 80), (80, 0) Línea verde.



La parte sombreada será la región de solución del sistema.

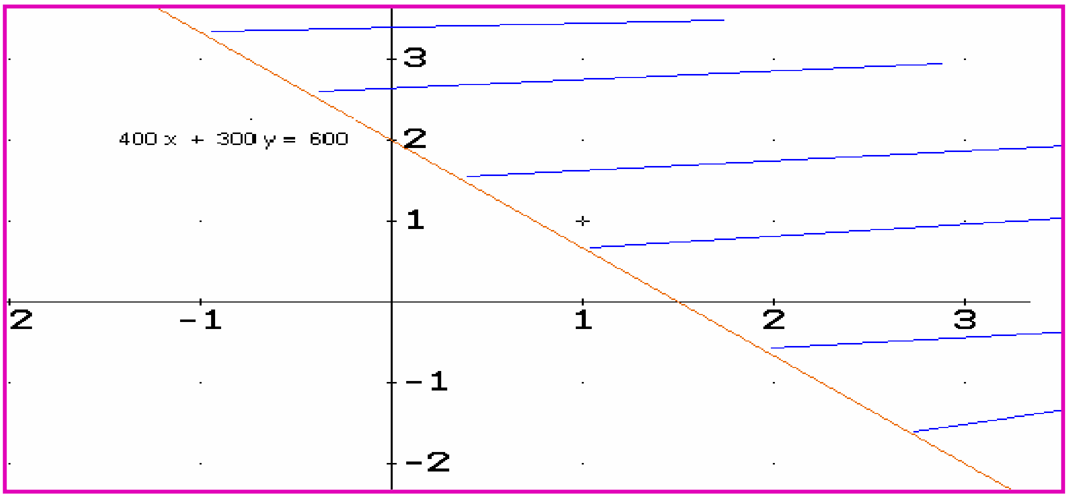
Ejemplo 2:

La compañía π desea comparar cable tipo AA y tipo BB para instalaciones telefónicas, para esto cuenta con un capital que oscila entre 600 y 1.200 millones de pesos. El valor de la unidad de cable tipo AA es de 400 mil y de tipo BB de 300 mil pesos. La compañía requiere al menos 2 veces más de cable tipo BB que de tipo AA. ¿Cuál será la zona de solución del sistema e identificar al menos dos posibilidades de compra?

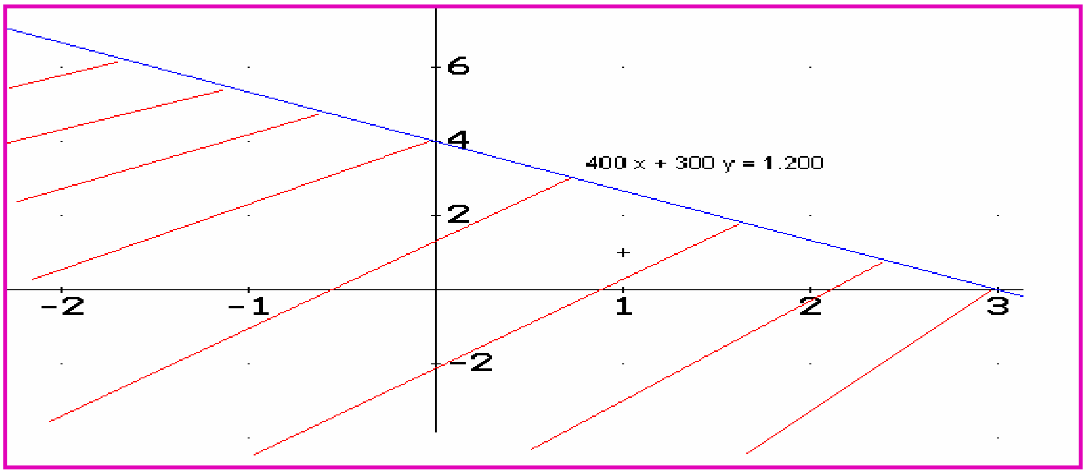
Solución:

Sea x cable tipo AA
Sea y cable tipo BB
Según el problema:
a) 400 x + 300 y ≥ 600 Valor mínimo de compra
b) 400 x + 300 y ≤ 1.200 Valor máximo de compra
c) y ≥ 2 x. Requerimientos de cable.

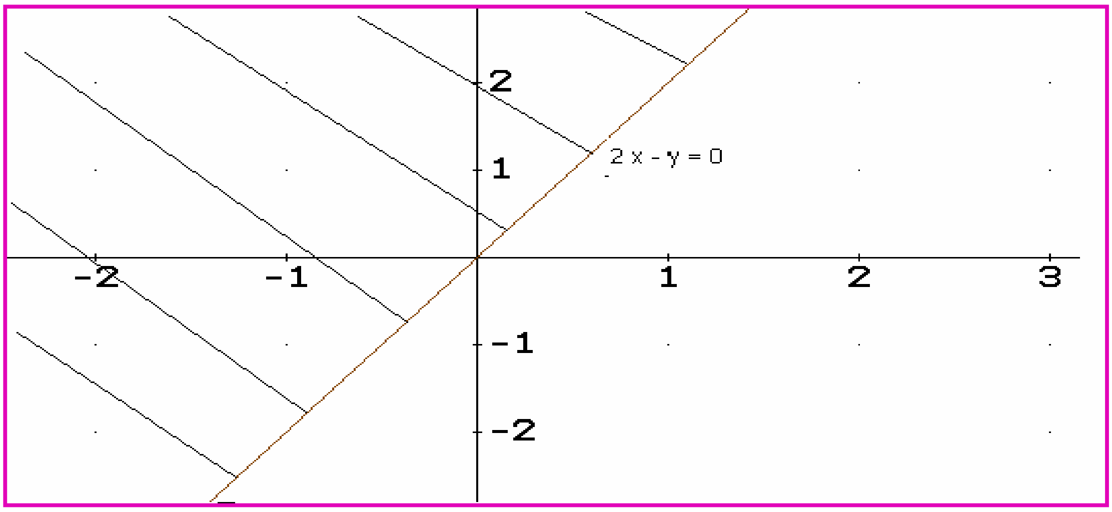
Solución para el caso a:



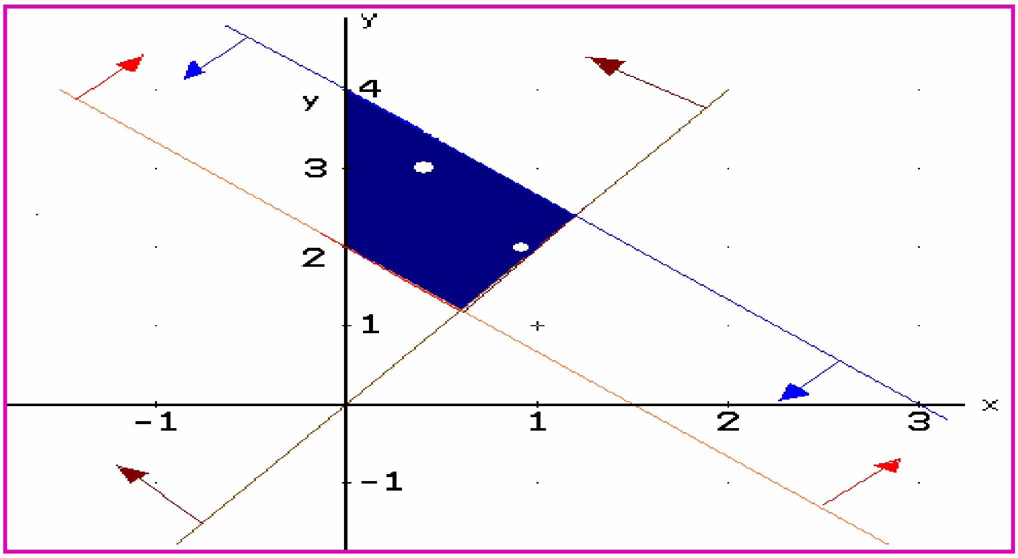
Solución para el caso b:



Solución para el caso c:



La solución al problema será la intersección de las soluciones obtenidas, mostrada en la zona sombreada.



Dos posibles soluciones:
Punto: (1, 2) puede ser una solución.
Punto: (1/2, 3) también puede ser solución.

EJERCICIOS

Resolver los siguientes sistemas gráficamente.

1. $3x + y < 3$ y $4 - y < 2x$

2. $y - x < 0$ y $2x + 5y < 10$

3. $x \geq 1$, $y \geq 2$, $x + 3y \leq 19$, $3x + 2y \leq 22$

Leer cuidadosamente los siguientes problemas, plantear el sistema y resolverlo gráficamente.

4. Un negociante de finca raíz vende casas y apartamentos, por la demanda se debe tener al menos tres veces más casas que apartamentos. Se debe tener disponible al menos 6 casas y 2 apartamentos para su ocupación. Las casas cuestan 30 millones y los apartamentos 20 millones. El comerciante desea mantener sus costos de inventario en 600 millones o menos. Elaborar un sistema que explique el fenómeno y hallar la región solución.

5. Una refinería de petróleo puede producir hasta 5.000 barriles por día, el petróleo es de tipo A y B, del tipo A se deben producir por día al menos 1.000 y a lo más 3.500 barriles. Si hay una utilidad de 7 dólares para tipo A y 3 dólares para tipo B ¿Cuál será la utilidad máxima por día.

Rta: Tipo A 3.500 y tipo B 1.500

6. La empresa Sport fabrica dos tipos de balones para fútbol, el modelo pie duro da una utilidad de 20 mil pesos y el modelo pie blando de 13.00 pesos. Para satisfacer la demanda la empresa debe producir diariamente del modelo pie duro entre 20 y 100 inclusive, mientras que del modelo pie blando entre 10 y 70 inclusive. Por las condiciones de la fábrica el total de producción diaria debe ser máxima de 150 unidades. ¿Cuántos balones de cada tipo se deben fabricar en un día para obtener máxima utilidad?

Rta: 100 balones pie duro y 50 pie blando.

ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO $\boxed{|a| = a}$

El valor absoluto como todos sabemos, es una figura matemática creada para relacionar un valor con una distancia. Aunque en los cursos básicos de matemáticas se analiza este concepto, es pertinente aclarar algunos aspectos al respecto.

Valor Absoluto:

Sea x un número real cualquiera, el valor absoluto simbolizado $|x|$ se defina así:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

La definición es explicita y nos indica que el valor absoluto de un número positivo es positivo, pero si el número es negativo, su valor absoluto es negativo. Como consecuencia de esto, el valor absoluto de cualquier número siempre será positivo, excepto cero.

Algunas propiedades que son importantes en valor absoluto:

1. $|x * y| = |x| * |y|$

2. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

3. $|x^n| = |x|^n$

Ejemplo:

Hallar el valor absoluto de las siguientes cantidades.

$|10|$

$|-5|$

$|e - \pi|$

$|2 - \pi|$

Solución:

Para el primer caso, el valor es positivo, luego su valor absoluto será positivo.
Para el segundo caso, el valor es negativo, luego su valor absoluto será negativo.
Para el tercer caso, como *e* es menor que π la cantidad será negativa, luego su valor absoluto será negativo.
Para el último término, dos es menor que π así la cantidad será negativa, entonces su valor absoluto será negativo. Veamos:

$$|10| = 10$$

$$|-5| = -(-5) = 5$$

$$|e - \pi| = -(e - \pi) = \pi - e$$

$$|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:

$$\boxed{|ax + b| = 0}$$

Conocidos los principios sobre ecuaciones y sobre valor absoluto, ahora se hará una combinación de los dos términos para analizar ecuaciones con valor absoluto.

Sea $|x| = a$ Entonces x = a ,v, x = - a. Para todo x $\neq$ 0.

Con este principio se pueden resolver ecuaciones con valor absoluto.

Ejemplo 1:

Hallar la solución de la siguiente ecuación:

$$|x - 3| = 8$$

Solución:

Por la definición:

x – 3 = 8, entonces: x = 8 + 3 = 11

x – 3 = -8, entonces: x = -8 + 3 = -5
La solución será: -5 y 11.

La comprobación puede verificar la solución, hagámoslo con -5.

$$|-5-3| = |-8| = -(-8) = 8$$

Ejemplo 2:

Resolver: $\left|\frac{2x-8}{4}\right| = 12$

Solución:

Aplicamos la definición:

$$\frac{2x-8}{4} = 12 \quad v \quad \frac{2x-8}{4} = -12$$

Resolviendo:

$$2x-8=48 \quad v \quad 2x-8=-48$$

Despejando la incógnita.

$$2x=48+8 \quad v \quad 2x=-48+8$$

$$x=\frac{56}{2}=28 \quad v \quad x=\frac{-40}{2}=-20$$

La solución es -20 y 28. *Por favor verificar las soluciones obtenidas.*

En los ejemplos analizados se observa que se obtienen dos soluciones, situación que ocurre con las ecuaciones de primer grado con valor absoluto.

Ejemplo 3:

Hallar la solución para la ecuación dada a continuación.

$$|x^2-8x-18| = 2$$

Solución:

Siguiendo el mismo camino que se ha utilizado:

a) $x^2-8x-18=2 \Rightarrow\Rightarrow x^2-8x-20=0$ Factorizamos:
$x^2-8x-20=(x-10)(x+2)=0$. Por la regla del producto nulo: x = 10 y x = -2

b) $x^2-8x-18=-2 \Rightarrow\Rightarrow x^2-8x-16=0$. Esta ecuación la resolvemos por la cuadrática:

$$x^2 - 8x - 16 \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{64+64}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+64}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64*2}}{2} = \frac{8 \pm 8\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 4\sqrt{2}$$

Solución: $4 + 4\sqrt{2}$ y $4 - 4\sqrt{2}$

La solución total será: $10, \quad -2, \quad 4+4\sqrt{2}, \quad 4-4\sqrt{2}$

Ejemplo 4:

Resolver: $\left|x^2 - 4\right| = 3x$

Solución:

a) $x^2 - 4 = 3x \Rightarrow\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1) = 0$

Por la regla del producto nulo: x = 4 y x = -1

b) $x^2 - 4 = -3x \Rightarrow\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1) = 0$

Por la regla del producto nulo: x = -4 y x = 1.

Los valores negativos NO satisfacen la ecuación, luego la solución es: 1 y 4.

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:

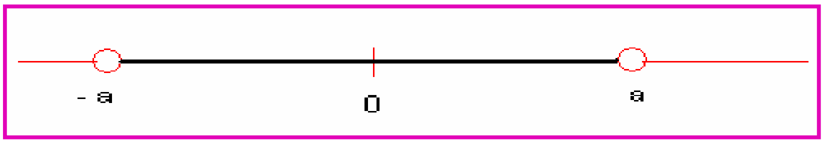
$$\boxed{|ax + b| < 0}$$

En la naturaleza existen muchos fenómenos que suceden bajo ciertos límites o mejor en un intervalo determinado. Las inecuaciones con valor absoluto son un dispositivo matemático que permiten resolver problemas de fenómenos que presentan dichas restricciones.

La resolución de inecuaciones con valor absoluto parte de las siguientes definiciones:

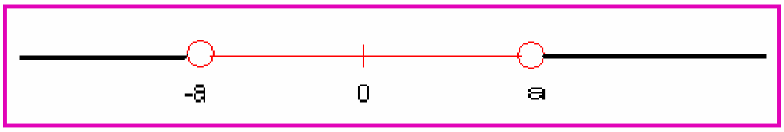
Primera definición:

Sea $|x| < a$ Entonces: $-a < x < a$

Veámoslo gráficamente: 

Segunda Definición:

Sea $|x| > a$ Entonces: $x < -a$ ó $x > a$

Veámoslo gráficamente: 

Las definiciones de dieron para desigualdades estrictas, pero aplica también para las no estrictas, en la gráfica, los extremos serán cerrados, ya que los incluye.

Ejemplo 1:

Resolver: $|x| < 8$

Solución:

Por la primera definición.

$$|x| < 8 \Rightarrow\Rightarrow \; -8 < x < 8$$

Lo anterior significa que cualquier valor entre -8 y 8 satisface la desigualdad.

Veamos un caso: - 5, $|-5| = -(-5) = 5$ obviamente 5 es menor que 8.

Ejemplo 2:

Hallar el conjunto solución para la siguiente expresión:

$$|x| > 6$$

Solución:

Por la segunda definición.

$$|x| > 6 \Rightarrow\Rightarrow x < -6 \quad v \quad x > 6$$

La solución será: (-∞, -6) U (6, ∞)

Ejemplo 3:

Hallar la solución de la expresión:

$$|2x - 6| \leq 4$$

Solución:

Por la definición uno.

$$|2x - 6| \leq 4 \Rightarrow\Rightarrow -4 \leq 2x - 6 \leq 4$$

Desarrollemos el procedimiento para desigualdades compuestas.

$$-4 \leq 2x - 6 \leq 4 \Rightarrow\Rightarrow -4 + 6 \leq 2x - 6 + 6 \leq 4 + 6 \Rightarrow\Rightarrow 2 \leq 2x \leq 10$$

$$2 \leq 2x \leq 10 \Rightarrow\Rightarrow \frac{2}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{10}{2} \Rightarrow\Rightarrow 1 \leq x \leq 5$$

La solución será el intervalo [1, 5]. Notemos que es cerrado ya que la solución incluye los extremos.

Ejemplo 4:

Mostrar que la solución de la expresión: $\left|\frac{x}{x-4}\right| \geq 2$ es [8/3, 4) U (4, 8]

Solución: Resolverlo con el grupo colaborativo y cualquier duda consultar al tutor.

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

1. $|2x+3| = 5$ — Rta: x = - 4 y x = 1

2. $|1-4y| = 5$ — Rta: y = - 1 y y = 3/2

3. $\left|\frac{x}{3}+\frac{2}{5}\right| = 2$ — Rta: x = -36 / 5 y x = 24 / 5

4. $|x+3| = |2x-1|$ — Rta: x = 4 y x = -2 / 3

5. $|q| - q = 1$ — Rta: q = -1 / 2

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

6. $|z| < 7$ — Rta: -7 < z < 7 (-7, 7)

7. $\left|\frac{y+7}{3}\right| > 3$ — Rta: (-∞, -16) U (2, ∞)

8. $|2w - 7| \leq 0$ — Rta: w = 7 / 2

9. $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| > 2$ — Rta: - 4 < x < - 1 (-4, -1)

10. $\left|\frac{1}{2}x - 3\right| < \frac{1}{10}$ — Rta: 29 / 5 < x < 31 / 5 (29/5, 31/5)

11. El peso en gramos de llenado de un recipiente que contiene granos, debe cumplir con la siguiente condición $\left|\frac{P-16}{0{,}05}\right| \leq 1$ donde P es el peso. Se toma un tarro y al pesarlo éste fue de 17 gramos. El tarro cumple con las especificaciones de peso.

Rta: NO, esta fuera del rango.

BIBLIOGRAFÍA

BARNET, Raymond. Álgebra y trigonometría. Mc Graw Hill, México, 1.978

______ Precalculo, FUNCIONES Y Gráficas, Mc Graw Hill, México, 1.999

LEITHOLD, Louis. Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica. Oxford, México, 1.992

LOVAGLIA, Florence, Álgebra, Reverte, 1.972

STANLEY Smith. Álgebra y Trigonometría. Editorial Iberoamericana, USA 1997

KEDDY, BITTINGER, Álgebra y Trigonometría, Fondo Educativo Interamericano, .978

SWOKOSKI, Earl, Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamericano, 1.981

ALLENDOELFER, Oakley, Fundamentos de Matemáticas Universitarias. Mc Graw Hill, México, 1.982

MUNEM y YIZZE, Precalculus, Reverte, 1.980

HENGEN, Henry. Fundamental Mathematical Structures, Scott Foresman and Company. 1.966

TAYLOR, Wade. Matemáticas Básicas. Limusa, 1.981

SULLIVAN, Michael, Precálculo, Pearson Education. México, 1997

GUSTAFSON, David. Álgebra Intermedia, Thomson Learning. México, 1997

STEWART; Janes, REDLIN Lothar, WATSON, Saleem. Precálculo, International Thomson Editores, 3° Edición, México, 2001

SWOKOSWKI, Earl y COLE, Jeffery. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Thomson Learning, 10° Edición, Bogotá Colombia, 2002

JOHNSON, Murphu y STEFFENSEN, Arnold, Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones. Trillas, México D. F. 1.994

ZILL, Dennis y DEWAR, Jacqueline. Álgebra y Trigonometría, 2° Edición, Mc Graw Hill, Bogotá Colombia, 2. 000