MODULO

ÁLGEBRA LINEAL

CAMILO ZÍÑIGA

A mi padre, JUAN ARTURO ZÚÑIGA R., quien fue el primero en enseñarme el hermoso mundo de la matemáticas, y quien me ha apoyado incondicionalmente en todas mis empresas.

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA – UNAD –
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, TECNOLOGÍA E INGENIERÍA
UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS
Bogotá D. C., 2008

MÓDULO
CURSO ÁLGEBRA LINEAL
PRIMERA EDICIÓN

ISBN

2008
Bogotá, Colombia

PROLOGO

El siguiente texto esta pensado inicialmente como una guía indispensable para los estudiantes de Ingeniería y Administración de Empresas de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia "UNAD", y en general para todos aquellos interesados en conocer aspectos fundamentales que involucren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, trabajo con matrices, determinantes, rectas, planos y vectores.

Dado que la metodología a distancia exige trabajo independiente por parte del estudiante, el presente texto trata de ser lo mas claro posible, de tal forma que el estudiante pueda encontrar respuesta a todas aquellas inquietudes que se van presentando a medida que van apareciendo las definiciones y teoremas (indispensables, por cierto) en los que se sustenta el curso de algebra lineal.

La presentación de los contenidos es un poco novedosa, ya que, el primer capitulo trata de vectores (en R^2 y R^3), posteriormente, y empleando como base algunos conceptos del capitulo de vectores, se inicia el trabajo con matrices. En este capitulo, se pretende agotar todo lo relacionado con matrices: formas escalonadas, operaciones elementales, reducción, matrices elementales, inversas, factorización y finalmente determinantes.

La Unidad dos, inicia el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Capitulo que resulta más sencillo, ya que, toda la teoría de matrices ya esta dada. Posteriormente, se tratan los temas de ecuaciones de la recta en R^3 y ecuación de planos. La ultima parte del capitulo es una breve introducción al concepto de Espacio Vectorial.

Espero que el texto se convierta en una referencia necesaria para el estudio autónomo, de tal forma que esta que es la primera versión constituya la base para versiones posteriores que corrijan los posibles errores que esta contenga.

CAMILO ARTURO ZUÑIGA G.

AL ESTUDIANTE

El propósito del curso es que el estudiante apropie de manera significativa los elementos teóricos fundamentales de Algebra Lineal y desarrolle las competencias pertinentes para contextualizarlos en su campo de formación disciplinar.

El Algebra Lineal es un área de las matemáticas que en las últimas décadas ha tenido un significativo desarrollo con el aporte de las ciencias computacionales. Su aplicabilidad en diversos campos del saber ha generado la necesidad de articularla al proceso formativo del profesional de hoy en día como herramienta de apoyo para resolver problemas en las más diversas disciplinas. En este sentido y por su carácter mismo, el curso hace aportes significativos al desarrollo de las competencias y aptitud matemática en el estudiante, en tanto potencia habilidades de pensamiento de orden superior, como la abstracción, el análisis, la síntesis, la inducción, la deducción, etc.

El curso académico se estructura básicamente en dos unidades didácticas. La primera contempla los Vectores, Matrices y Determinantes, la segunda Sistemas de Ecuaciones Lineales, Rectas, Planos e Introducción a los Espacios Vectoriales.

A través del curso académico de Algebra Lineal se dinamizan procesos de resignificación cognitiva y fortalecimiento del desarrollo de operaciones meta cognitivas mediante la articulación de los fundamentos teóricos a la identificación de núcleos problémicos en los diferentes campos de formación disciplinar.

Es importante que desde ahora el estudiante se compenetre con la dinámica del uso de los recursos informáticos y telemáticos como herramientas de apoyo a los procesos de aprendizaje. En este sentido, el curso académico de Algebra Lineal articulará a su desarrollo actividades mediadas por estas tecnologías, como búsquedas de información en la Web, interactividades sincrónicas o asincrónicas para orientar acciones de acompañamiento individual o de pequeño grupo colaborativo y acceso a información disponible en la plataforma virtual de la universidad.

La consulta permanente a diferentes fuentes documentales aportadas por el curso se tomará como estrategia pedagógica que apunte al fortalecimiento del espíritu investigativo. En este sentido, se espera que el estudiante amplíe la gama de opciones documentales que aportan a la resignificación cognitiva. Estas fuentes documentales son obviamente de diferentes orígenes, a las cuales se tendrá acceso a través de: material impreso, bibliotecas virtuales, hemerotecas, sitios Web, etc.

TABLA DE CONTENIDO

UNIDAD I

UNIDAD II

UNIDAD 1

VECTORES, MATRICES Y DETERMINANTES

OBJETIVO GENERAL

Que el estudiante comprenda el conjunto de conocimientos relacionados con los fundamentos básicos que constituyen el campo teórico y aplicativo de los vectores, matrices y determinantes a través del estudio y análisis de fuentes documentales y situaciones particulares en diferentes campos del saber.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Evidenciar en el estudiante una apropiación conceptual que refleje el entendimiento de nociones como la de vector, complementado con un manejo pertinente de las operaciones con los mismos.

- Lograr que el estudiante conozca de cerca el concepto de matriz, lo lleve a espacios mas generales y reconozca su importancia en aplicaciones mas especificas. Además, debe entender y manejar con propiedad las distintas operaciones que con ellas puede realizar y que le permitirán utilizar herramientas como el determinante y el proceso de obtener la inversa de matrices para resolver a futuro sistemas lineales.

1. VECTORES EN R^2

Antes de iniciar resulta conveniente el recordar un producto especial, al que en su momento (cuando se trabajo con conjuntos) se denomino producto cartesiano.

Sean A y B dos conjuntos, entonces entre ellos podemos definir y realizar varias operaciones (Unión, Intersección, Diferencia, etc.), sin embargo, existe una cuyos elementos son parejas ordenadas. Y a partir de este conjunto especial, incorporaremos el primer peldaño para hablar de vectores.

Se define, pues, el producto cartesiano como:

$$A \times B = \left\{ (x, y) / \ x \in A \quad y \quad y \in B \right\}$$

Es conveniente notar que son todas las parejas ordenadas con primer componente en el conjunto A y segunda componente en B. Así, si consideramos los conjuntos

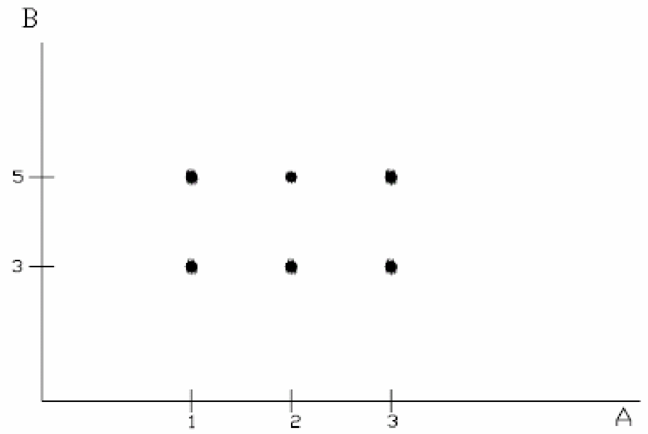
$A = \{1,2,3\}$

$B = \{3,5\}$

Entonces, $A \times B = \{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,3),(3,5)\}$

Recordemos que a partir de la definición de pareja ordenada ($(a,b) = \{a,\{b\}\}$) se tiene que $(a,b) \neq (b,a)$

Una de las muchas formas de representar el producto cartesiano, consiste en dibujar dos ejes perpendiculares (existe un ángulo recto entre ellos), de tal forma que en el eje horizontal (en este caso A), se encuentran los elementos del mismo, y en el eje vertical los elementos de B.



Ahora, si pensamos que el conjunto A y B, son conjuntos numéricos cuyos elementos son números reales, y además hacemos la siguiente asignación:

$A = X$, $\quad B = Y$

Entonces al realizar el producto cartesiano, nos encontramos con el plano R^2, cuyos elementos son de la forma (x, y). De aquí el producto

$$X \times Y = \left\{ (x, y) / x \in X \quad y \quad y \in Y \right\} = R^2$$

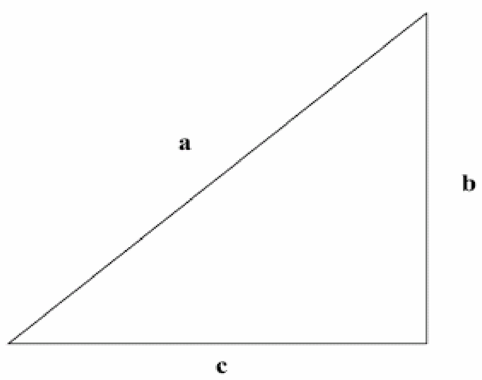
Por lo tanto cuando pensamos en R^2, estamos considerando puntos (parejas), con elementos en R, y tal que $(x, y) \neq (y, x)$

1.1 NOCION DE DISTANCIA

Ahora abordemos el problema de dos puntos del plano. Nuestro interés es encontrar la distancia entre ellos.
Para esto podemos recurrir a un teorema de la geometría elemental, llamado Teorema de Pitágoras, que nos establece que:

$a^2 = b^2 + c^2$

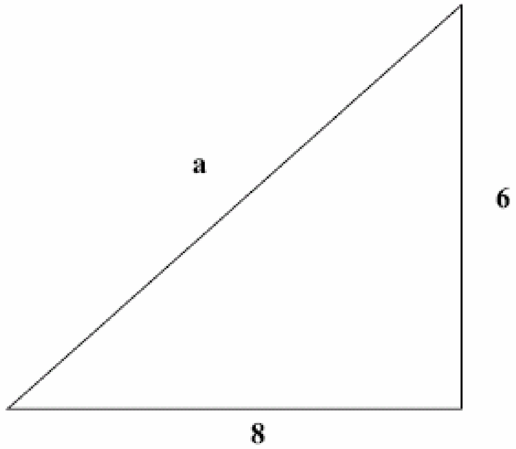
Donde el triangulo en consideración es rectángulo, con a como hipotenusa, b y c los catetos.



Naturalmente, $a, b, c \in R$

Ejemplo:

Considere el triangulo rectángulo, cuyos lados son los que se muestran. ¿Cual es el valor de la hipotenusa?

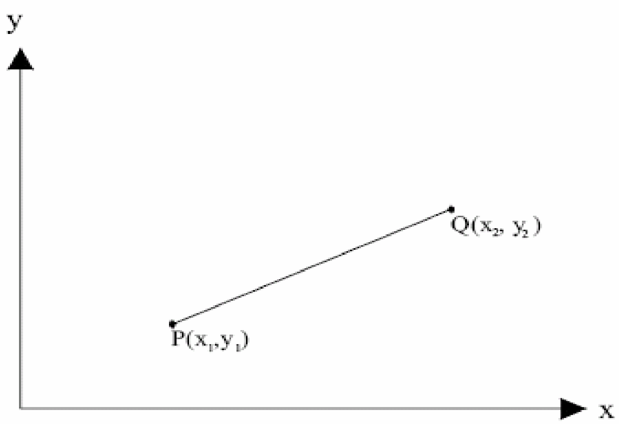


$$a^2 = 6^2 + 8^2$$
$$a^2 = 100$$
$$a = \pm\sqrt{100}$$

Dado que a es una distancia, entonces consideramos únicamente los valores positivos, es decir, $a = 10$ unidades.

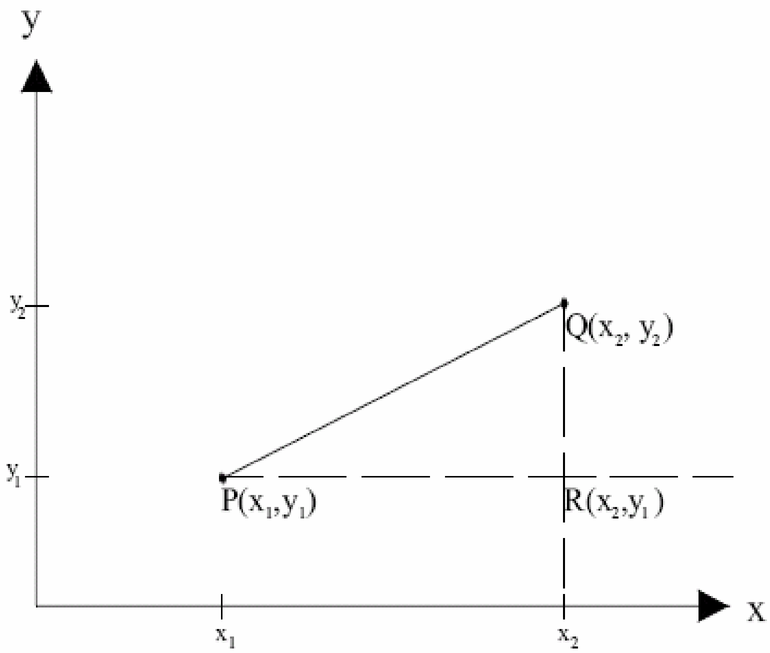
Pensemos ahora en dos puntos cualesquiera del plano.

Llamémoslos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$. Nuestro interés es encontrar la distancia entre ellos.



Para poder emplear el teorema de Pitágoras, debemos hacer una construcción geométrica que nos permita obtener un triangulo rectángulo. El procedimiento es el siguiente:

- Trace una paralela al eje y, que pase por el punto Q.
- Trace una paralela al eje x, que pase por el punto P.
- Al punto de intersección de las anteriores paralelas, llámelo R.



Si consideramos el triangulo PQR, este es rectángulo, por lo tanto del Teorema de Pitágoras

$$[d(P,Q)]^2 = [d(P,R)]^2 + [d(R,Q)]^2 \qquad (1)$$

Ahora, las coordenadas de R son (x_2, y_1), por lo tanto

$$d(P,R) = (x_2 - x_1)$$

$$d(R,Q) = (y_2 - y_1)$$

Sustituyendo estos valores en (1)

$$[d(P,Q)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Tomando raíz cuadrada a ambos lados:

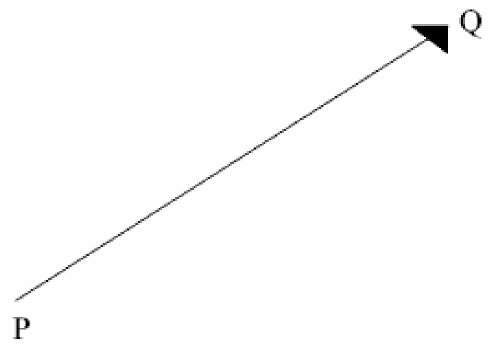
$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2)$$

La anterior relación nos permite, dados dos puntos del plano, encontrar la distancia entre ellos teniendo como referente tan solo sus coordenadas.

1.2. SEGMENTOS DIRIGIDOS

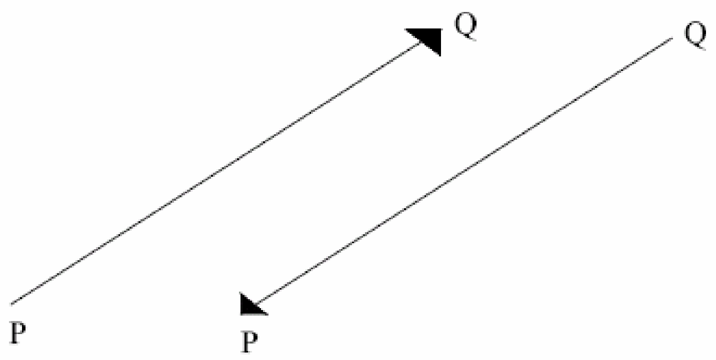
Consideremos nuevamente los puntos P y Q. Pensemos en que nos movemos de P hacia Q, a través de la trayectoria descrita en la figura 1. Esta acción de "trasladarse" de P a Q, lo representaremos por $\overrightarrow{PQ}$, donde se lee " el segmento que va de P a Q".

Representemos ese traslado por una flecha, en donde la parte inicial de la misma esta en P, y la parte final en Q, de aquí tenemos



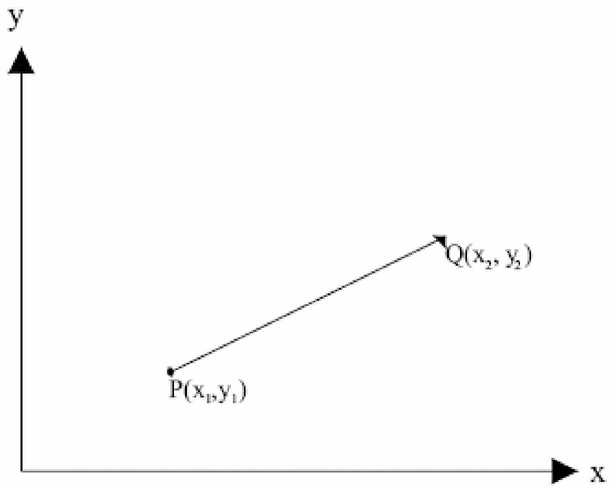
A partir de estas definiciones elementales, vemos que $\overrightarrow{QP} \neq \overrightarrow{PQ}$, sin embargo la distancia es la misma .

Al segmento $\overrightarrow{PQ}$ lo llamamos segmento dirigido, y es diferente al segmento $\overrightarrow{QP}$, ya que tienen direcciones opuestas.



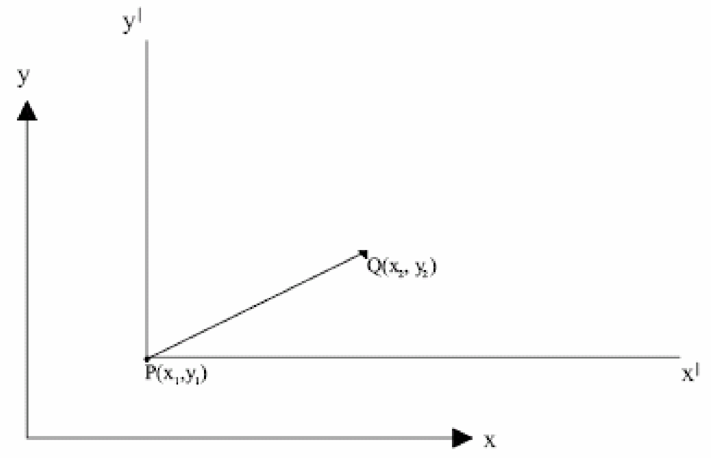
Definición 1: Dos segmentos de recta se dicen equivalentes, si tienen la misma longitud (magnitud) y dirección. [1]

Consideremos los puntos $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$, y mas aun, el segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$, como lo muestra la figura

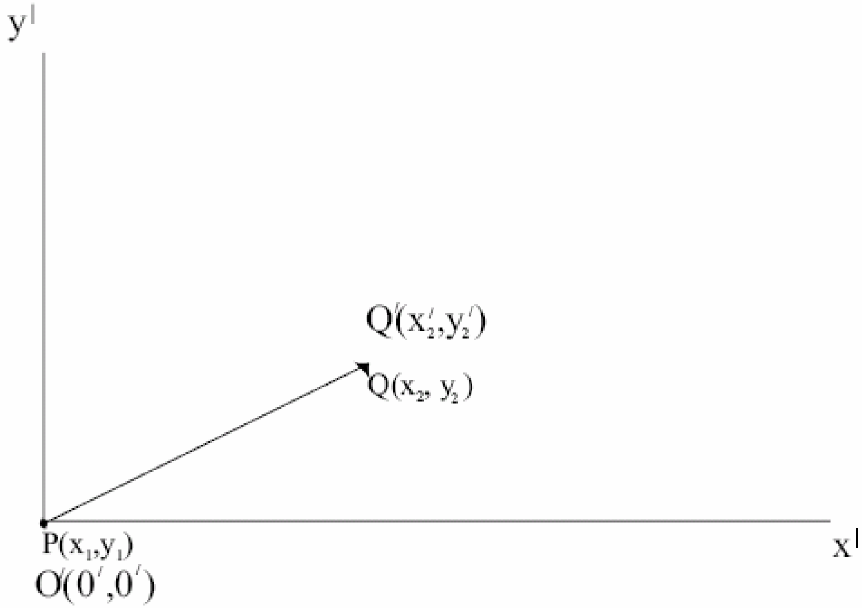


La distancia entre P y Q, es $d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Pensemos, ahora en otro par de ejes perpendiculares entre si (digamos $x' y'$) con su origen en el punto P, así:



Si nos olvidamos por un momento de los ejes xy y tenemos claro que el origen de nuestros nuevos ejes coinciden con el punto P, entonces el punto Q ya no tiene las mismas coordenadas que antes, por lo que las coordenadas de Q referidas a los nuevos ejes $x^{/}y^{/}$ las llamaremos $Q^{/}=\left(x_2^{/},y_2^{/}\right)$



Para encontrar la longitud del segmento dirigido en término de los nuevos ejes debemos hacer la siguiente asignación:

$P^{/}=(0^{/},0^{/})$ y $Q^{/}=\left(x_2^{/},y_2^{/}\right)$

por lo que la distancia entre $P^{/}$ y $Q^{/}$ será

$$d(P^{/},Q^{/})=\sqrt{\left(x_2^{/}-0^{/}\right)^2+\left(y_2^{/}-0^{/}\right)^2}=\sqrt{\left(x_2^{/}\right)^2+\left(y_2^{/}\right)^2} \qquad (3)$$

Finalmente, veamos que relación existe entre los ejes xy y $x^{/}y^{/}$

Note que el punto $Q^{/}=(x_2^{/},y_2^{/})$ en los ejes $x^{/}y^{/}$ es el mismo punto $Q=(x_2,y_2)$ en los ejes xy; por lo tanto

$$x_2=x_1+x_2^{/} \qquad (4)$$

$$y_2=y_1+y_1^{/} \qquad (5)$$

De este último par de relaciones, vemos que si deseamos expresar la relación (3) en términos de los ejes xy, debemos despejar las variables "primas" de (4) y (5), es decir:

$x_2' = x_2 - x_1$ (6)

$y_2' = y_2 - y_1$ (7)

al sustituir en (3) nos queda,

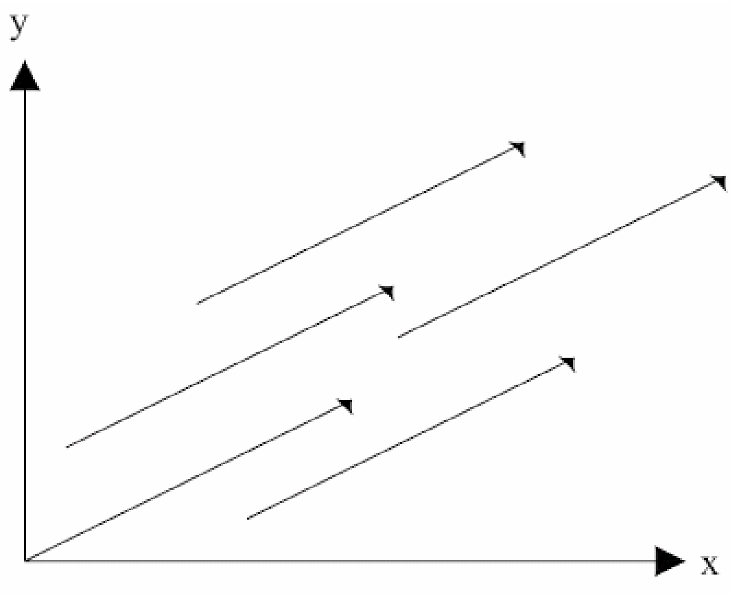
$$d(P',Q') = \sqrt{(x_2')^2 + (y_2')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(P,Q)$$

Por lo tanto, como era de esperar, las distancias medidas en cualquier par de ejes perpendiculares a los ejes originales xy, es la misma. Sin embargo, analicemos un momento la ecuación (3). Note que nuestro segmento dirigido tiene su punto inicial en el origen (de $x'y'$), es decir en $P' = (0',0')$ y su punto final en $Q' = (x_2', y_2')$, y de esto el calculo de la distancia (longitud) del segmento es inmediata, es simplemente

$d(P',Q') = \sqrt{(x_2')^2 + (y_2')^2}$, que es un cálculo sencillo.

Por otro lado, el segmento $\overrightarrow{PQ}$ tiene el mismo sentido que el segmento dirigido $\overrightarrow{P'Q'}$, y dado que tienen la misma longitud, de la definición 1 se tiene que estos dos segmentos son equivalentes.

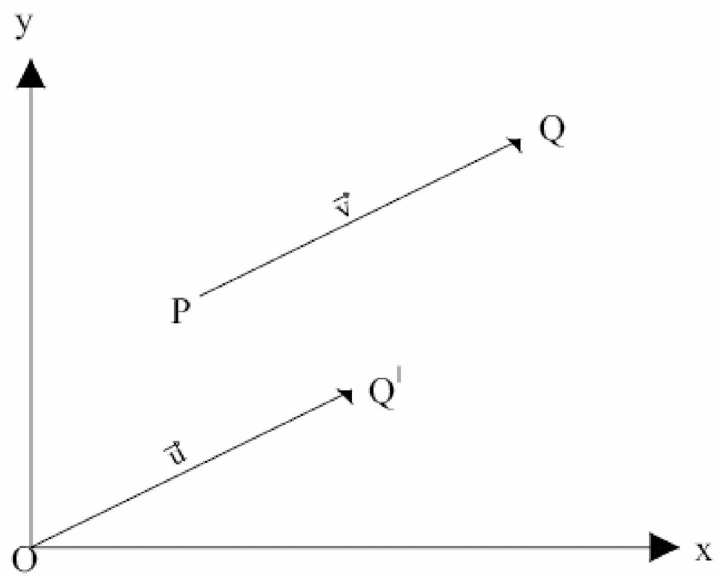
De esto podemos concluir, que un segmento dirigido con punto inicial en (0,0) es equivalente a otro con punto inicial en (x_1, y_1), y que conserven el mismo sentido y magnitud. ¿ y cuantos de estos hay? , tantos como elementos de $R^2 = X \times Y$, es decir, todos los segmentos dirigidos paralelos al segmento con punto inicial en (0,0), con el mismo sentido y magnitud.



<u>Definición 2</u>:

Al segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$, lo denominamos vector, llamémoslo pues $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Note, que a partir de lo comentado anteriormente $\vec{v}$ es equivalente a un vector cuyo punto inicial se encuentra en el origen, llamemos a este vector $\vec{u} = \overrightarrow{OQ'}$, donde $O = (0,0)$



Si las coordenadas de Q' son (a,b), entonces el vector $\vec{u} = \overrightarrow{OQ'}$, tiene las siguientes características:

1. Su longitud es igual a la del vector $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ (y no solo a el, sino además a toda unas familia de vectores paralelos a $\vec{v}$)

   $d(O, Q^{/}) = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

   al ser $\vec{u}$ y $\vec{v}$ equivalentes, se tiene:

   $\sqrt{a^2 + b^2} \equiv \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Note que en el caso de $\vec{v}$ tanto P como Q tienen coordenadas diferentes de cero.

2. La dirección es la misma que la del vector $\vec{v}$ (y no solo a el, sino además a toda una familia de vectores paralelos a $\vec{v}$)

Por lo anterior, se prefiere trabajar con el vector $\vec{u}$ en lugar del vector $\vec{v}$.

1.3 DEFINICION ALGEBRAICA DE VECTOR

Un vector $\vec{u}$ en el plano xy, corresponde a una pareja ordenada de la forma (a,b). De aquí $\vec{u} = (a,b)$.

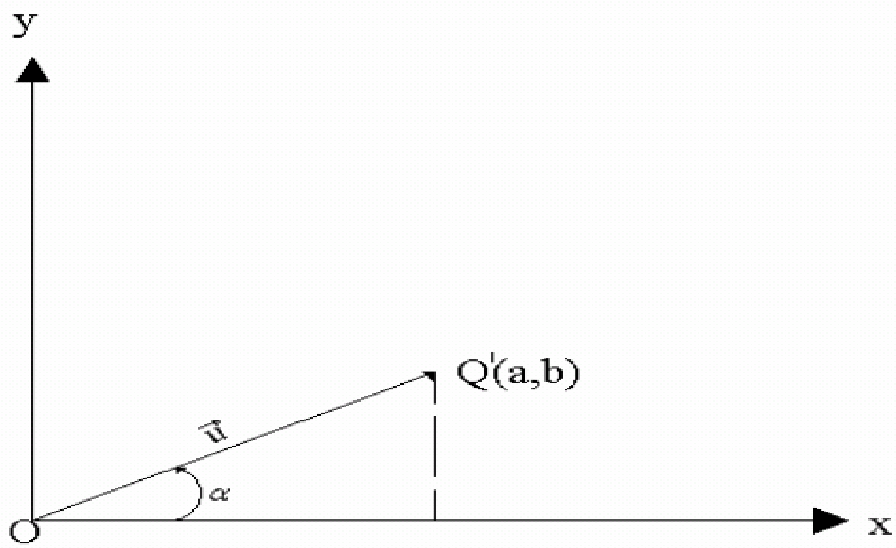
Lo anterior se desprende del hecho de considerar el segmento $\overrightarrow{OQ^{/}} = \vec{u}$, donde $O = (0,0)$ y $Q^{/} = (a,b)$

La magnitud (longitud) de un vector $\vec{u}$ es la longitud de él o de cualquiera de sus vectores equivalentes. Igual ocurre con la dirección de $\vec{u}$.

A partir de la definición algebraica de vector, $\vec{u} = (a,b)$, se tiene que:

$d(O, Q^{/}) = |u| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Donde la notación $|u|$ denota la magnitud de $\vec{u}$.



La dirección del vector $\vec{u} = (a,b)$, es el ángulo α que forma $\vec{u}$ con el eje x positivo.

Este α se acostumbra expresarlo en radianes, y además, como un ángulo de la primera rotación, es decir, $0 \le \alpha < 2\pi$

Ejemplo

Dados los vectores $\vec{u}_1 = (1,3)$, $\vec{u}_2 = (2,4)$, $\vec{u}_3 = (-2,-3)$; halle

a) Magnitud de cada uno

b) Dirección

Solución

$$|u_1| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$

Para hallar la dirección, debemos encontrar α. De la trigonometría tenemos que:

$Tan\alpha = \frac{b}{a}$, siempre que $a \neq 0$

Por lo tanto

$$\alpha = Tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Aplicando esto ultimo, vemos que $\alpha_1 = Tan^{-1}\left(\frac{3}{1}\right) = Tan^{-1}(3)$

$\alpha_1 = 1{,}2490457724 rad$ ó $\alpha_1 = 71{,}565^O$

$$|u_2| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} = \sqrt{20}$$

$$\alpha_2 = Tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) = Tan^{-1}(2)$$

$\alpha_1 = 1{,}10714871779 rad$ o $\alpha_2 = 63{,}434^O$

$$|u_3| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\alpha_3 = Tan^{-1}\left(\frac{-3}{-2}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$\alpha_3 = 0{,}982793723247 rad$ o $\alpha_3 = 56{,}309^O$

Sin embargo, este alguno no es el buscado, ya que este corresponde a un ángulo del primer cuadrante, cuando en realidad el vector $\vec{u}_3$ esta ubicado en el tercer cuadrante. ¿A que se debe esto?

Recordemos que la función tangente $y = Tanx$, es una función periódica cuyo periodo es π y en una rotación ella es positiva en dos cuadrantes y negativa en los otros dos. Mas concretamente, $Tan\alpha$ es positiva en el primer y tercer cuadrante, y negativa en segundo y cuarto.

$Tan\alpha = Tan(\alpha + \pi)$

De la anterior relación, si deseamos encontrar el ángulo del tercer cuadrante que corresponde a α_3 debemos sumarle π al valor obtenido anteriormente, es decir:

$\alpha_3 = 0{,}982793723247 + \pi = 4{,}12438637684 rad$ o

$\alpha_3 = 236{,}309^{O}$

Sugerencia: *No acepte incondicionalmente el resultado que le arroja la calculadora. Ubique el vector en el cuadrante respectivo, y determine si es necesario o no adicionarle* π *.*

1.4 ALGUNAS OPERACIONES CON VECTORES

1.4.1 MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Sea $\alpha \in R$ un escalar, y $\vec{w} = (c, d)$, entonces $\alpha\vec{w} = (\alpha c, \alpha d)$.

Si a este ultimo vector obtenido así, lo llamamos $\vec{v} = \alpha\vec{w}$, la magnitud de $\vec{v}$ es:

$|v| = \sqrt{(\alpha c)^2 + (\alpha d)^2} = \sqrt{\alpha^2 c^2 + \alpha^2 d^2} = \sqrt{\alpha^2 (c^2 + d^2)} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{(c^2 + d^2)} = |\alpha|\sqrt{c^2 + d^2} = |\alpha||w|$

Recuerde que $|x| = \sqrt{x^2}$.

De lo anterior se tiene que para hallar la magnitud de un vector producto de multiplicar un vector por un escalar (diferente de cero), es equivalente a multiplicar la magnitud del vector por el valor absoluto del escalar.

Ejemplo

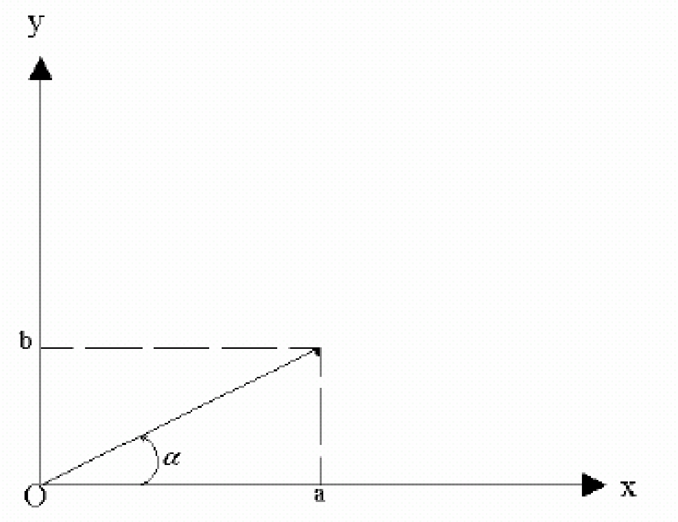
Sea $\vec{w} = (-1, -3)$ y $\alpha = -2$, entonces $\alpha\vec{w} = ((-2)(-1), (-2)(-3)) = (2, 6)$.

Por otro lado, veamos la magnitud de cada uno de ellos

$|w| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

$|\alpha w| = \sqrt{(2)^2 + (6)^2} = \sqrt{40} = \sqrt{4(10)} = \sqrt{2^2}\sqrt{10} = |2|\sqrt{10}$

Consideremos un vector $V=(a,b)$ con $a,b>0$. La representación de este vector en el plano corresponde a:



La magnitud de V es $|V|=\sqrt{a^2+b^2}$.

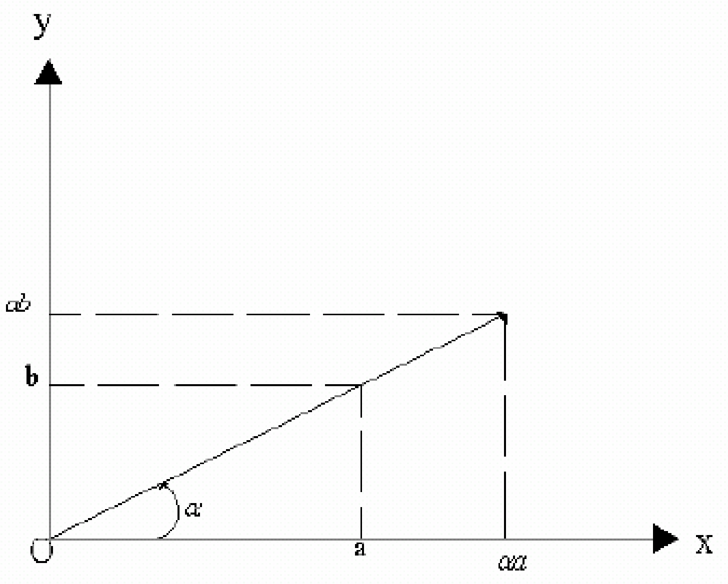
Ahora multiplicamos a $\hat{V}$ por un escalar tal que $\alpha \geq 1$

$\alpha\hat{V}=\alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$

$|\alpha V|=\sqrt{(\alpha a)^2+(\alpha b)^2}=\sqrt{\alpha^2(a^2+b^2)}=|\alpha|\sqrt{a^2+b^2}$

El ángulo αV , lo hallamos así:

$\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{\alpha b}{\alpha a}\right)$; $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$, que es el mismo ángulo del vector original $\hat{V}$, pero ahora $\alpha\hat{V}$ en un poco mayor en magnitud que $\hat{V}$



Por lo tanto, si multiplicamos a un vector por un escalar positivo mayor o igual a 1, nuestro nuevo vector será de una longitud mayor al original y apuntara en la misma dirección. Ahora sea α con las siguientes características $0 < \alpha < 1$ podemos expresar a α (si este es racional) como $\alpha = \frac{m}{n}$, donde $m < n$ y $m, n \in Z^{+}$ de esto nos queda:

$$\alpha\hat{V} = \frac{m}{n}(a,b) = \left(\frac{ma}{n}, \frac{mb}{n}\right)$$

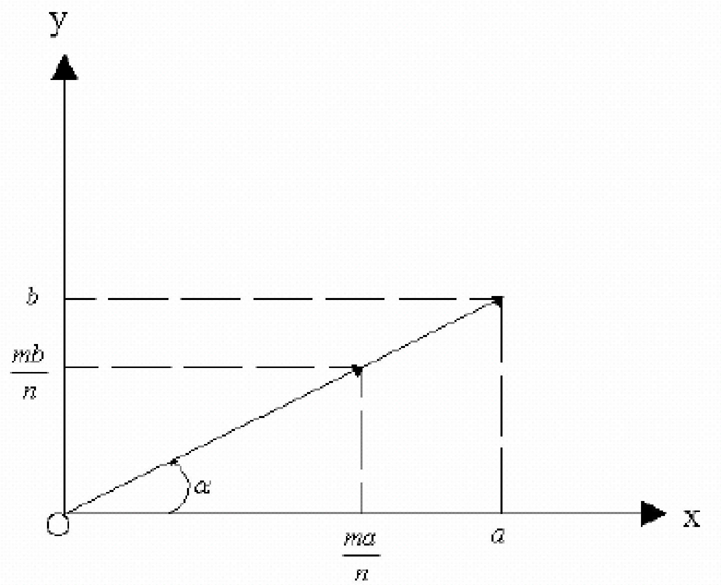
$$\left|\alpha\hat{V}\right| = \sqrt{\left(\frac{ma}{n}\right)^2 + \left(\frac{mb}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2}{n^2}\left(a^2 + b^2\right)} = \left|\frac{m}{n}\right|\sqrt{a^2 + b^2}$$

El ángulo de α *V*, lo hallamos así:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{m}{n}a}{\frac{m}{n}b}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Que sigue siendo el mismo ángulo del vector *V*, pero ahora $\alpha\hat{V}$ es un vector más cortó en magnitud que $\hat{V}$, esto debido a que $\frac{m}{n} < 1$



Por lo tanto si multiplicamos a un vector por un escalar positivo y menor que 1, nuestro nuevo vector será de una longitud menor al original y apuntara en la misma dirección.

Ahora sea α con las siguientes características, $-1<\alpha<0$, con la misma representación para α como racional, es decir $\alpha=\frac{m}{n}$, donde $m<n$ y $m<0$ ò $n<0$ (de tal forma que los signos de m y n son opuestos).

$$\alpha\hat{V}=\frac{m}{n}(a,b)=\left(\frac{ma}{n},\frac{mb}{n}\right)$$

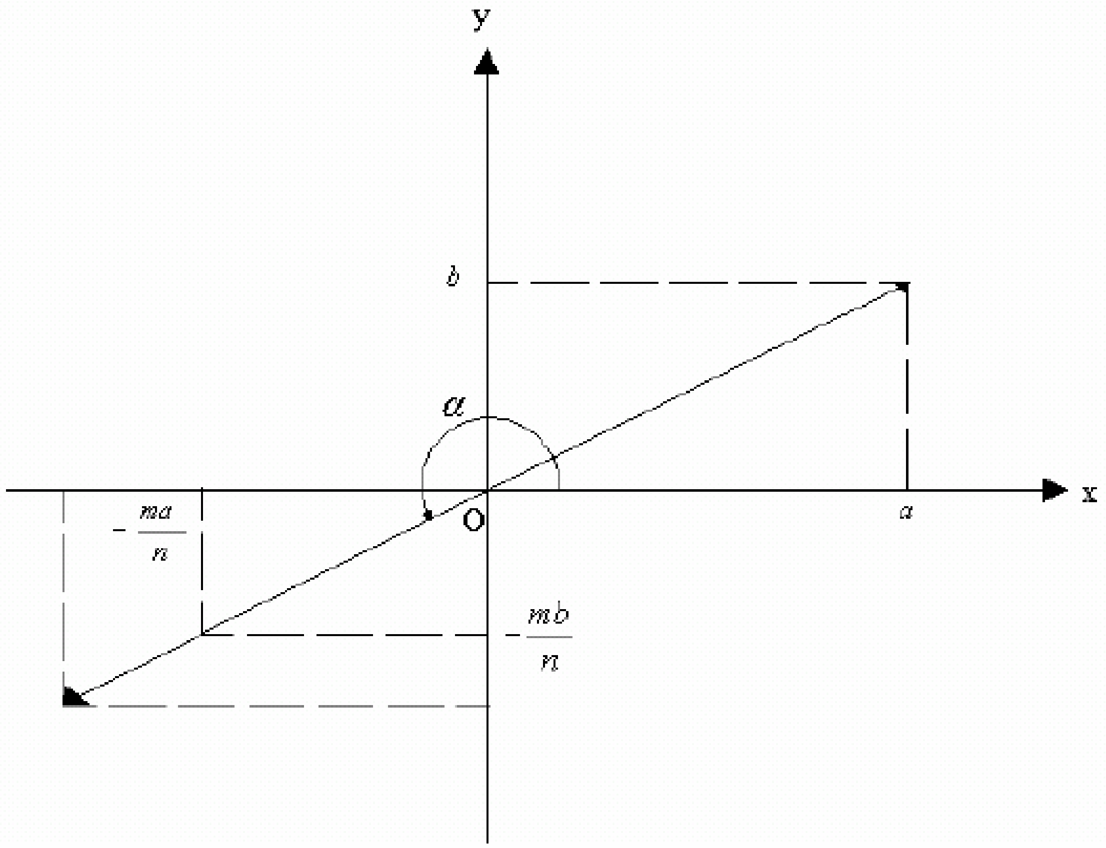
$$\left|\alpha\hat{V}\right|=\sqrt{\left(\frac{ma}{n}\right)^2+\left(\frac{mb}{n}\right)^2}=\sqrt{\frac{m^2}{n^2}\left(a^2+b^2\right)}=\left|\frac{m}{n}\right|\sqrt{a^2+b^2}$$

El ángulo de α *V,* lo hallamos como sigue:

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{m}{n}a}{\frac{m}{n}b}\right)$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Lo que nos daría el mismo ángulo de $\hat{V}$, sin embargo, hay que tener cuidado ya que este no es el ángulo real de $\alpha\hat{V}$ para ver esto representemos los dos vectores ($\hat{V}$ y $\alpha\hat{V}$)



Para hallar el verdadero ángulo de $\alpha\hat{V}$, debemos tener en cuenta las observaciones hechas en párrafos anteriores con respecto a la verdadera ubicación del vector, es decir $\theta = \theta_1 + 180°$ ò $\theta = \theta_1 + \pi$

De aquí tenemos que la dirección de $\alpha_1\hat{V}$ es opuesta a $\hat{V}$, y además la magnitud de $\alpha\hat{V}$ es menor $\left(\left|\frac{m}{n}\right|\sqrt{a^2+b^2}\right)$ ya que $\frac{m}{n} < 1$.

Por lo tanto al multiplicar un vector por un escalar negativo y mayor que -1, nuestro nuevo vector será mas "corto", pero su dirección será opuesta a la de $\hat{V}$.

Finalmente consideremos el caso $\alpha \leq -1$

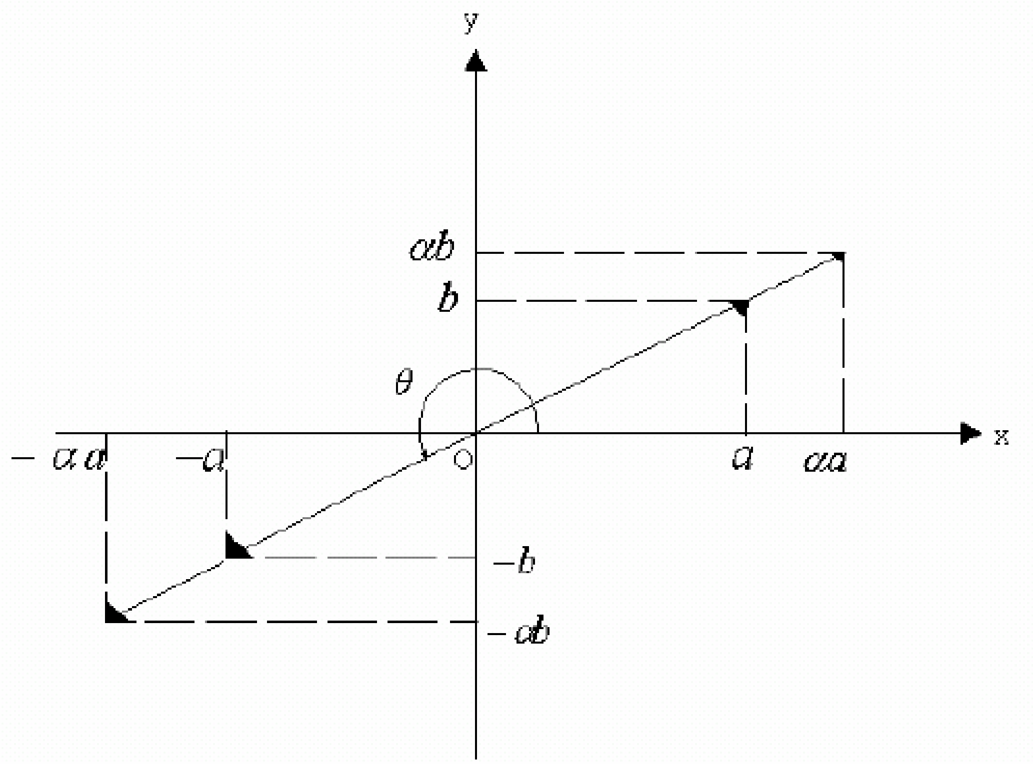
$$\alpha\hat{V} = \alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$$

$$|\alpha V| = \sqrt{(\alpha a)^2 + (\alpha b)^2} = \sqrt{\alpha^2(a^2+b^2)} = |\alpha|\sqrt{a^2+b^2}$$

Como $|\alpha V| \geq 1$, se tiene que $\alpha\hat{V}$ es de mayor longitud que $\hat{V}$.

En cuanto al ángulo αV tenemos:

$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha b}{\alpha a}\right)$; $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, pero ocurre lo mismo que el caso anterior, dibujaremos los dos vectores ($\hat{V}$ y $\alpha\hat{V}$)



Nuevamente $\theta = \theta_1 + 180°$ ò $\theta = \theta_1 + \pi$

Por lo tanto al multiplicar un vector por un escalar negativo menor que -1, nuestro nuevo vector tendrá una longitud mayor $|\alpha|\sqrt{a^2 + b^2}$ con $|\alpha| \geq 1$, pero su dirección es opuesta a la de $\hat{V}$

Ejemplo:

1. Sea $u = (1,2)$ y $\alpha = 2$, por lo tanto αu, será:

$\alpha u = 2(1,2) = (2,4)$

$|u| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}23$

$|\alpha u| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}46$

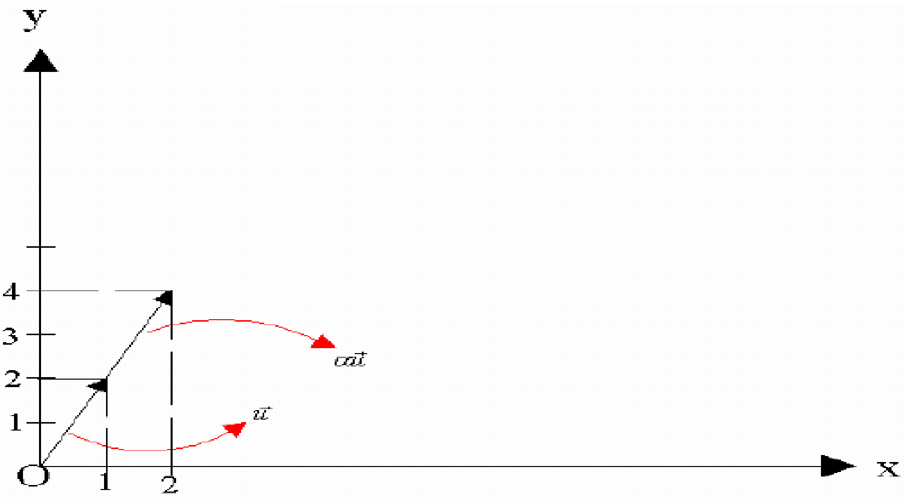
El ángulo será:

$$\theta_u = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right)$$

$$\theta_u = 63{,}43$$

$$\theta_{\alpha u} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right)$$

$$\theta_{\alpha u} = 63{,}43$$



Ejemplo:

Sea $u = (1,2)$ y $\alpha = \frac{1}{2}$, por lo tanto αu, será

$\alpha u = \frac{1}{2}(1,2) = \left(\frac{1}{2},1\right)$

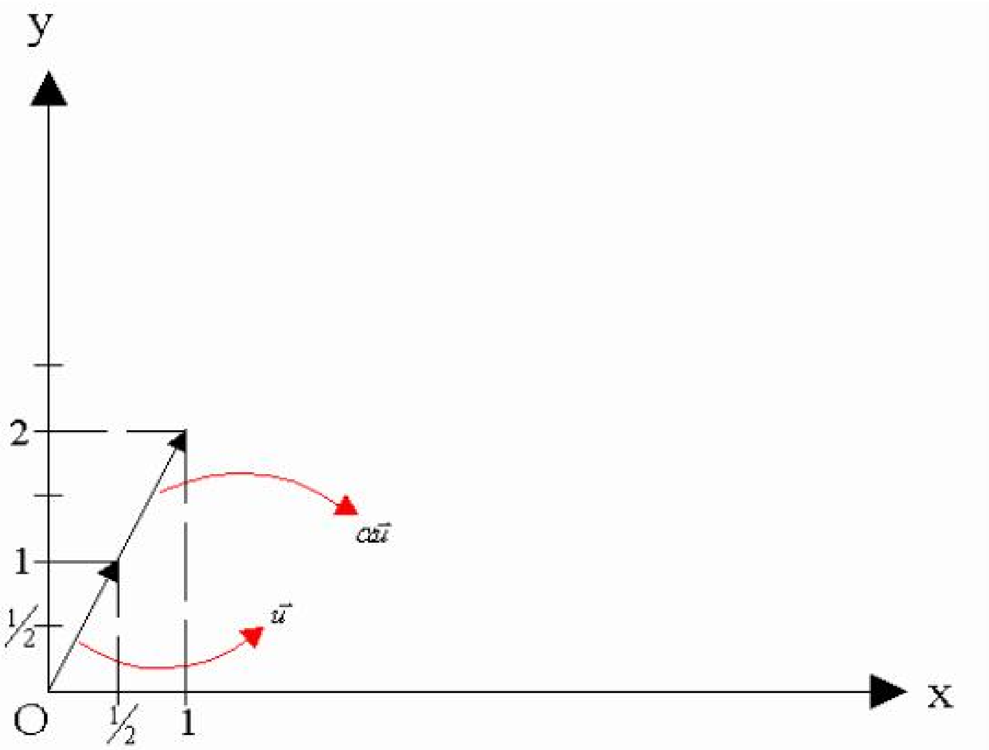
$$\alpha u = \frac{1}{2}(1,2) = \left(\frac{1}{2},1\right)$$

$$|\alpha u| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1{,}115$$

El ángulo será:

$$\theta_{\alpha u} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1/2}\right) = \tan^{-1}(2)$$

$$\theta_{\alpha u} = 63{,}43$$



Ejemplo

Sea $u = (1,2)$ y $\alpha = \frac{-1}{3}$ por lo tanto αu, será

$$\alpha u = \frac{-1}{3}(1,2) = \left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

$$|\alpha u| = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{5} \approx 0{,}743$$

El ángulo será:

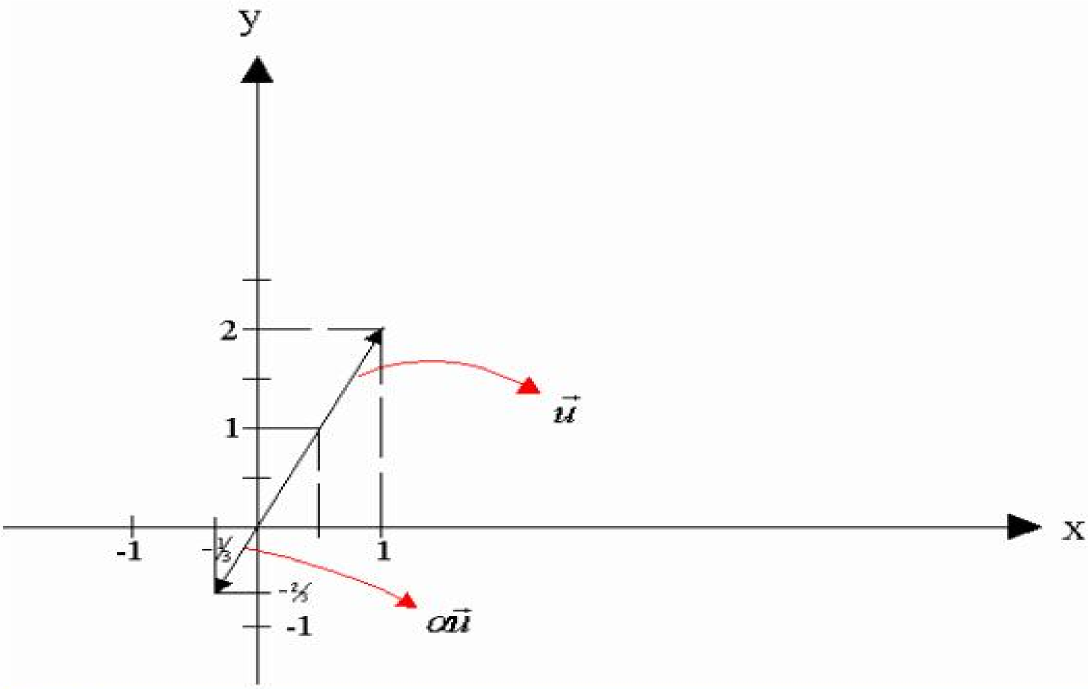
$$\theta_{1\alpha u} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{-1}{3}}\right) = \tan^{-1}(2)$$

$$\theta_{1\alpha u} = 63{,}43^{o}$$

$$\theta = \theta_{1\alpha u} + 180^{o}$$

$$\theta = 63{,}43^{o} + 180^{o}$$

$$\theta = 243{,}43^{o}$$



Ejemplo

Sea $u = (1,2)$ y $\alpha = -2$ por lo tanto αu, será

$$\alpha u = -2(1,2) = (-2,-4)$$

$$|\alpha u| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}46$$

El ángulo será:

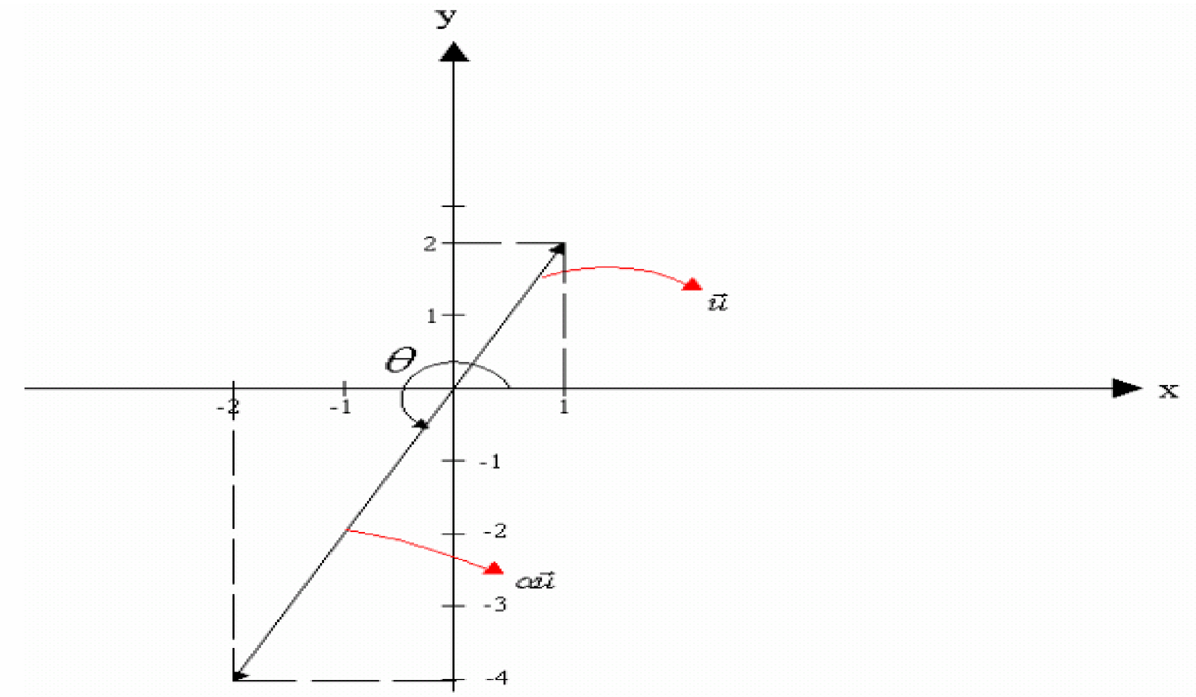
$$\theta_{1\alpha u} = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{-2}\right) = \tan^{-1}(2)$$

$$\theta_{1\alpha u} = 63{,}43^{o}$$

$$\theta = \theta_{1\alpha u} + 180^{o}$$

$$\theta = 63{,}43^{o} + 180^{o}$$

$$\theta = 243{,}43^{o}$$



VECTOR UNITARIO

Sea $u=(a,b)$, entonces la norma de *u*, es $|u|=\sqrt{a^2+b^2}$, y el ángulo θ se halla como $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$; multiplicamos al vector u por el escalar $\alpha=\frac{1}{|u|}$, es decir

$$\alpha u=\frac{1}{|u|}(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b)$$

$$\alpha u=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Encontremos la magnitud de este nuevo vector

$$|\alpha u|=\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}}=\sqrt{1}=1$$

El ángulo de αu

$$\theta_{\alpha u}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\right)$$

$$\theta_{\alpha u}=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=\theta_u$$

Por lo tanto hemos hallado un vector cuya magnitud es 1 y tenemos el mismo ángulo que el vector original. A este nuevo vector lo llamamos de ahora en adelante "vector unitario", pues su magnitud es 1 y apunta en la misma dirección del vector original.

Definición:

Sea $u=(a,b)$, entonces un vector unitario en la misma dirección de u es

$$w=\left(\frac{1}{|u|}\right)u$$

Ejemplo

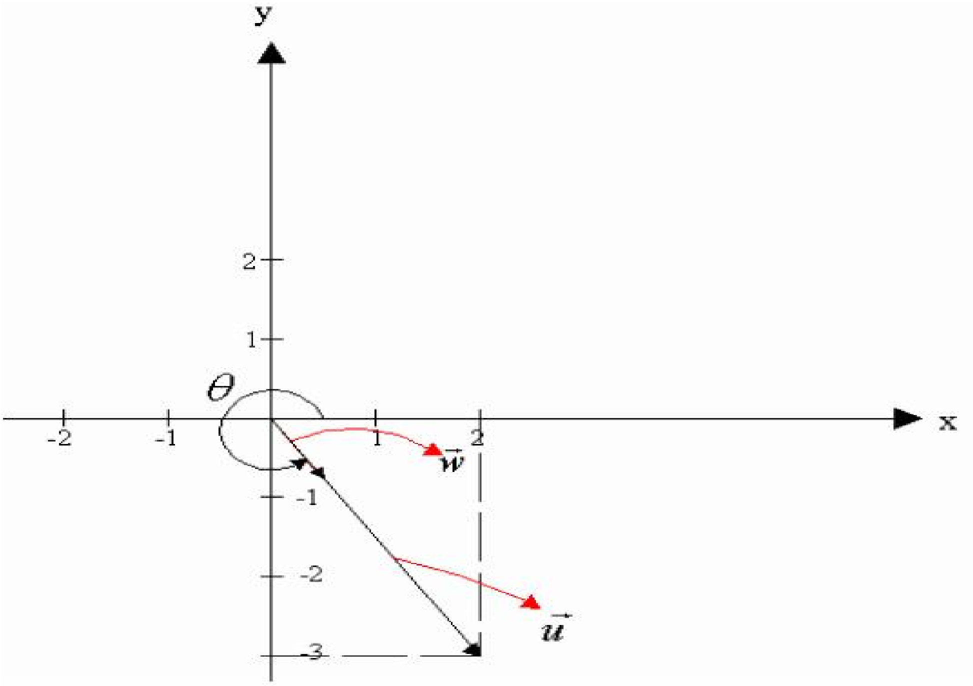
Sea $u=(2,-3)$, entonces un vector unitario en la misma dirección de u es:

$$w=\frac{1}{|u|}\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2}}(2,-3)=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$$

Donde $|w|=1$ y $\theta_{w1}=\theta_{u1}=\tan^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right)$

$\theta_{w1}=\theta_{u1}=-56.309°$, por lo tanto

$$\theta_w=\theta_{w1}+360°$$
$$\theta_w=-56.309°+360°$$
$$\theta_w=303.691°$$



Donde hemos sumado 360º, ya que el ángulo dado por la calculadora es un ángulo del IV cuadrante (-56.309º) y necesitamos su equivalente en valor positivo .

1.4.2. SUMA DE VECTORES

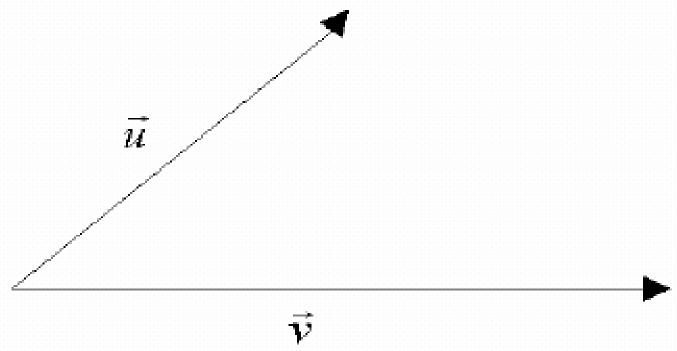
Sean $u=(a,b)$ y $v=(c,d)$, entonces la suma de u y v es:

$u+v=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,

Es decir efectuamos la suma de los vectores u y v componente a componente.

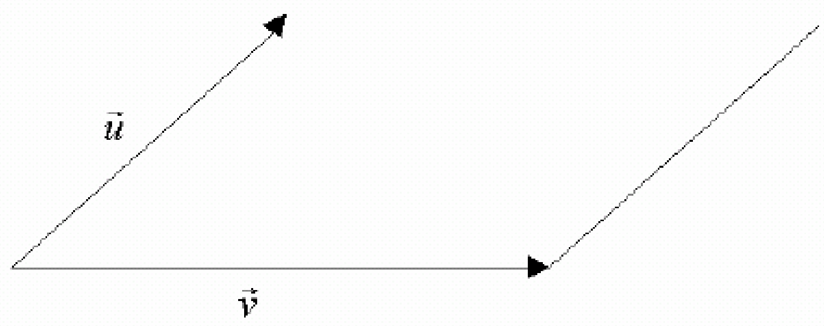
Gráficamente tenemos dos alternativas a saber:

- Método del paralelogramo

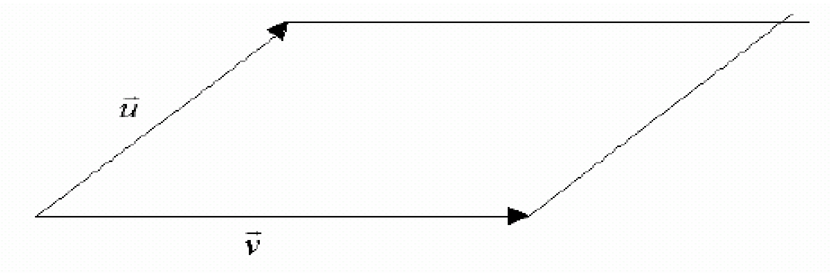


Procedimiento:

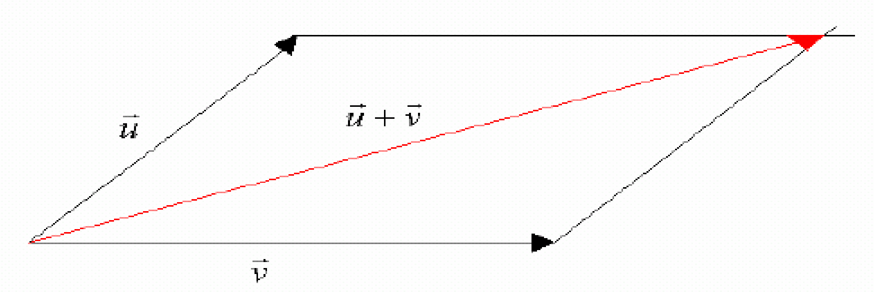
- El origen de los vectores debe ser el mismo
- Trazamos un segmento de recta que sea paralelo al vector $\hat{v}$ y que inicie en la punta del vector $\hat{u}$



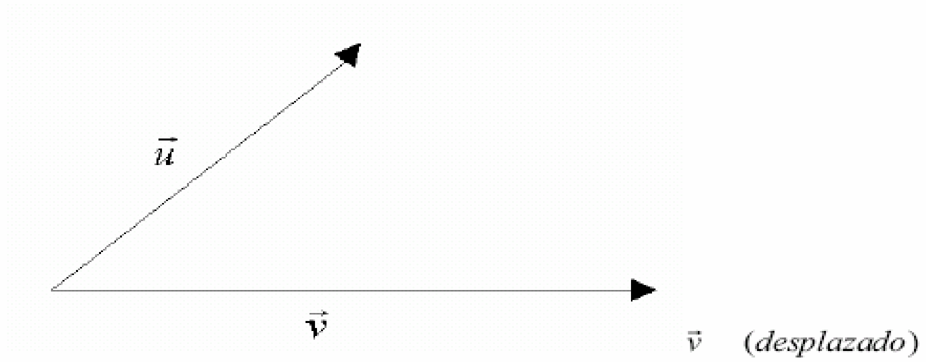
- Trazamos un segmento de recta que sea paralelo al vector $\hat{u}$ y que inicie en la punta del vector $\hat{v}$



- El vector suma de $u+v$ será el vector que va desde el punto inicial de u y v (origen común) hasta la intersección de los puntos paralelos.

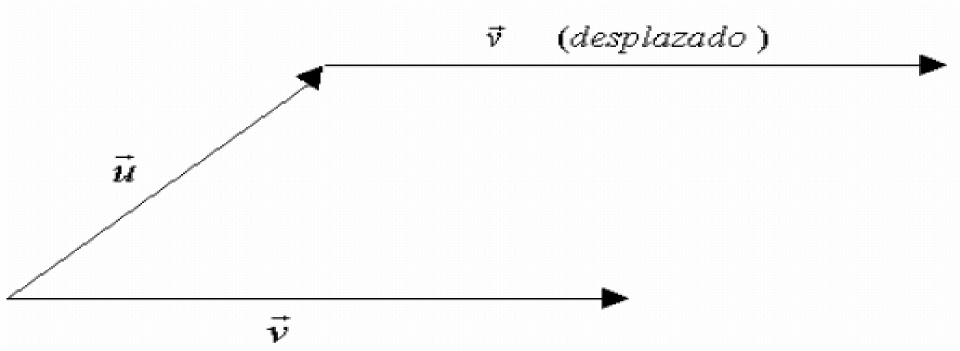


> Método del vector desplazado:



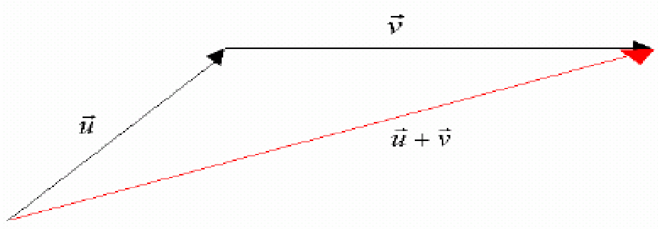
Procedimiento:

- Desplace uno de los vectores (origen común) de tal forma que el punto inicial de este vector desplazado coincida con la cabeza del vector no desplazado:



- Ahora la parte inicial del vector desplazado coincide con la parte final del vector sin desplazar; por lo tanto el vector suma de $u+v$ será el vector que tiene como punto inicial el punto inicial del vector sin desplazar y como punto final, la cabeza del vector desplazado.

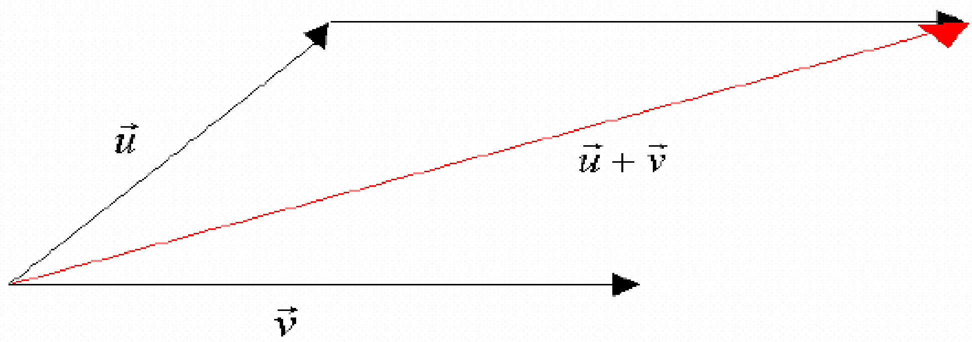
Lo que nos produce inmediatamente



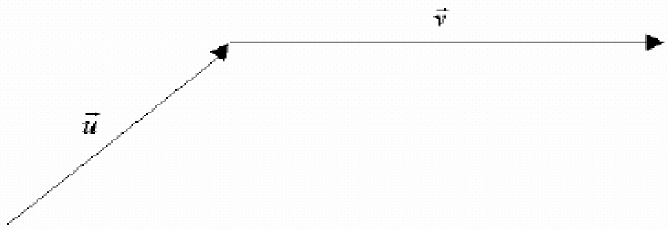
Nota: A partir de las definiciones, es claro que lo vectores a sumar deben estar expresados en forma rectangular

Ejemplo:

Dados lo vectores $u = 2 \ \angle 30^{\circ}$ y $v = 1 \ \angle 45^{\circ}$, efectuemos $u + v$, analítica y gráficamente:



Este procedimiento que es análogo al del paralelogramo es útil cuando nos dan los vectores en la forma trasladada, es decir, la parte inicial del segundo vector coincide con la parte final del primer vector, así:



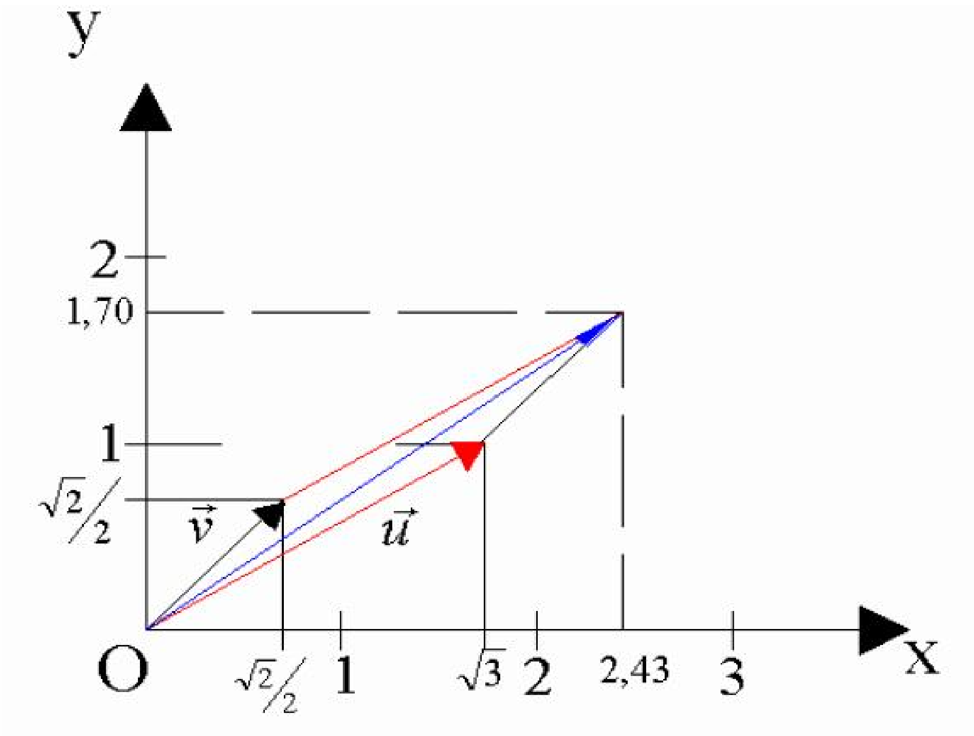
Lo primero es presentar u y v en forma rectangular

$$u = (2\cos 30^o)\hat{i} + (2\sin 30^o)\hat{j}$$
$$u = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\hat{i} + 2\left(\frac{1}{2}\right)\hat{j}$$
$$u = \sqrt{3}\hat{i} + \hat{j}$$
$$u = \left(\sqrt{3},1\right) \approx (1.73,1)$$

$$v = (2\cos 45^o)\hat{i} + (2\sin 45^o)\hat{j}$$
$$v = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$
$$v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx (0.70,0.70)$$

Como ya se encuentra en forma rectangular podemos efectúa la suma, es decir:

$$u + v = \left(\sqrt{3},1\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$v + v = (1.73 + 0.7, 1 + 0.7) = (2.43, 1.7)$$



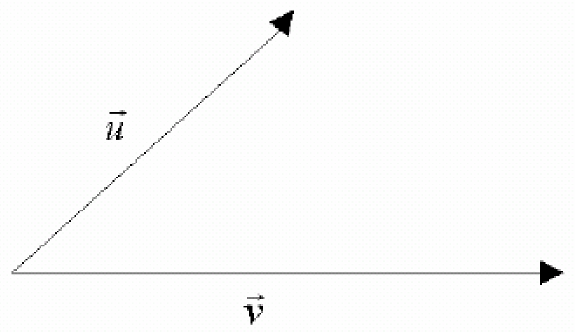
Note que si el ángulo de u es α_1 el de v es α_2, entonces el ángulo del vector suma $u+v$ (llamémoslo θ) estará dado por $\alpha_2 < \theta < \alpha_1$, si $\alpha_1 < \alpha_2$ ò $\alpha_1 < \theta < \alpha_2$, si $\alpha_2 < \alpha_1$. Si $\alpha_1 = \alpha_2$, el ángulo $\theta = \alpha_1 = \alpha_2$, que corresponderían a la situación en que $u+v$ están sobre la misma recta (son paralelos)

1.4.3. DIFERENCIA DE VECTORES

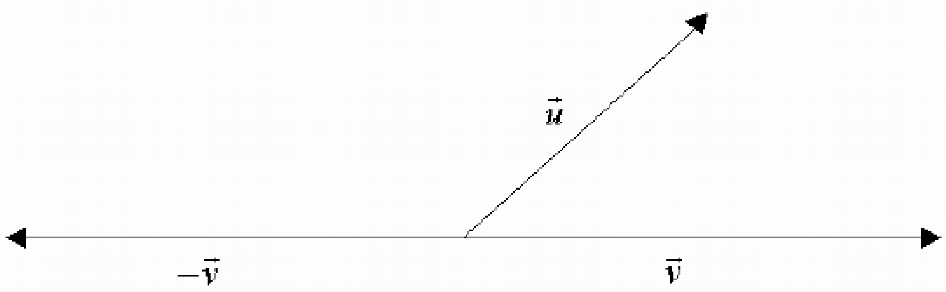
A partir de la definición de suma de vectores y de producto por escalar, la operación de resta dos vectores surge de manera natural.

Sean $u=(a,b)$ y $v=(c,d)$, entonces la diferencia de u y v es:

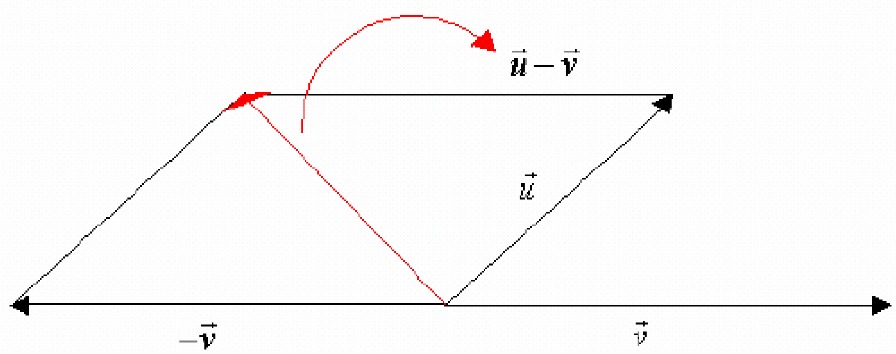
$u-v=u+(-1)v=(a,b)+(-c,-d)=(a-c,b-d)$, en cuanto a la representación grafica tenemos:



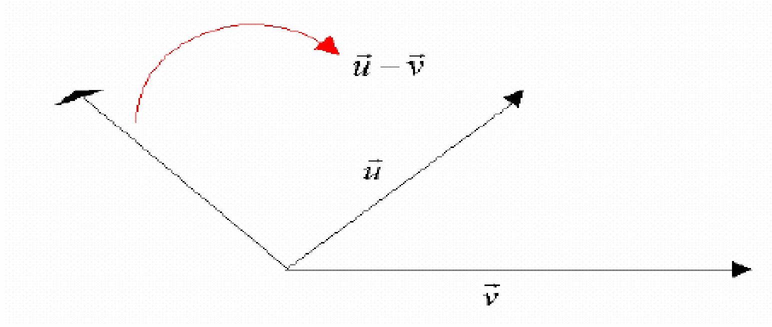
Si deseamos realizar, por ejemplo $u-v$, podemos multiplicar a $\hat{v}$ por el escalar -1, lo que nos invierte la dirección de $\hat{v}$ así:



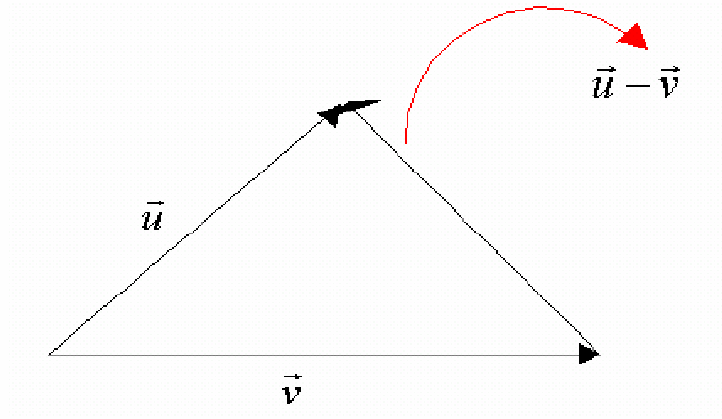
Ahora podemos efectuar la suma de u y de $(-\hat{v})$



Regresando al primer grafico tenemos:

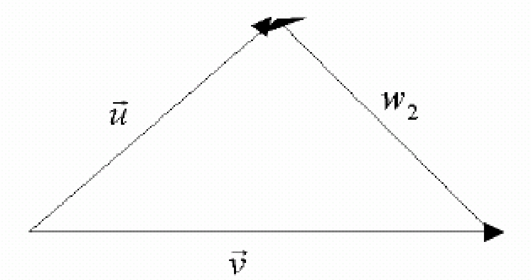


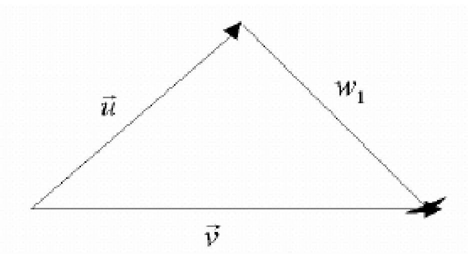
Se acostumbra, trasladar el vector $u-v$ de tal forma que coincida con los puntos finales de *u* y de *v*, así:



Otra forma de hallar el vector resta de *u* y *v* o de *v* y *u*, es la siguiente:

- Partiendo de los vectores *u* y *v*, el vector que nos piden determinar ($u-v$ ò $v-u$), le asignamos un nombre a dicho vector





Note que en el grafico anterior están determinadas las dos posibles direcciones para la diferencia de u y v ò v y u (las he llamado w_1 y w_2).

En estos esquema <u>SIEMPRE</u> se satisface una suma (en forma grafica). Entonces la escribimos y despejamos w_1 y w_2 según corresponda.

En el grafico de la derecha, se cumple (empleando la suma grafica de vectores ò "suma de un vector desplazado") :

$u + w_1 = v$, por lo tanto $w_1 = v - u$

En el grafico de la izquierda se cumple :

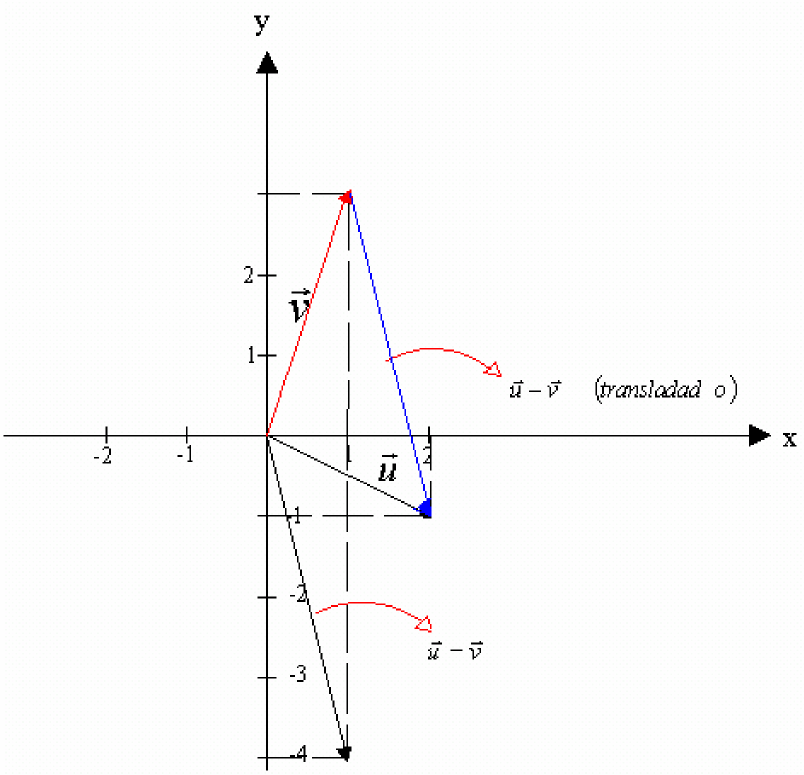
$v + w_2 = u$, de donde $w_2 = u - v$

Para evitar confusiones acerca de la dirección sugiero se emplee este método.

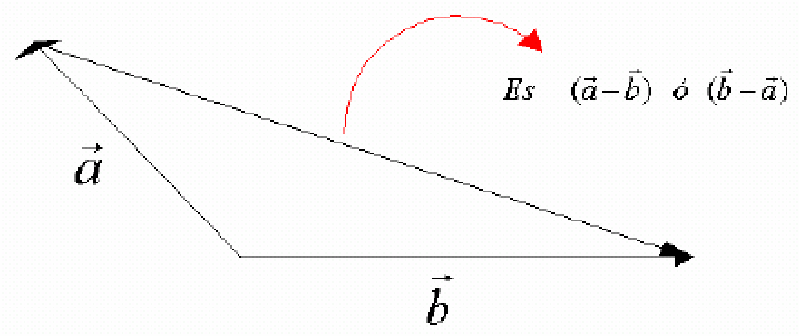
Ejemplo

Dados $u = (2,-1)$ y $v = (1,3)$ efectué $u - v$

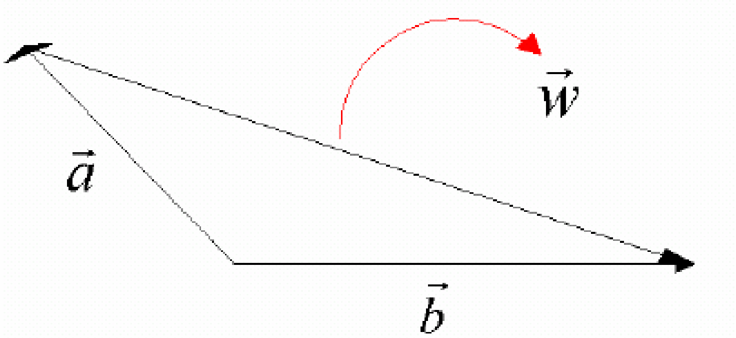
$u - v = (2,-1) + (-1,-3) = (2-1,-1-3) = (1,-4)$



Note que si nos dan el esquema siguiente, y nos piden determinar cual es el nombre del vector, el hallarlo empleando la forma alternativa es sencillo. Veamos:



Respuesta: Llámelo *w*, por lo tanto el esquema es:



De la suma de vectores se tiene $a+\hat{w}=\hat{b}$, por lo tanto $w=\hat{b}-\hat{a}$

1.4.4. PRODUCTO ESCALAR

Definición: sea $u=a,b$ y $v=(c,d)$, entonces el producto escalar de u y v, que se denota $u \cdot v$, es:

$u \cdot v = ac + bd$

De esto ultimo, se tiene que $u \cdot v = v \cdot u$ (debido a las propiedades de campo de los numero reales).

De la definición se tiene además que:

$u \cdot u = (a,b)\cdot(a,b) = (a)(a)+(b)(b) = a^2 + b^2$

Por lo tanto

$|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$

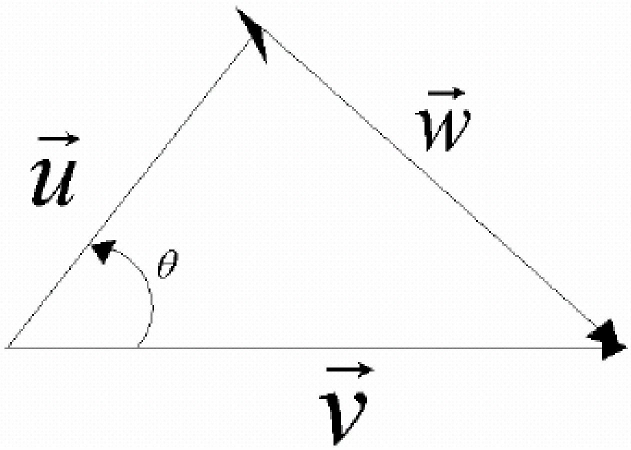
$|u|^2 = a^2 + b^2$

De lo que podemos escribir que:

. $|u|^2 = u \cdot u$ ò $|u| = \sqrt{u \cdot u}$

Interpretación geométrica del producto escalar

Consideremos los vectores $u = a,b$ y $v = (c,d)$



Y tenemos el vector $w = v - u$ (podría emplearse naturalmente, $u - v$), ahora encontremos ala norma de u y v

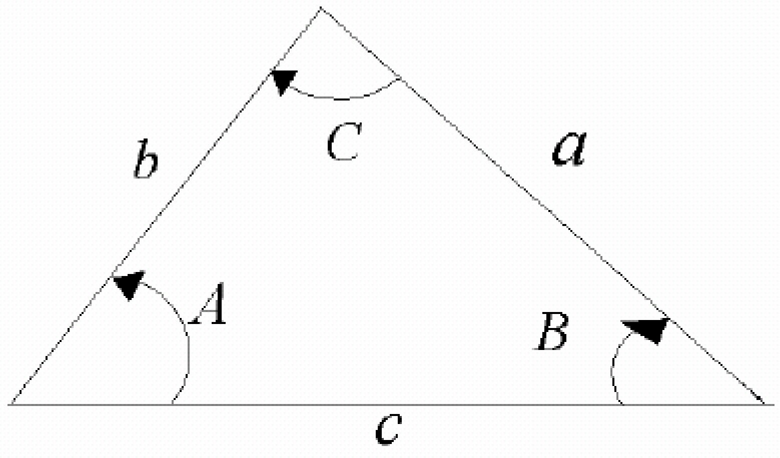
$|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|u|^2 = a^2 + b^2$

$|v| = \sqrt{c^2 + d^2}$

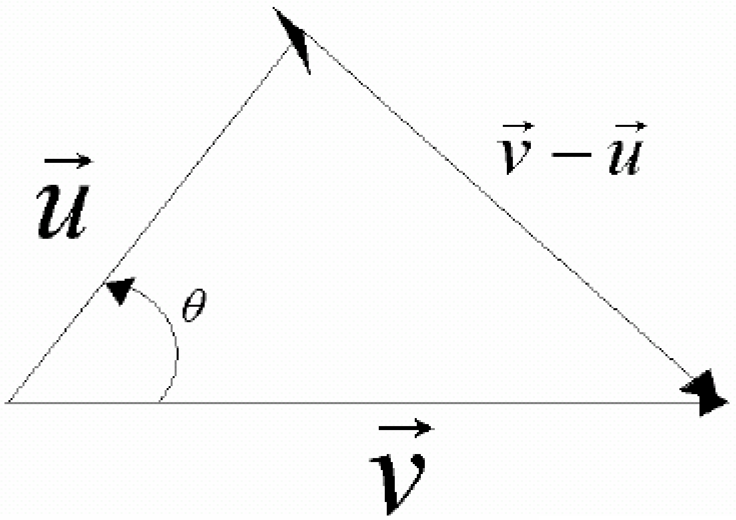
$|v|^2 = c^2 + d^2$

θ es el ángulo entre los vectores u y v. para hallar θ, note que conocemos los lados que lo conforman, por lo que podemos acudir al teorema de coseno.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Para nuestro caso tenemos:



$$|v-u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta$$

Despejando

$$\cos\theta = \frac{|v-u|^2 - |u|^2 - |v|^2}{-2|u||v|} \qquad (1)$$

Ahora encontramos $|v-u|^2$

$$|v-u| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

$$|v-u|^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$$

Sustituyendo en (1)

$$\cos\theta = \frac{(c-a)^2 + (d-b)^2 - \left[a^2 + b^2\right] - \left[c^2 + d^2\right]}{-2|u||v|}$$

$$\cos\theta = \frac{\cancel{c^2} - 2ca + \cancel{a^2} + \cancel{d^2} - 2bd + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} - \cancel{b^2} - \cancel{c^2} - \cancel{d^2}}{-2|u||v|}$$

$$\cos\theta = \frac{-2ac - 2bd}{-2|u||v|}$$

$$\cos\theta = \frac{-2(ac + bd)}{-2|u||v|}$$

$$\cos\theta = \frac{ac + bd}{|u||v|}$$

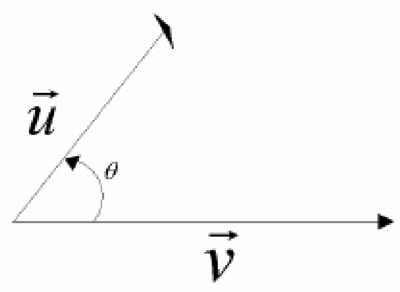
El numerador es precisamente $u \cdot v = ac + bd$, por lo tanto

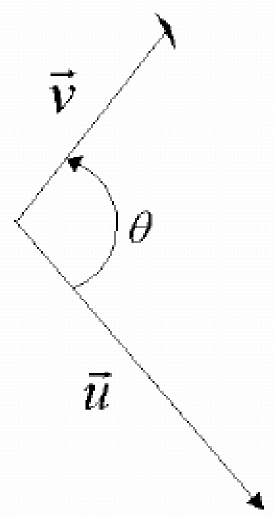
$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

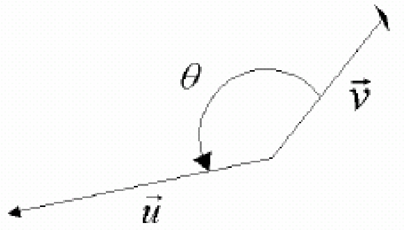
Para encontrar el ángulo hacemos:

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{u \cdot v}{|u||v|}\right]$$

El ángulo θ esta definido como el ángulo no negativo más pequeño. Este siempre es posible elegirlo de manera que $0 < \theta < \pi$







Note que todas estas representaciones nos permiten elegir siempre un ángulo positivo (En el sentido contrario a las manecillas del reloj)

Definición

Dos vectores u y v se dicen paralelos si el ángulo entre ellos es de 0º o de 180º, cuando el ángulo es de 0º los dos vectores apuntan en la misma dirección y en el caso de 180º apuntan en direcciones opuestas.

Ahora de la formula del ángulo

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \qquad (2)$$

- Si $\theta = 0^{o}$, entonces $\cos 0^{o} = 1$ y nos queda

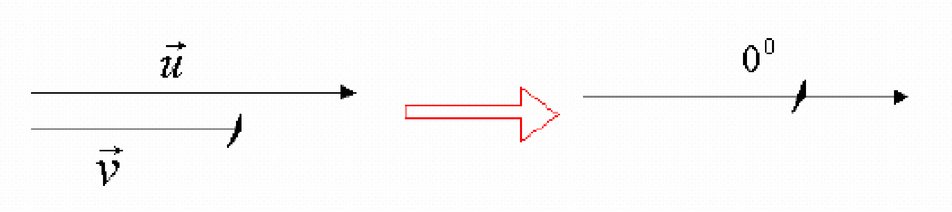
$$1 = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

- Si $\theta = 180^{o}$, entonces $\cos 0^{o} = -1$ y nos queda

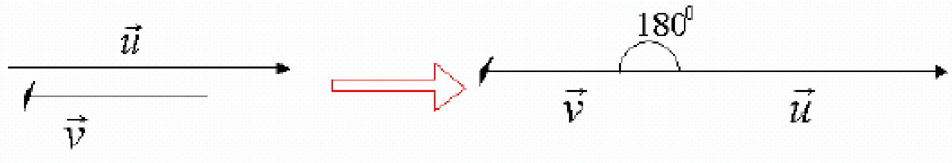
$$-1 = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

Es decir si dos vectores son paralelos el lado derecho de la ecuación (2) será 1 ò -1

1.



2.



Definición

Dos vectores u y v, $\neq 0$ se dicen ortogonales o perpendiculares si el ángulo entre ellos es de 90º. [2]

De la formula del ángulo

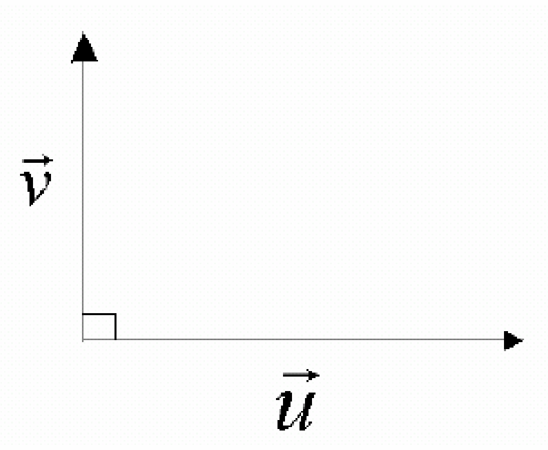
$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

$$\cos\theta = 90^{o}$$

$$\cos 90^{o} = 0$$

Por lo tanto

$\frac{u \cdot v}{|u||v|} = 0$ ò lo que es equivalente $u \cdot v = 0$,(ya que al ser $u \neq 0$ y $v \neq 0$, sus magnitudes $|u| \neq 0$ y $|v| \neq 0$)



Ejemplos

I. Dados $u=(-1.3)$ y $v=(2.1)$, encuentre el ángulo entre ellos.

$$u\cdot v=(-1,3)\cdot(2,1)=-2+3=1$$

$$|u|=\sqrt{(-1)^2+(3)^2}=\sqrt{10}$$

$$|v|=\sqrt{(2)^2+(1)^2}=\sqrt{5}$$

Por lo tanto

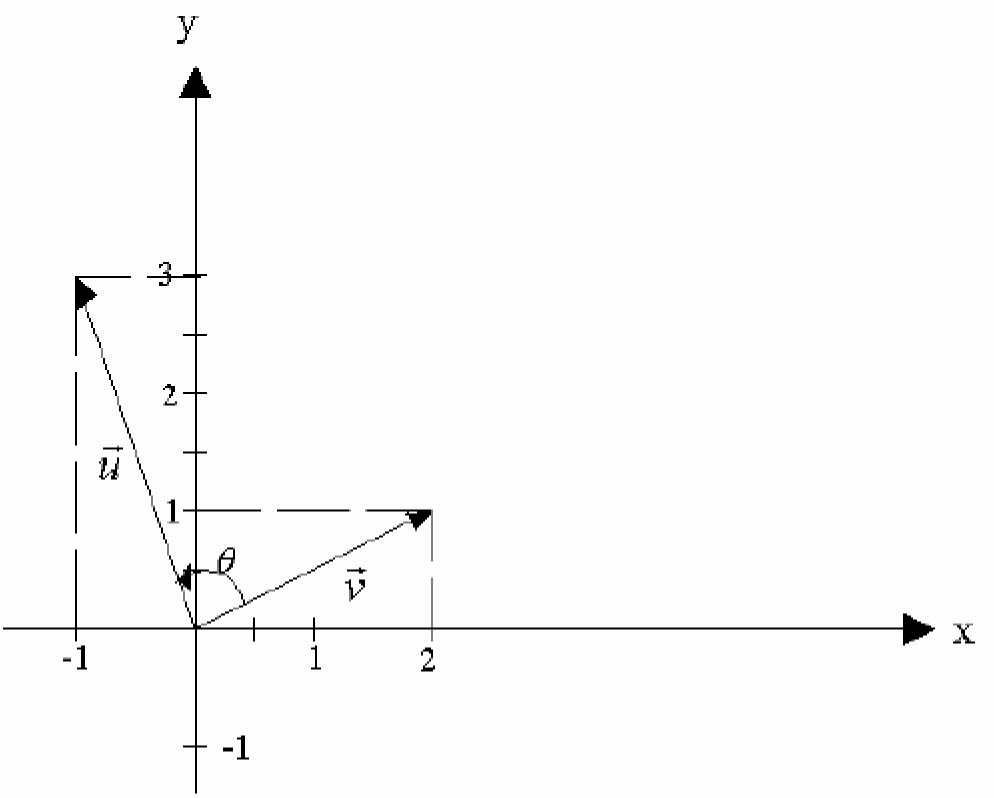
$$\cos\theta=\frac{u\cdot v}{|u||v|}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{50}}$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)$$

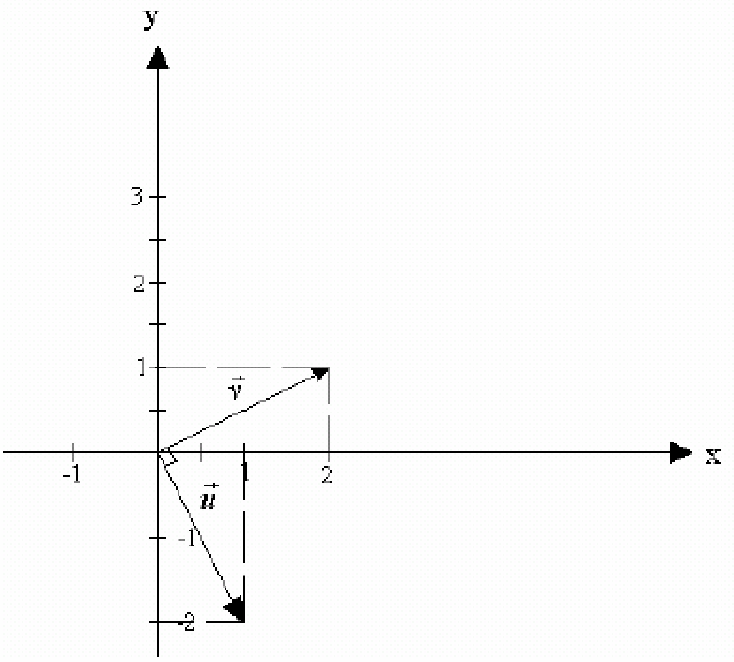
$$\theta=81.869^{\circ}$$



II. Dados $u=(1,-2)$ y $v=(2,1)$, encuentre el ángulo entre ellos.

$u\cdot v=(1,-2)\cdot(2,1)=2-2=0$

Por lo tanto el ángulo entre ellos es 90º



III. Dados $u=(\sqrt{3},1)$ y $v=(-1,\alpha)$, encuentre α tal que el ángulo entre u y v sea de $\frac{5\pi}{6}$.

De la formula del ángulo tenemos

$$\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{u\cdot v}{|u||v|}$$

$$\Rightarrow\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{u\cdot v}{|u||v|}$$

Ahora

$$u\cdot v=(\sqrt{3},1)\cdot(-1,\alpha)=\alpha-\sqrt{3}$$

$$|u|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=2$$

$$|v|=\sqrt{(-1)^2+(\alpha)^2}=\sqrt{1+\alpha^2}$$

Remplazando

$$\frac{\alpha-\sqrt{3}}{2\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha-\sqrt{3}=-\sqrt{3}\sqrt{1+\alpha^2}$$

Elevando al cuadrado

$$\left(\alpha-\sqrt{3}\right)^2=\left(-\sqrt{3}\sqrt{1+\alpha^2}\right)^2$$

$$\alpha^2+2\alpha\sqrt{3}+3=3\left(1+\alpha^2\right)$$

$$\alpha^2-2\alpha\sqrt{3}+3-3-3\alpha^2=0$$

$$-2\alpha^2-2\alpha\sqrt{3}=0$$

$$-\alpha^2-\alpha\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow\alpha\left(\alpha+\sqrt{3}\right)=0$$

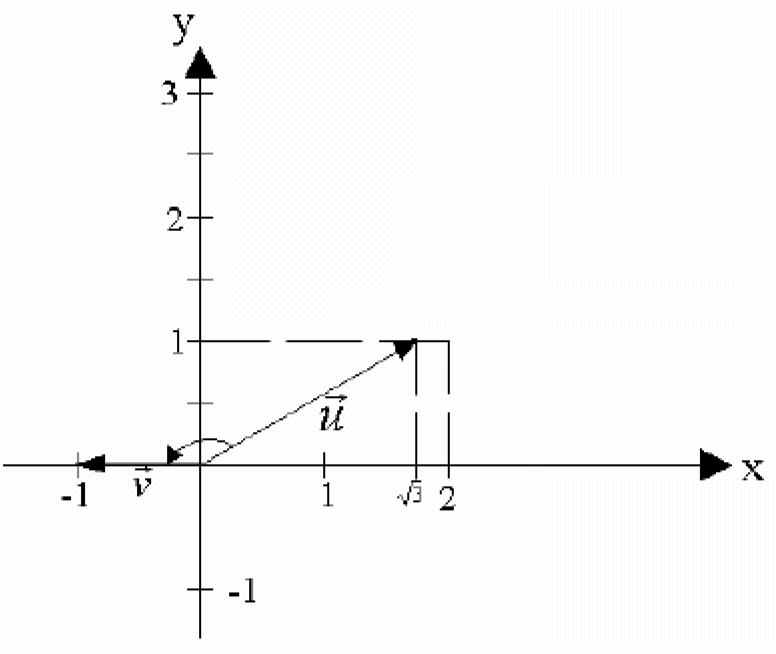
Por lo tanto

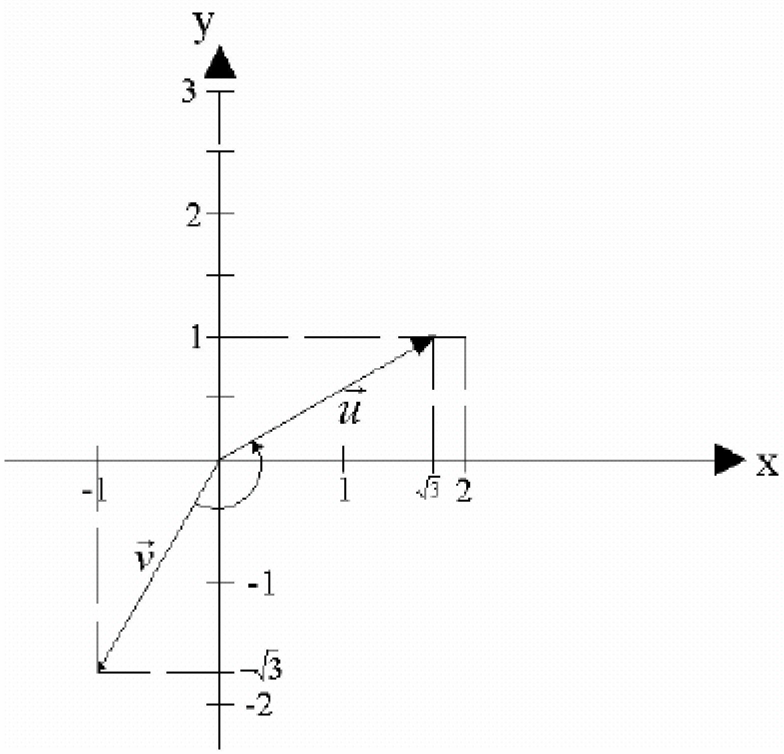
$\alpha=0$ ò $\alpha+\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow\alpha=-\sqrt{3}$

De manera que, para que u y v formen un ángulo de 150º, se requiere que $\alpha=0$ ò $\alpha=-\sqrt{3}$, en cuyo caso los vectores serán:

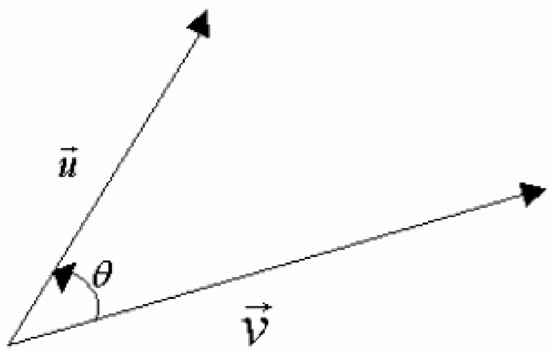
- $u=\left(\sqrt{3},1\right)$ y $v=\left(-1,0\right)$
- $u=\left(\sqrt{3},1\right)$ y $v=\left(-1,\sqrt{3}\right)$

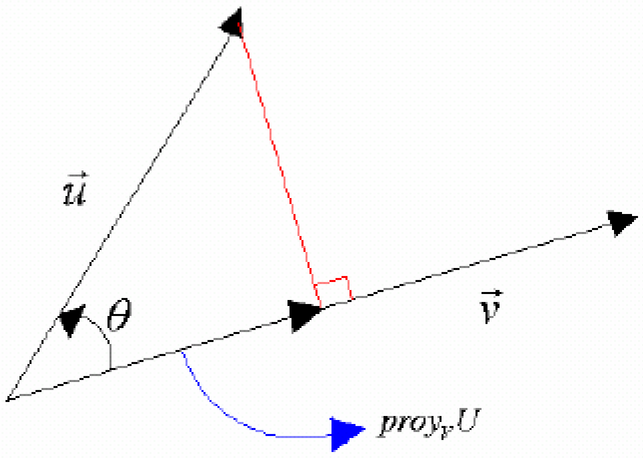




1.5 PROYECCIONES

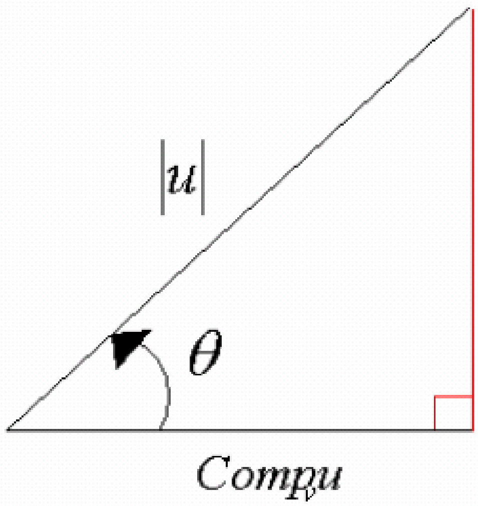
Consideremos el siguiente esquema, y deseamos encontrar la "sombra" del vector *u* que cae perpendicular al vector *v*. A esta "sombra" la llamaremos la proyección del vector *u* sobre el vector *v* y será de la forma:





Para hallar este nuevo vector, llamado $proy_v u$, primero consideremos esta situación:

I. Como escalar.



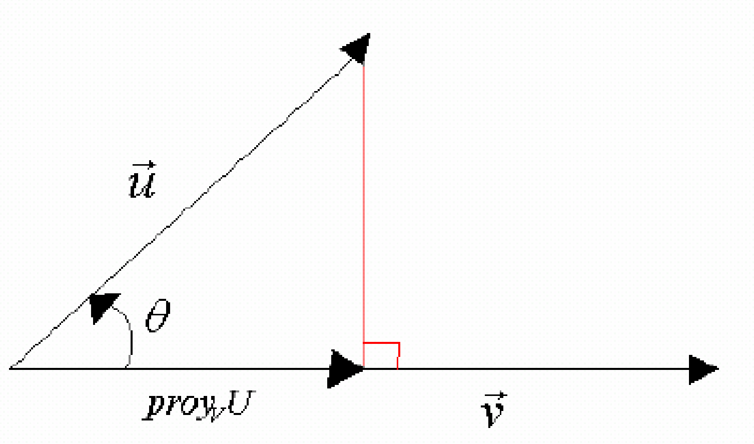
Aquí conocemos la norma de u y la longitud de la "sombra" la llamamos componente de u sobre v. $(Comp_v u)$, naturalmente $Comp_v u$ es un escalar.

De trigonometría elemental tenemos:

$$\cos\theta = \frac{comp_v u}{|u|}$$

$$comp_v u = |u|\cos\theta$$

II. Caso vectorial



Para obtener el vector $proy_v u$ dado que ya conocemos su longitud $(Comp_v u)$, multiplicamos la componente de u sobre v. por un vector que no afecte su longitud, y este es precisamente un vector unitario que deberá ir en la misma dirección de $\hat{v}$ ya que $proy_v u$, va en esa dirección. Es decir:

$$Comp_v u\left(\frac{\hat{v}}{|v|}\right) = |u|\cos\theta\left(\frac{\hat{v}}{|v|}\right)$$

$$proy_v u = |u|\frac{\hat{v}}{|v|}\cos\theta$$

Sabemos que $\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{|u||v|}$, por lo tanto

$$proy_v u = |\cancel{u}|\frac{\hat{v}}{|v|} \cdot \frac{u \cdot v}{|\cancel{u}||v|}$$

$$proy_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} \cdot \hat{v}$$

Por lo tanto

$$proy_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right)\hat{v}$$

Ahora, podemos escribir $Comp_v u$ un poco mejor.

$$Comp_v u = |u| \cos\theta$$

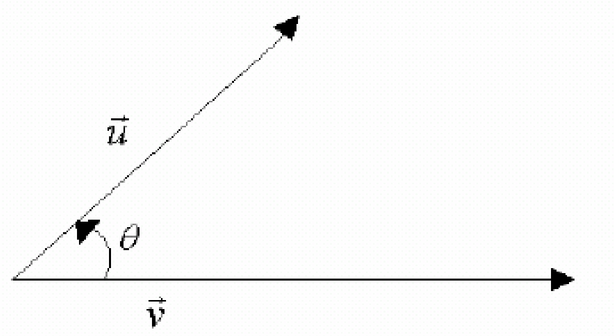
$$Comp_v u = |\cancel{u}| \frac{(u \cdot v)}{|\cancel{u}||v|}$$

$$Comp_v u = \frac{(u \cdot v)}{|v|}$$

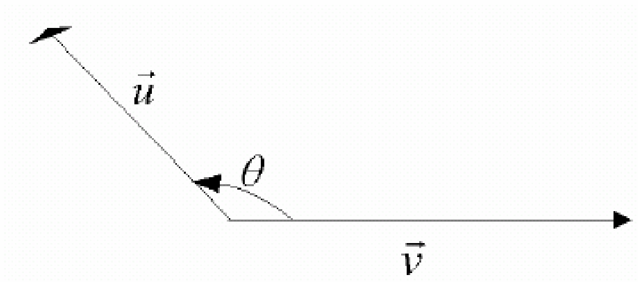
Observación: si deseamos encontrar la proyección de *v* sobre *u,* basta con sustituir *u* por *v* y *v* por *u* en la formula de proyección.

Gráficamente pueden ocurrir dos casos:

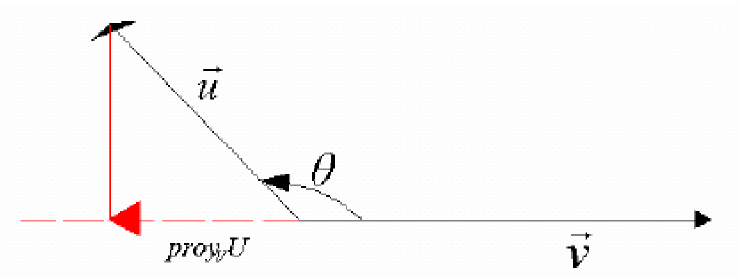
I. El ángulo entre *u* y *v* es menor a 90º



II. El ángulo entre *u* y *v* es mayor que 90º, pero (naturalmente, a partir de la definición de ángulo entre vectores) menor o igual a 180º



Entonces prolongamos la línea acción del vector *v*



Ejemplo:

Dados $u = (1,-2)$ y $v = (2,2)$, encuentre:

I. $proy_v u$

II. $proy_u v$

<u>Solución</u>:

I. $proy_v u = \left(\dfrac{u \cdot v}{|v|^2}\right)\hat{v}$

$u \cdot v = (1,-2)\cdot(2,2) = 2 - 4 = -2$

$|v|^2 = (2)^2 + (2)^2 = 8$

$proy_v u = \dfrac{-2}{8}(2,2)$

$proy_v u = \dfrac{-1}{4}(2,2)$

$proy_v u = \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$

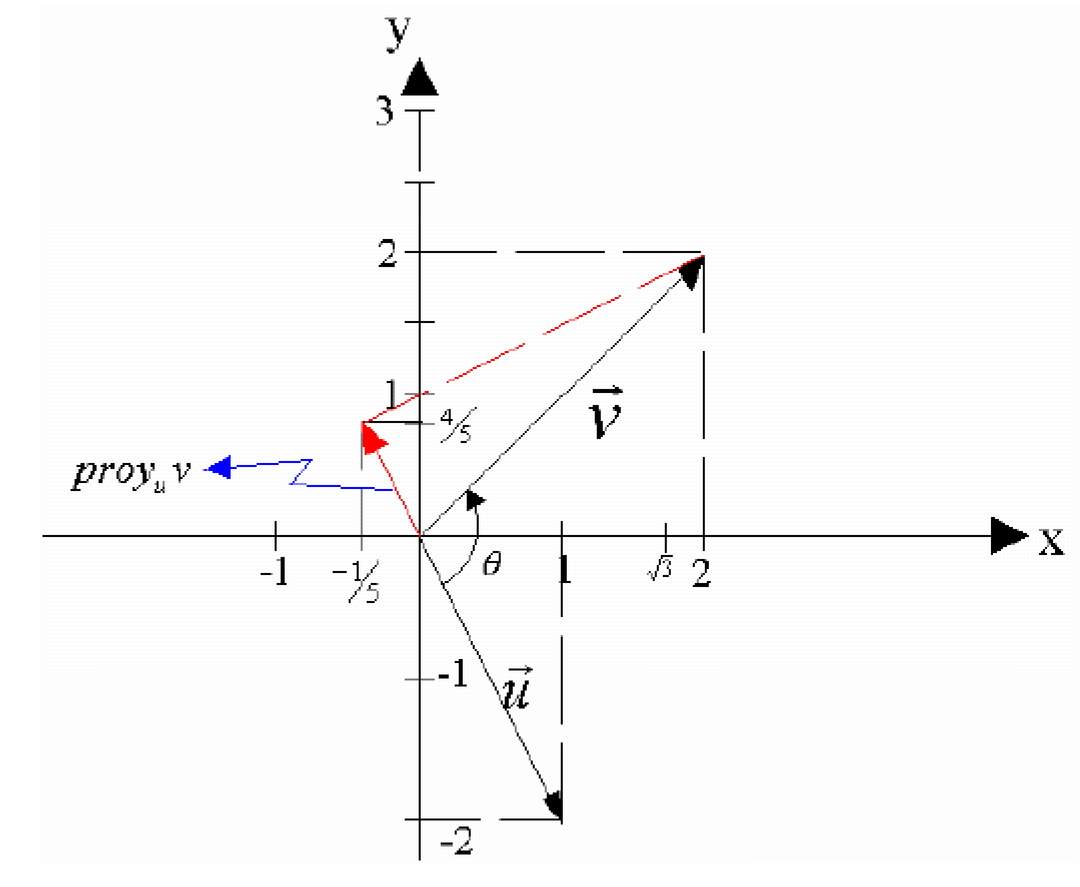
II. $proy_u v = \left(\dfrac{u \cdot v}{|u|^2}\right)\hat{u}$

$u \cdot v = (1,-2)\cdot(2,2) = 2 - 4 = -2$

$|v|^2 = (1)^2 + (-2)^2 = 5$

$proy_v u = \dfrac{-2}{5}(1,-2)$

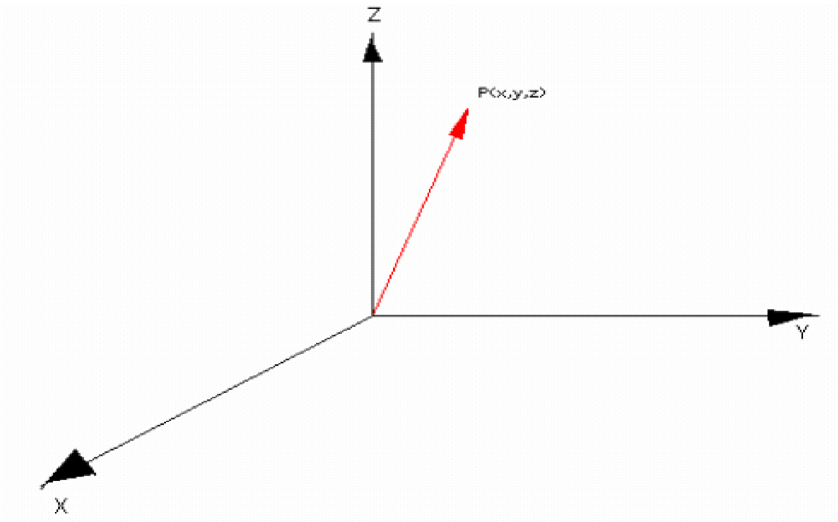
$proy_v u = \left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$



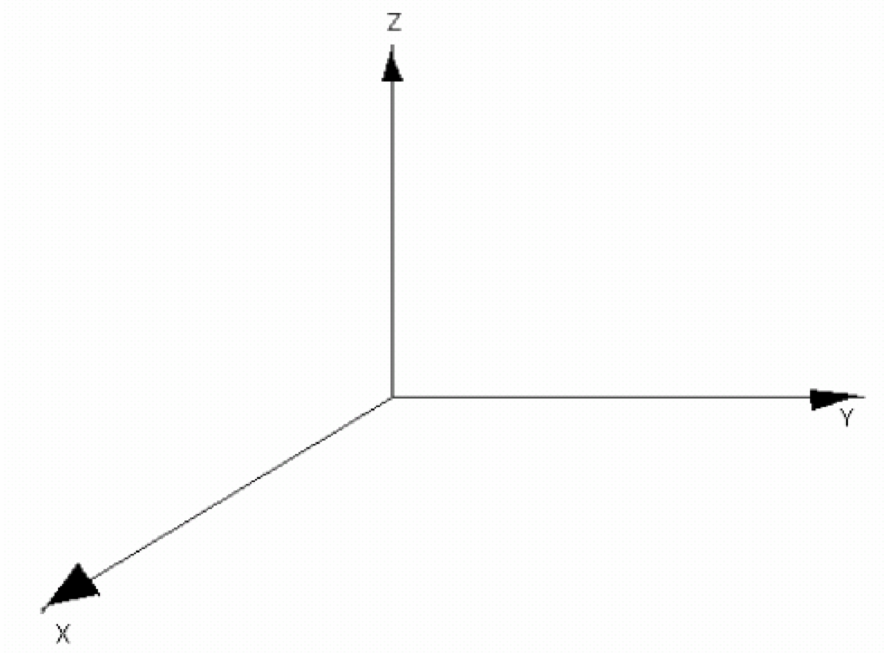
2. VECTORES EN R^3

Análogo al trabajo efectuado con los vectores en R^2, obtenemos una correspondencia que permite definir un vector en R^3. Será esta pues, una terna de números (x,y,z), de la cual podemos pensar en un segmento dirigido, que va del origen al punto en cuestión.

Si denominamos al punto (x,y,z), el punto *P*, y el origen del sistema tradicional *O* $(0,0,0)$, entonces el segmento dirigido $\overrightarrow{OP}$, será.



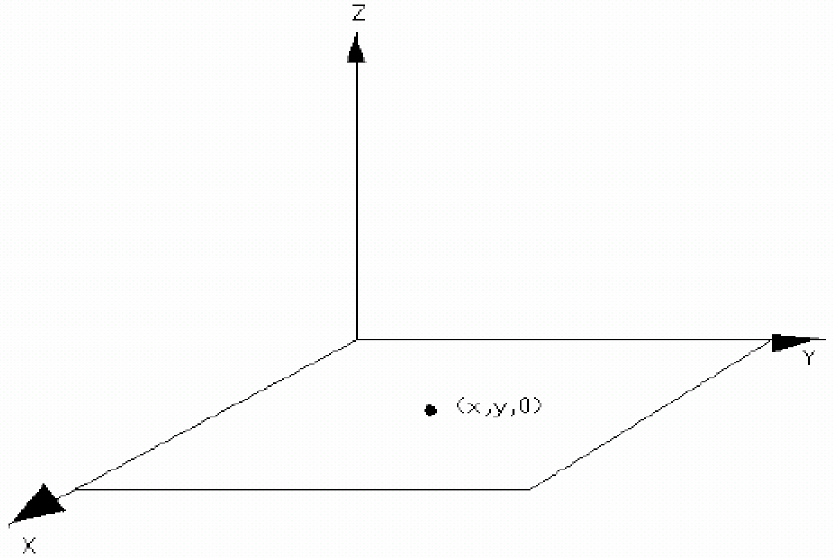
Entonces para cada punto del espacio R^3, existe un vector que va desde el origen al punto, razón por la cual la notación para vectores y puntos es indistinguible. Entonces nos referimos a un punto en R^3 como (x, y, z), de la misma forma que un vector con punto inicial en el origen.
Los ejes x, y, z se acostumbran a representarlos por el esquema siguiente:



Que es un sistema de mano derecha, en el cual el dedo índice apunta en la dirección positiva del eje *x*, el dedo medio (o corazón) apunta en la dirección positiva del eje *y* , y el dedo pulgar apuntara en la dirección positiva del eje *z*, este procedimiento debe realizarse con la mano derecha.

REPRESENTACIÓN DE PUNTOS EN R^3

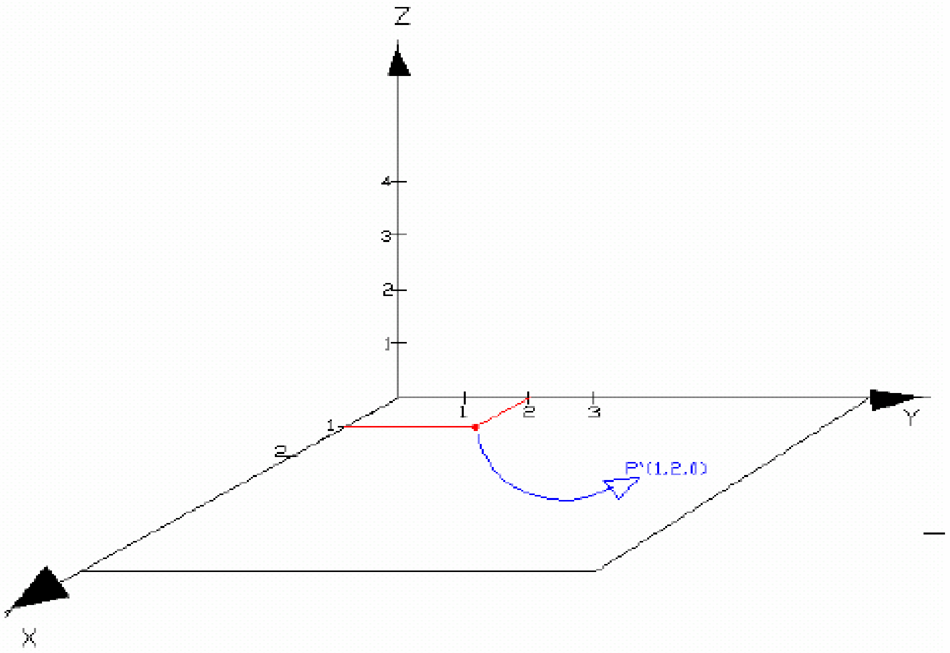
Para representar puntos en R^3, un procedimiento eficaz es representar inicialmente, las primeras coordenadas que representan un punto en el plano x, y (en el cual se basa todo el trabajo del capítulo anterior), y posteriormente ascender en forma paralela al eje z el número de unidades que indica la respectiva coordenada.



Ejemplo

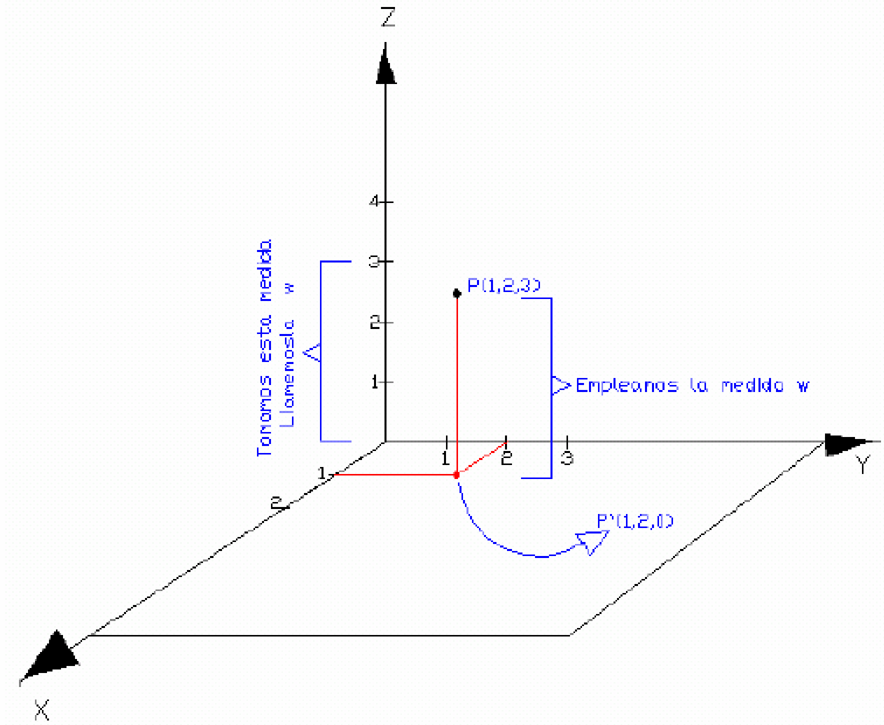
Representar el punto $(1,2,3)$

Inicialmente representamos el punto correspondiente al plano x, y es decir



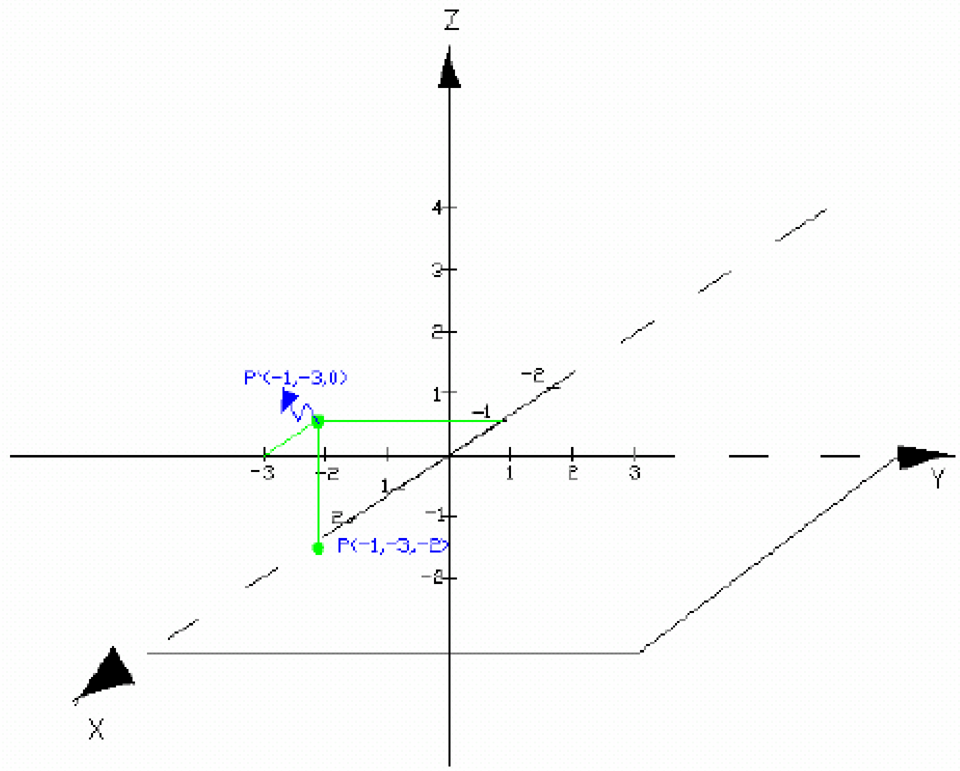
$P^{/}(1,2,0)$

Finalmente debemos subir tres unidades en forma paralela al eje z a partir del punto $P^{/}$



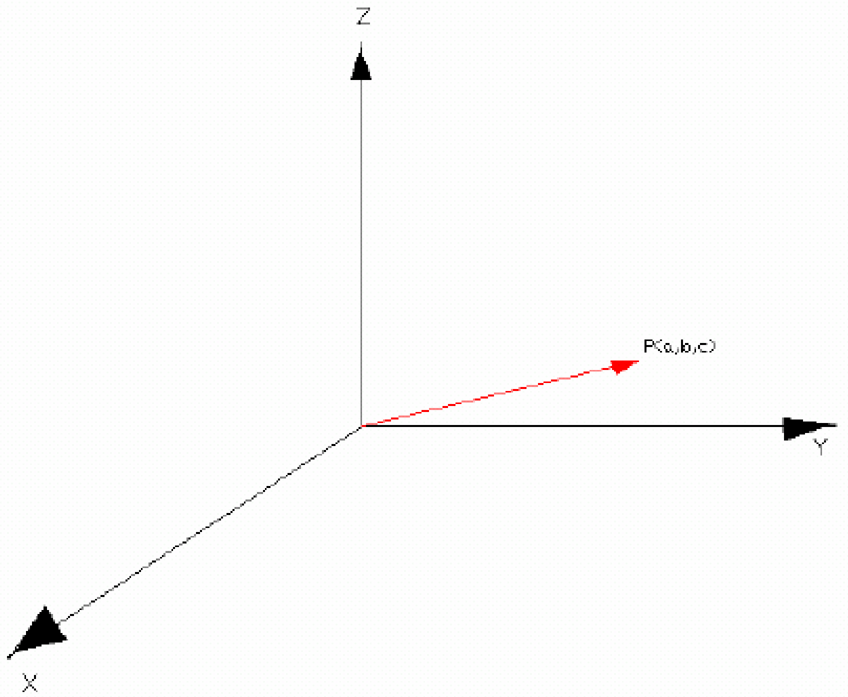
Ejemplo 2

Representar el punto $(-1,-3,-2)$

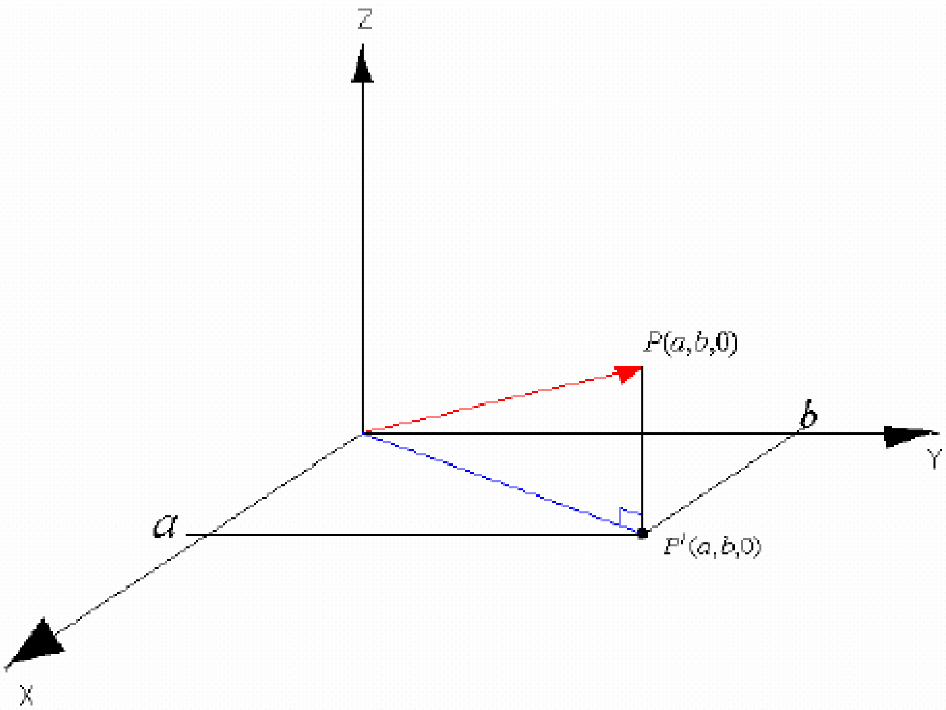


2.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS (Euclides)

Consideremos inicialmente los puntos $O(0,0,0)$, y $P(a,b,c)$



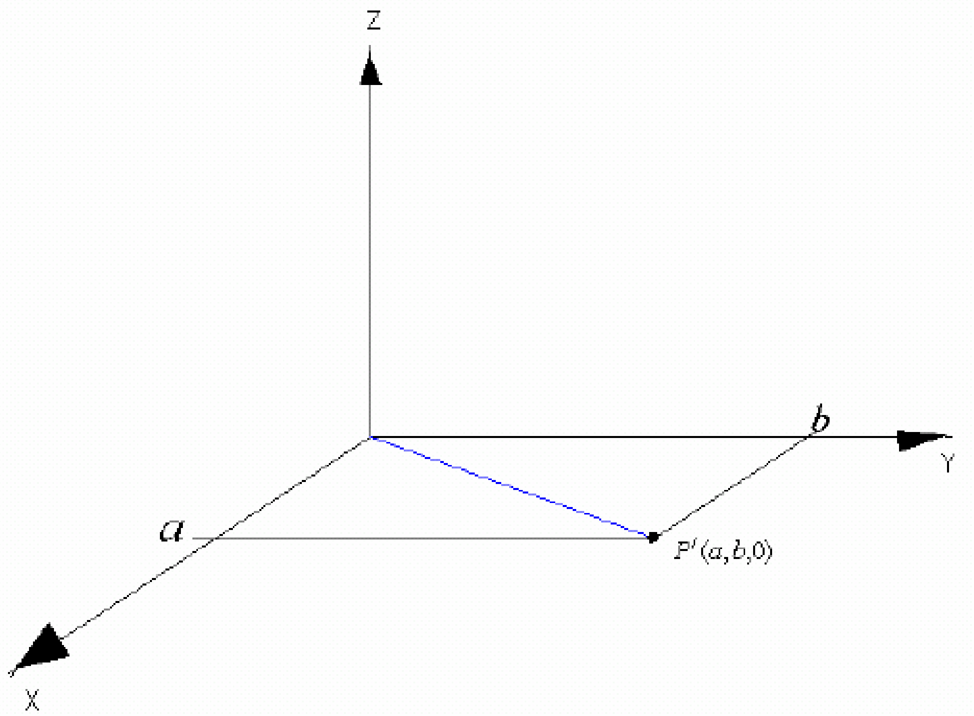
Para hallar la distancia entre O y P $(d(OP))$, consideramos inicialmente un punto $P^{/}(a,b,0)$



Para obtener el punto $P(a,b,c)$, a partir del punto $P'(a,b,0)$, requerimos desplazarnos paralelos al eje *z*, y al ser los tres ejes (x,y,z), perpendiculares entre si, este desplazamiento de P' a *P*, será perpendicular al plano (x,y), de aquí que el triangulo $OP'P$, sea rectángulo.
Para hallar la distancia *O* a *P*, podemos emplear el teorema de Pitágoras, que quedaría:

$$[d(OP)]^2 = [d(OP')]^2 + [d(P'P)]^2 \qquad (3)$$

La distancia P' a *P*, la conocemos, pues es el valor que debemos desplazarnos de *P* a P' en forma paralela al eje *z*, es decir $d(P'P) = c$
Para hallar $d(OP')$, nos remitimos al plano xy, es decir:



Aquí la distancia de O a P', es la hipotenusa representada por el triangulo OaP', por tanto:

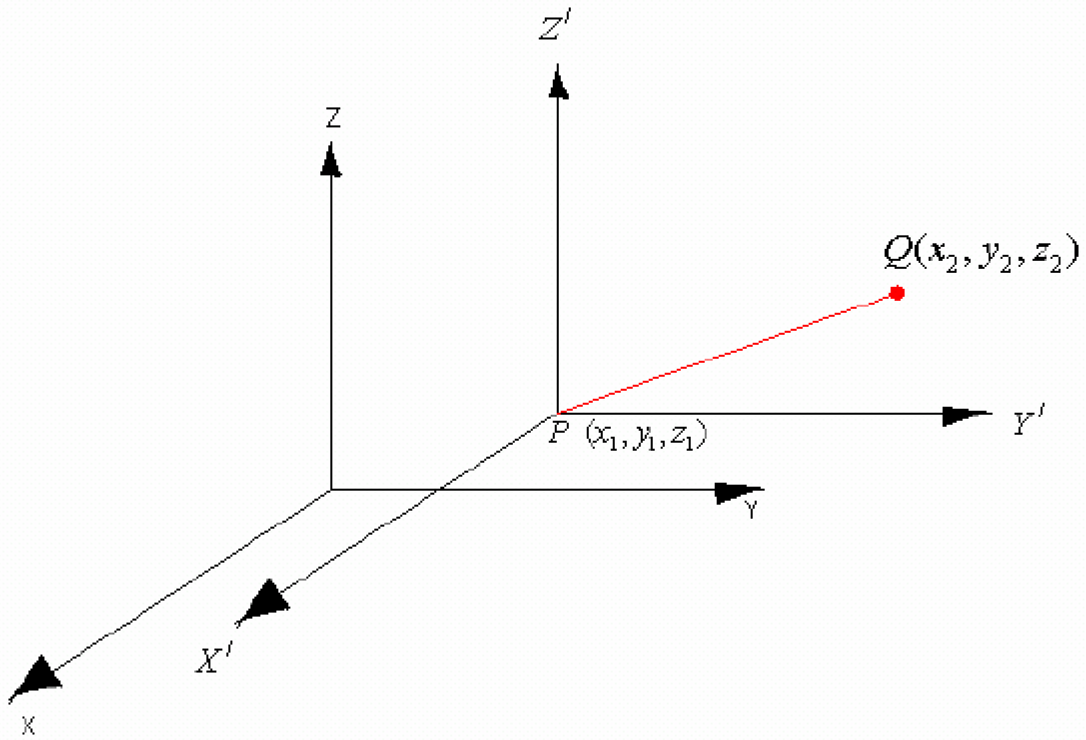
$$[d(OP')]^2 = a^2 + b^2$$

$$d(OP') = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Remplazando en la ecuación (3), tenemos:

$$[d(OP)]^2 = [d(OP')]^2 + [d(P'P)]^2$$
$$d(OP) = \sqrt{[d(OP')]^2 + [d(P'P)]^2}$$
$$d(OP) = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + (c)^2}$$
$$d(OP) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Para encontrar la distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$, procedemos de la misma forma que en R^2, es decir, consideremos una terna de ejes perpendiculares entre si (llamados $x'y'z'$), en los cuales el punto P corresponde al origen.



El procedimiento es similar al realizado en R^2, de donde

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ejemplo:

Encuentre la distancia entre los puntos $(2,1,-1)$ y $(3,-1,2)$

$$d(P,Q)=\sqrt{(2-3)^2+(1+1)^2+(-1-2)^2}$$
$$d(P,Q)=\sqrt{1+4+9}$$
$$d(P,Q)=\sqrt{14}$$

De la forma análoga a R^2, se tienen las definiciones para vectores equivalentes, vector unitario y magnitud.

Ejemplo.

Dado $u=(-2,3,1)$, halle un vector unitario en la misma dirección de *u*.

$$w=\frac{u}{|u|}$$
$$|u|=\sqrt{(-2)^2+(3)^2+(1)^2}=\sqrt{14}$$

Por lo tanto

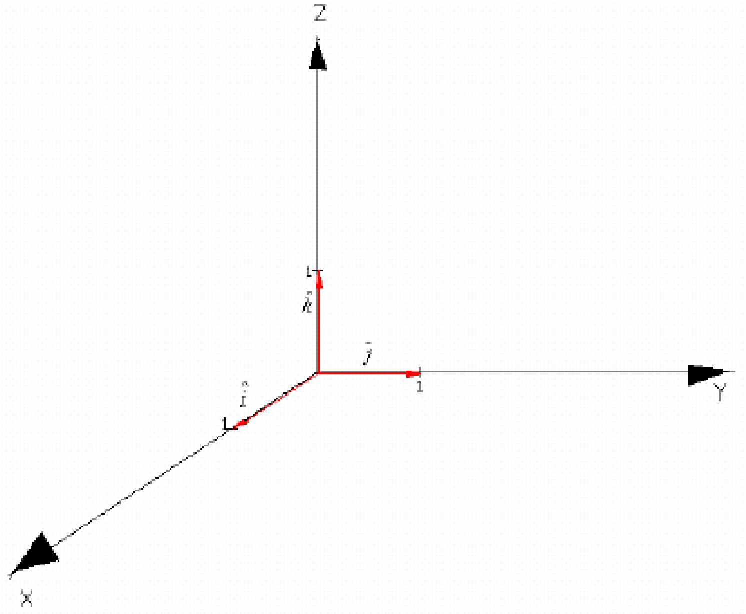
$$w=\frac{1}{\sqrt{14}}(-2,3,1)$$
$$w=\left(\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

<u>Definición</u>: la dirección de un vector *u* en R^3, esta dada por la por la dirección del vector unitario *w*, que va en la misma dirección de *u*. es decir $w=\frac{u}{|u|}$ [3]

2.2. VECTORES BASE

En R^3, contamos con tres vectores unitarios que van en la misma dirección de los ejes coordenados a saber:

$\hat{i}=(1,0,0)$; $\hat{j}=(0,1,0)$; $\hat{k}=(0,0,1)$



Que son de gran utilidad, ya que formalmente hablando, cualquier vector en R^3, puede ser escrito como la suma de ello tres, multiplicados por unas constantes apropiadas.

Ejemplo.

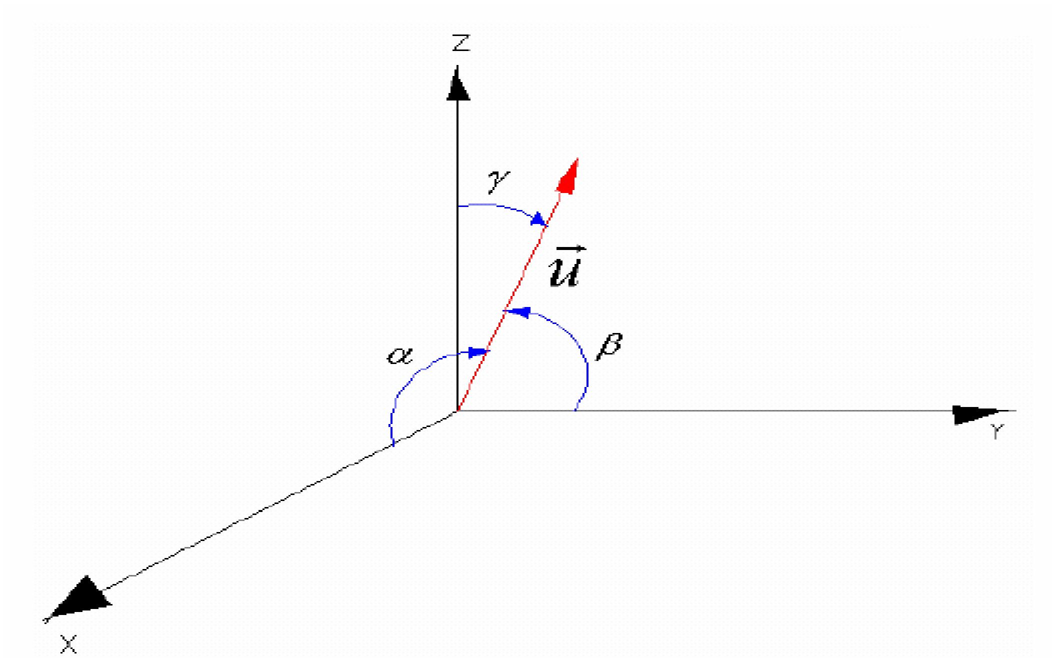
Exprese el vector $u=(2,-1,4)$, en términos de los vectores base $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$

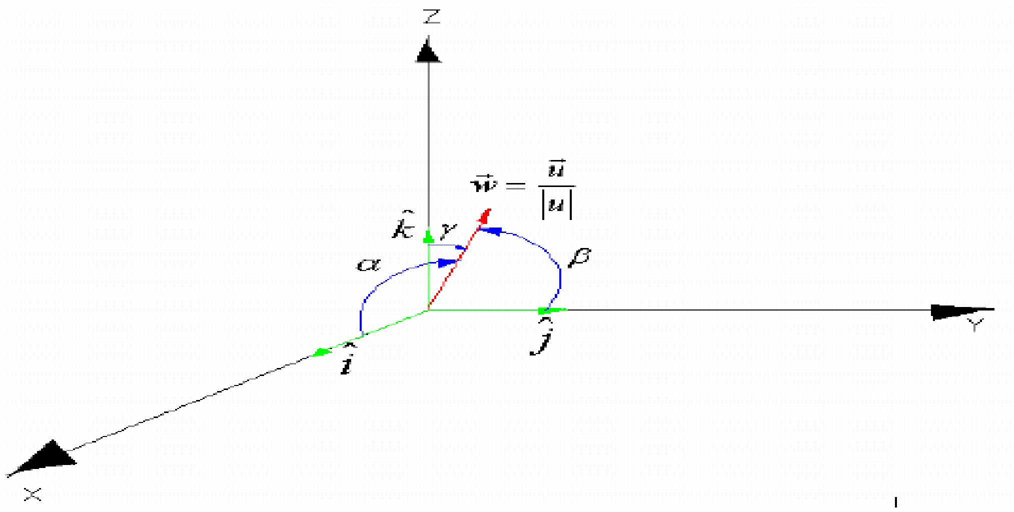
$$u=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$$

Donde c_1, c_2 y c_3 son constantes apropiadas, para nuestro caso:

$$(2,-1,4)=2(1,0,0)+(-1)(0,1,0)+4(0,0,1)$$
$$(2,-1,4)=2\hat{i}-1\hat{j}+4\hat{k}$$

Definición alternativa: la dirección de un vector u en R^3, esta dada por el ángulo α, β y γ, que son los ángulos que conforma en vector u con las partes positivas de los ejes *x*, y y z respectivamente.





Entonces

$$\cos\alpha = \frac{\hat{i}\cdot w}{|\hat{i}||w|} = \frac{(1,0,0)\cdot\left(\frac{a}{|u|},\frac{b}{|u|}+\frac{c}{|u|}\right)}{1} = \frac{a}{|u|}$$

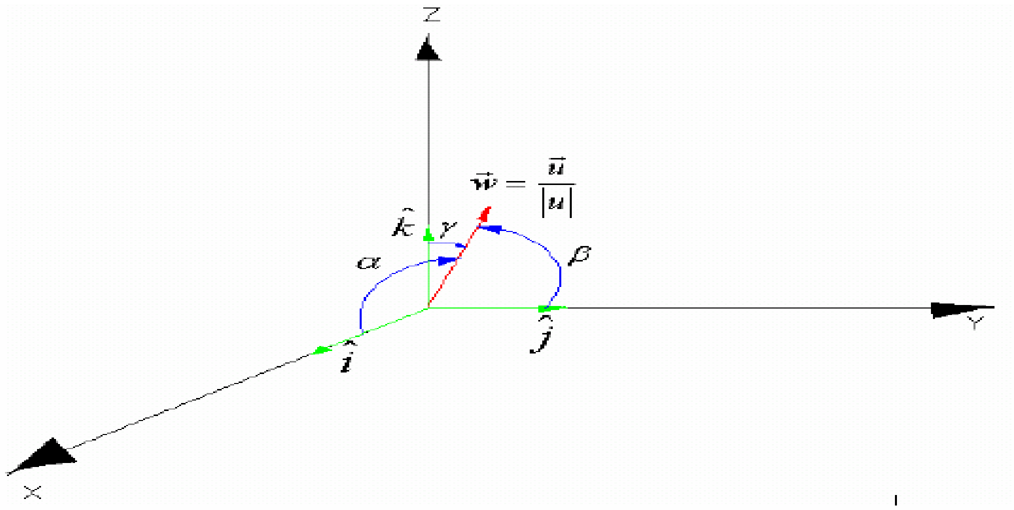
Note que con los vectores base $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ podemos encontrar estos mismos ángulos y será mas sencillo aun, si en lugar de trabajar con el vector dado u trabajamos con un vector unitario en las misma dirección de *u.*

Nuestro problema se limitaría a:

$u = (a,b,c)$

$|u| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$$w = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$



Entonces

$$\cos\alpha = \frac{\hat{\imath}\cdot w}{|\hat{\imath}||w|} = \frac{(1,0,0)\cdot\left(\frac{a}{|u|},\frac{b}{|u|}+\frac{c}{|u|}\right)}{1} = \frac{a}{|u|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\hat{j}\cdot w}{|\hat{j}||w|} = \frac{(0,1,0)\cdot\left(\frac{a}{|u|},\frac{b}{|u|}+\frac{c}{|u|}\right)}{1} = \frac{b}{|u|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\hat{k}\cdot w}{|\hat{k}||w|} = \frac{(0,0,1)\cdot\left(\frac{a}{|u|},\frac{b}{|u|}+\frac{c}{|u|}\right)}{1} = \frac{c}{|u|}$$

De aquí

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a}{|u|}\right)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{b}{|u|}\right)$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{c}{|u|}\right)$$

Los cósenos de estos ángulos son denominados "cósenos directores del vector *u*"

Ejemplo.

Dado el vector $u=(2,-1,4)$, encontremos los cósenos directores del vector y los ángulos α, β y γ.

Solución:

Primero hallemos un vector unitario en la misma dirección de u

$$|u|=\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(4)^4}=\sqrt{21}$$

Por lo tanto

$$w=\frac{u}{|u|}=\frac{1}{\sqrt{21}}(2,-1,4)=\left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{-1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

Ahora calcularemos el ángulo entre $\hat{i}$ y $\hat{w}$

$$\cos\alpha=\frac{\hat{i}\cdot w}{|\hat{i}||w|}=\frac{(1,0,0)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{-1}{\sqrt{21}}+\frac{4}{|\sqrt{21}|}\right)}{1}=\frac{2}{|\sqrt{21}|}$$

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$$

$$\alpha=64.12^{o}$$

Ángulo entre $\hat{j}$ y $\hat{w}$

$$\cos\alpha=\frac{\hat{j}\cdot w}{|\hat{j}||w|}=\frac{(0,1,0)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{-1}{\sqrt{21}}+\frac{4}{|\sqrt{21}|}\right)}{1}=\frac{-1}{|\sqrt{21}|}$$

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{21}}\right)$$

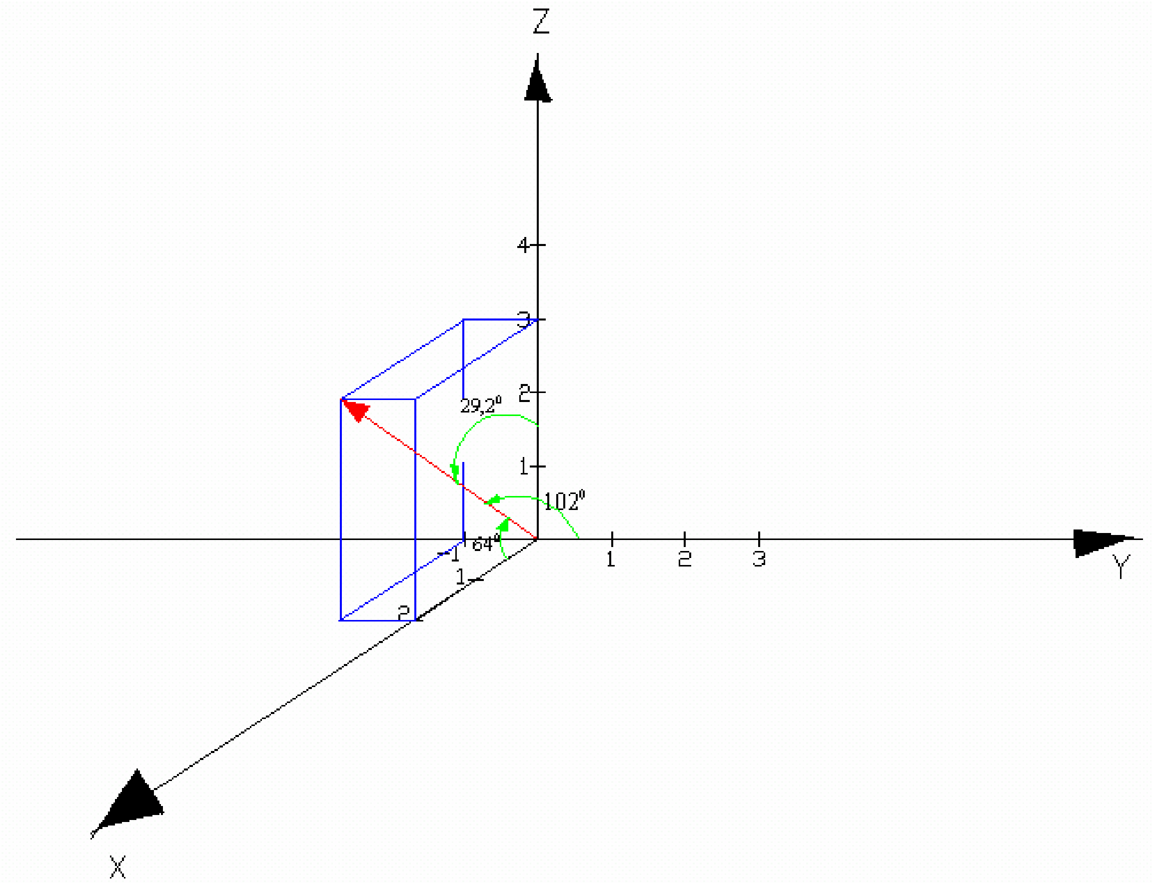
$$\alpha=102.6^{o}$$

Ángulo entre $\hat{k}$ y $\hat{w}$

$$\cos\alpha=\frac{\hat{k}\cdot w}{|\hat{k}||w|}=\frac{(0,0,1)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{-1}{\sqrt{21}}+\frac{4}{|\sqrt{21}|}\right)}{1}=\frac{4}{|\sqrt{21}|}$$

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

$$\alpha=29.2^{o}$$



Las definiciones de paralelismo, ortogonalidad, proyección de un vector sobre otro y componente de un vector sobre otro son análogos a las obtenidas para R^2

Opcional

Sea $u=(a,b,c)$ y $v=(d,e,f)$

$$|u|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$|u|=a^2+b^2+c^2$$
$$|v|=\sqrt{d^2+e^2+f^2}$$
$$|v|=d^2+e^2+f^2$$
$$u\cdot v=(a,b,c)\cdot(d,e,f)=ad+be+cf$$
$$v-u=(d,e,f)-(a,b,c)=(d-a,e-b,f-c)$$
$$|v-u|^2=|d-a|^2+|e-b|^2+|f-c|^2$$

Del teorema del coseno

$$\cos\theta=\frac{(d-a)^2+(e-b)^2+(f-c)^2-\left[a^2+b^2+c^2\right]-\left[d^2+e^2+f^2\right]}{-2|u||v|}$$

$$\cos\theta=\frac{\cancel{d}^2-2ad+\cancel{a}^2+\cancel{e}^2-2be+\cancel{b}^2+f^2-2cf+\cancel{c}^2-\cancel{a}^2-\cancel{b}^2-\cancel{c}^2-\cancel{e}^2-f^2}{-2|u||v|}$$

$$\cos\theta=\frac{-2ad-2be-2cf}{-2|u||v|}$$

$$\cos\theta=\frac{-\cancel{2}(ad+be+cf)}{-\cancel{2}|u||v|}$$

$$\cos\theta=\frac{u\cdot v}{|u||v|}$$

2.3 PRODUCTO VECTORIAL

Definición: Sea $u=(u_1,u_2,u_3)$ y $v=(v_1,v_2,v_3)$, entonces el producto vectorial (cruz) de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, notado por $u\times v$, es:

$u\times v=(u_2v_3-v_2u_3)\hat{i}-(u_1v_3-v_1u_3)\hat{j}+(u_1v_2-v_1u_2)\hat{k}$

cuyo resultado es un vector [4]

Llamemos a este último vector *w*, es decir $w=u\times v$ y realicemos estos dos productos escalares:

I. $w\circ u$

II. $w\circ v$

Veamos

$w\circ u=\langle u_2v_3-v_2u_3,-u_1v_3+v_1u_3,u_1v_2-v_1u_2\rangle\cdot\langle u_1,u_2,u_3\rangle$

$w\circ u=u_1u_2v_3-u_1v_2u_3-u_2u_1v_3+u_2v_1u_3+u_3u_1v_2-u_3v_1u_2$

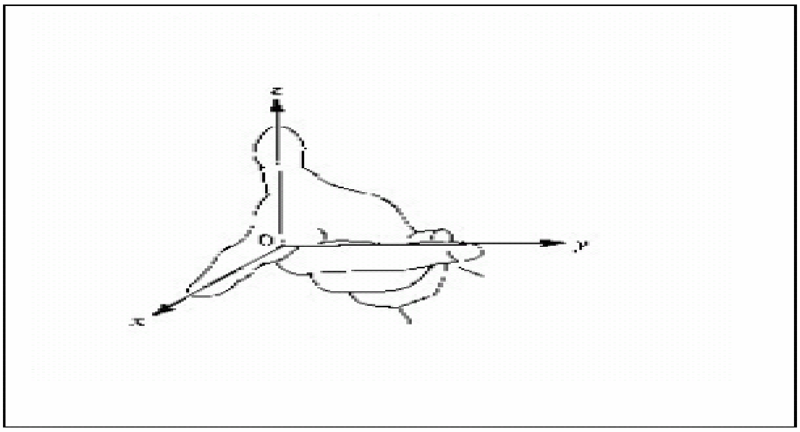
$w\circ u=0$

Ahora

$w\circ v=\langle u_2v_3-v_2u_3,-u_1v_3+v_1u_3,u_1v_2-v_1u_2\rangle\cdot\langle u_1,u_2,u_3\rangle$

$w\circ v=u_1u_2v_3-u_1v_2u_3-u_2u_1v_3+u_2v_1u_3+u_3u_1v_2-u_3v_1u_2$

$w\circ v=0$



Note que en ambos casos $w=u\times v$, producto escalar con *u* y *v* respectivamente, nos dio cero, lo que indica que *w* es perpendicular a *u* y además es perpendicular a *v*. En otras palabras $u\times v$ es perpendicular *a* u y a *v* simultáneamente.

La forma de encontrar la dirección de $u\times v$, es nuevamente empleando la regla de la mano derecha, es decir el dedo índice ira en la dirección de *u,* el dedo medio (o corazón) en la dirección de *v* por lo tanto el producto vectorial ira en la dirección que va el pulgar. Hagamos un par de ejemplos

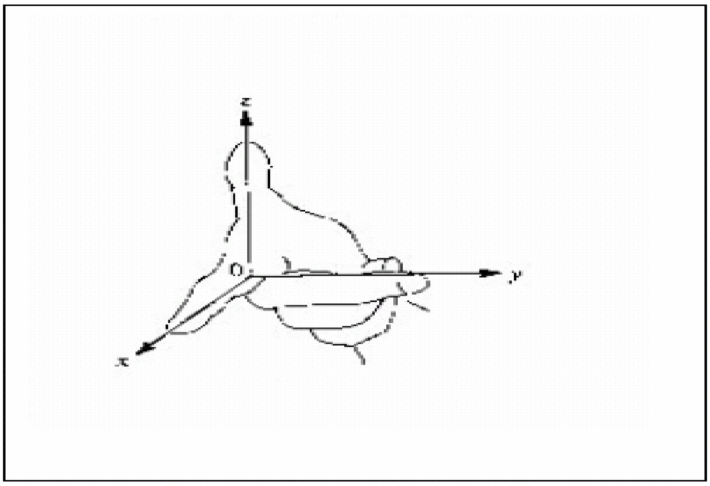
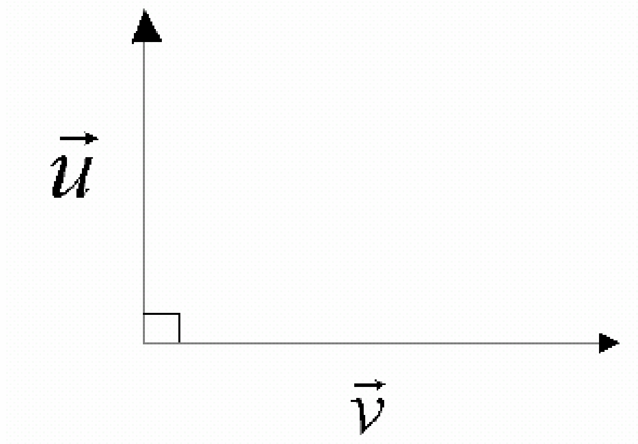


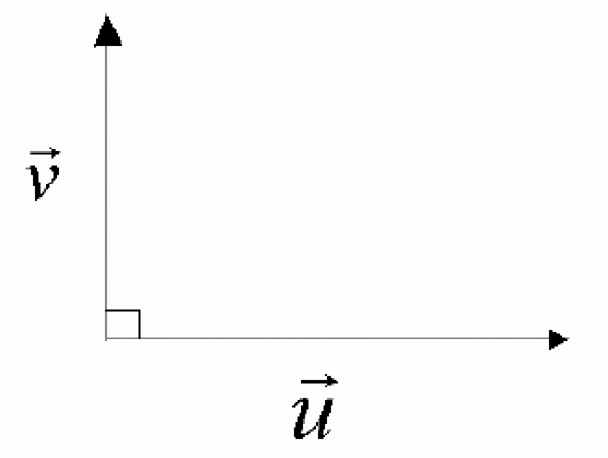
Imagen obtenida de: ALGEBRA LINEAL
Autor: Stanley Grossman. Quinta Edición.
Pag. 251

Ejemplo

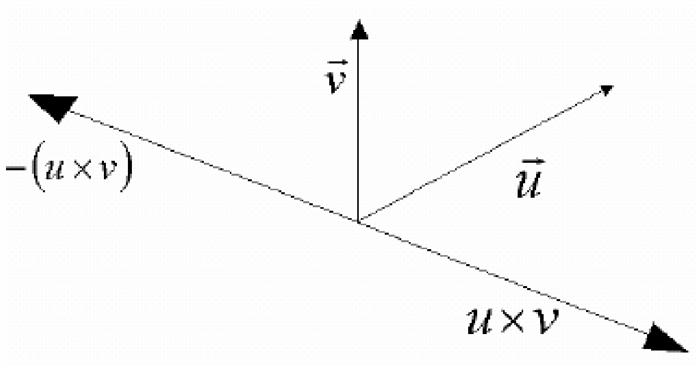
Indique la dirección de $u \times v$, dados los vectores según el dibujo



De lo anterior es claro que dados dos vectores u y v (no colíneales), existen dos vectores perpendiculares a ellos dos simultáneamente (realmente existen infinitos, basta con multiplicarlos por un escalar). El segundo vector va en la dirección opuesta al primero, es decir, si $w = u \times v$, entonces el otro vector será $-w = -(w \times v)$



Note que para obtener $-(u \times v)$ basta, con apuntar el dedo índice en la dirección de v, y el dedo medio en la dirección de u. De aquí, dado el orden en que se efectúe la regla de la mano derecha, se tiene que $u \times v = -(u \times v)$



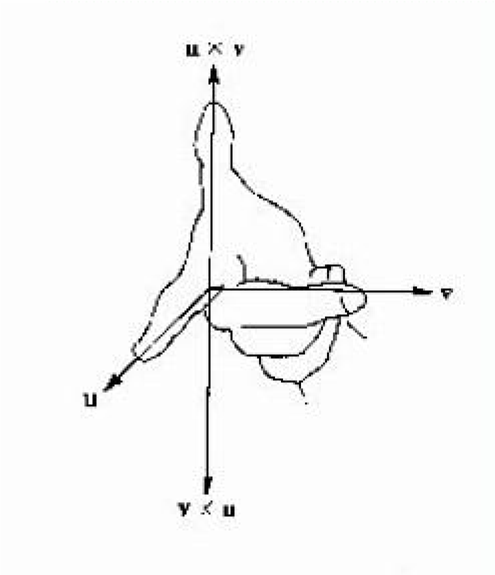


Imagen obtenida de: ALGEBRA LINEAL
Autor: Stanley Grossman. Quinta Edición.
Pag. 263

Algunas propiedades de producto vectorial

I. $u \times v = -(u \times v)$, (propiedad anti-conmutativa)

II. $(\alpha u) \times v = \alpha(u \times v)$

III. $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$, (Propiedad distributiva)

IV. $(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$, (Triple producto escalar de *u*, *v* y *w*) [5]

Ejemplo

Dados los vectores $u = (3,1,2)$ y $v = (-2,1,-1)$, halle un vector unitario que sea perpendicular a *u* y *v*.

Primero hallamos $u \times v$, que sabemos es perpendicular a *u* y a *v*.

$$u \times v = [(1)(-1) - (1)(2)]\hat{i} - [(3)(-1) - (-21)(2)]\hat{j} - [(3)(1) - (-2)(1)]\hat{k}$$
$$u \times v = -3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$
$$w = -3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$

Verifiquemos que $\hat{w} \cdot \hat{u}$ y $\hat{w} \cdot \hat{v}$, sean cero:

$$w \cdot u = (-3,-1,5) \cdot (3,1,2) = -9 - 1 + 10 = 0$$
$$w \cdot v = (-3,-1,5) \cdot (-2,1,-1) = 6 - 1 - 5 = 0$$

Ahora hallemos el vector unitario de la misma dirección de $\hat{w}$

$$|w| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (5)^2}$$
$$|w| = \sqrt{35}$$

Por lo tanto

$$z=\frac{w}{|w|}$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{35}}(-3,-1,5)$$

$$z=\left(\frac{-3}{\sqrt{35}},\frac{-1}{\sqrt{35}},\frac{5}{\sqrt{35}}\right)$$

Nota: el producto vectorial tiene sentido únicamente en R^3

PROBLEMAS

1. Encuentre la magnitud y dirección de los siguientes vectores:

   a. $\vec{u} = (-2,5)$

   b. $v = \left(-\sqrt{5},-3\right)$

   Respuestas: a. $|u| = \sqrt{29}$; $\theta = 111.8^0$ b. $|v| = \sqrt{14}$; $\theta = 233{,}3^0$

2. Dados los vectores $\vec{u}_1 = (-1,3)$, $\vec{u}_2 = (-2,-3)$ y $\vec{u}_3 = (4,1)$, realice:

   a. $2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$

   b. $-2\vec{u}_3 + 4\vec{u}_2 - \vec{u}_1$

   Respuestas: a. $2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 = (4,15)$ b. $-2\vec{u}_3 + 4\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = (-15,-17)$

3. Dados los vectores $\vec{u}_1 = (-1,3)$ y $\vec{u}_2 = (4,1)$, encuentre en ángulo entre ellos.

   Respuesta: $\theta = 94{,}39^0$

4. Dado el vector $\vec{u}_1 = (-1,-8)$, encuentre un vector unitario en la misma dirección de $\vec{u}_1$.

   Respuesta: $\vec{w} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{65}}, \dfrac{-8}{\sqrt{65}}\right)$

5. Encuentre un vector $\vec{u}$, cuya magnitud y dirección sean la de $|u| = 2$; $\theta = \pi/4$

   Respuesta: $\vec{u} = \sqrt{2}\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j}$

6. Dados los vectores $\vec{u}_1 = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ y $u_2 = -\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$, encuentre:

   a. El ángulo entre $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$

   b. El producto escalar entre $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$

   c. El producto vectorial entre $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$

   Respuestas: a. $\theta = 44{,}48^0$ b. $(u_1 \bullet u_2) = 15$ c. $u_1 \times u_2 = 6\hat{i} + 10\hat{j} - 9\hat{k}$

7. Encuentre la magnitud y cósenos directores del vector dado.
   a. $u = \widehat{i} - \widehat{j} + 4\widehat{k}$
   b. $u = -2\widehat{i} - \widehat{j} - 4\widehat{k}$

Respuestas: a.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{18}}; \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{18}}; \cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{18}}$$
$$\alpha = 76{,}36^0; \beta = 103{,}63^0; \gamma = 19{,}47^0$$

b.

$$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{21}}; \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{21}}; \cos\gamma = \frac{-4}{\sqrt{21}}$$
$$\alpha = 115{,}87^0; \beta = 102{,}60^0; \gamma = 150{,}79^0$$

AUTOEVALUACION

1. Encuentre dos (2) vectores unitarios que sean ortogonales tanto a $u = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ como a $v = 4\hat{j} + 3\hat{k}$ (simultáneamente).
2. Dados $u = (1,-2,4)$ y $v = (2,-1,2)$, encuentre $proy_v u$
3. Sea $P = (-1,1,2)$ y $R = (0,1,3)$. Encuentre un vector unitario cuya dirección sea opuesta a la de $\overrightarrow{PR}$
4. Determine si los vectores dados son paralelos u ortogonales.
   $u = 4\hat{i} - 7\hat{j} - 6\hat{k}$, $v = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

SOLUCIÓN:

1. Por definición el vector buscado es precisamente el producto vectorial de $\hat{u}$ y $\hat{v}$, es decir,
   Sea $u = (2,1,-2)$ y $v = (0,4,3)$, entonces el producto vectorial (cruz) de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, notado por $u \times v$, es:
   $$u \times v = ((1)(3) - (4)(-2))\hat{i} - ((2)(3) - (0)(-2))\hat{j} + ((2)(4) - (0)(1))\hat{k} = 11\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}$$
   Ahora, este ultimo vector, lo hacemos unitario. Sea $\hat{w}_1$ este vector unitario, es decir,
   $$\hat{w}_1 = \frac{(11,-6,8)}{\sqrt{(11)^2 + (-6)^2 + (8)^2}} = \frac{(11,-6,8)}{\sqrt{221}} = \left(\frac{11}{\sqrt{221}}, \frac{-6}{\sqrt{221}}, \frac{8}{\sqrt{221}}\right)$$
   Finalmente, el otro vector unitario pedido es el que apunta en la dirección contraria, es decir, $\hat{w}_2 = -\hat{w}_1$. Entonces, $\hat{w}_2 = \left(-\frac{11}{\sqrt{221}}, \frac{6}{\sqrt{221}}, -\frac{8}{\sqrt{221}}\right)$.
   De manera que, $\hat{w}_1, \hat{w}_2$ son dos vectores unitarios que son ortogonales a $\hat{u}$ y $\hat{v}$ simultáneamente.
2. Dados $u = (1,-2,4)$ y $v = (2,-1,2)$, encuentre $proy_v u$
   $$proy_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right)\hat{v}$$
   $$u \cdot v = (1,-2,4) \cdot (2,-1,2) = 2 + 2 + 8 = 12$$
   $$|v|^2 = (2)^2 + (-1)^2 + (2)^2 = 9$$

$$proy_v u = \frac{12}{9}(2,-1,2)$$

$$proy_v u = \left(\frac{24}{9}, \frac{-12}{9}, \frac{24}{9}\right)$$

$$proy_v u = \left(\frac{8}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

3. Sea $P = (-1,1,2)$ y $R = (5,1,3)$.

Primero hallamos el vector en la misma dirección de $\overrightarrow{PR}$.

Sea $\hat{u} = \overrightarrow{PR} = (5+1, 1-1, 3-2) = (6,0,1)$

Ahora hallamos el vector unitario en la misma dirección de $\overrightarrow{PR}$. Sea este $\hat{w}$. Entonces,

$$\hat{w} = \frac{(6,0,1)}{\sqrt{(6)^2+(0)^2+(1)^2}} = \frac{(6,0,1)}{\sqrt{37}} = \left(\frac{6}{\sqrt{37}}, 0, \frac{1}{\sqrt{37}}\right)$$

Finalmente, el vector pedido, que va en la dirección opuesta, lo obtenemos multiplicando a $\hat{w}$ por (-1), es decir,

$$\hat{v} = -w = -\left(\frac{6}{\sqrt{37}}, 0, \frac{1}{\sqrt{37}}\right) = \left(-\frac{6}{\sqrt{37}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{37}}\right)$$

4. Determine si los vectores dados son paralelos u ortogonales.

$u = 4\hat{i} - 7\hat{j} - 6\hat{k}$, $v = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

Empleemos la relación del ángulo entre dos vectores, es decir:

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

$$(u \bullet v) = (4,-7,-6) \bullet (1,-2,3) = 4 + 14 - 18 = 0$$

Como el producto escalar es cero (0), los dos vectores son ortogonales.

3. MATRICES

Definición: Una matriz es un arreglo de filas y de columnas organizados de manera tal, que cada entrada contiene una determinada información.

Notación: las matrices usualmente se notan con letras mayúsculas y en algunas ocasiones con doble rayado.

Ejemplo:

Jorge un tendero de la zona registra la venta neta en Kg de cuatro (4) de los artículos más solicitados de su tienda, y los días en que estos ocurre. La información puede resumirse como:

	Lunes	Martes	Miercoles
Arveja	20	32	40
Papa	15	8	20
Yuca	10	12	15
Tomate	5	9	10

Note la información anterior, puede entenderse como un arreglo de información ordenada por medio de filas y columnas. Si las revisamos verticalmente (es decir, por columnas), la primera nos brinda la información de la cantidad (en Kg.) vendidos de los cuatro (4) artículos el día lunes, la columna dos (2) la del día martes y la tres las del día miércoles.

Ahora, si revisamos la misma tabla en forma horizontal, la primera fila nos indicara la cantidad de Kg de arveja vendido en los días lunes martes y miércoles. Igual ocurre en la segunda fila donde la información suministrada sería la de la papa y así sucesivamente para la yuca y el tomate.

La información anterior podríamos representarla de la siguiente forma.

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 32 & 40 \\ 15 & 8 & 20 \\ 10 & 12 & 15 \\ 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Donde el significado de las columnas y filas es el mismo que el especificado anteriormente.

Presenta la ventaja de haberse extraído la información relevante, lo que permite eliminar los rótulos o etiquetas de columnas y filas

ENTRADAS DE UNA MATRIZ

Regresemos al ejemplo anterior.

La cantidad de yuca vendida por Jorge el día martes y miércoles respectivamente es 12 y 15 Kg.

La información de los 12 Kg. de yuca vendidos el dia martes, se halla en la fila 3 y en la columna 2. De la misma forma los 15 Kg de yuca del día miércoles se encuentran en la fila 3 y en la columna 3.

El numero de datos contenidos en la tabla 1, es de 12 que corresponde al producto del numero de elementos que hay en cada fila, por el numero de elementos que hay en cada columna, de esta forma en cada fila hay 3 elementos y cada columna hay 4 elementos.

De esta forma, si tenemos una matriz con m filas y n columnas, el número de entradas será $m \times n$, a esto lo denominaremos tamaño de la matriz.

Simbólicamente, seria:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} columna(1) & columna(2) & \cdots & columna(j) & \cdots & columna(n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} fila(1)\rightarrow \\ fila(2)\rightarrow \\ \vdots \\ fila(i)\rightarrow \\ \vdots \\ fila(m)\rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}
\end{array}$$

A partir de lo anterior, resulta natural pensar que para referirnos a una posición particular de la matriz será necesario hacer alusión al número de fila y al número de columna.

Si regresamos al ejemplo de Jorge, lo vendido el día martes (12 Kg de yuca), podríamos representarlo como $a_{32} = 12$, donde el numero 3 hace referencia al numero de fila y el 2 al numero de columna.

En general, una posición cualquiera de una matriz m x n se representa por a_{ij}, donde i representa la fila i-ésima de la matriz y j la columna j-ésima.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} columna(1) & columna(2) & \cdots & columna(j) & \cdots & columna(n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} fila(1)\rightarrow \\ fila(2)\rightarrow \\ \vdots \\ fila(i)\rightarrow \\ \vdots \\ fila(m)\rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}$$

En nuestro ejemplo de Jorge, las respectivas entradas

$a_{11} = 20$ $\quad a_{21} = 15$ $\quad a_{31} = 10$ $\quad a_{41} = 5$

$a_{12} = 32$ $\quad a_{22} = 8$ $\quad a_{32} \quad 12$ $\quad a_{42} = 9$

$a_{13} = 40$ $\quad a_{23} = 20$ $\quad a_{33} \quad 15$ $\quad a_{43} = 10$

3.1 OPERACIONES CON MATRICES

Mejoremos un poco el ejemplo de Jorge y supongamos que los datos contenidos en la matriz *A*, corresponden a las ventas de la primera semana de Enero, las ventas de la segunda semana son:

	Lunes	Martes	Miercoles
Arveja	12	14	18
Papa	20	18	25
Yuca	6	9	12
Tomate	10	10	12

Que podríamos representarlos por la matriz *B* así:

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 18 \\ 20 & 18 & 25 \\ 6 & 9 & 12 \\ 10 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Si en algún momento dado, quisiéramos conocer los Kilogramos de arveja vendidos en las dos semanas el día lunes, necesitamos sumar $20 + 12 = 32Kg$. De la misma forma podríamos obtener la cantidad de Kilogramos de cierto producto vendido en un día particular en esas dos semanas y tan solo bastaría sumar las respectivas posiciones en cada matriz.

3.1.1 SUMA DE MATRICES

Definición:

Sea A una matriz de m x n y B una matriz de m x n, de la forma

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{n1} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces la suma A+B es una nueva matriz, digamos C de tamaño m x n, de la forma:

$$C=A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{n2}+b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Es decir cada entrada de la matriz suma, se obtiene sumando los respectivos elementos a_{ij} y b_{ij}, de cada una de las matrices.

Nota: el tamaño de la matriz debe ser el mismo.

Ejemplo 1:

Sea $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, y $B=\begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$

Entonces $A+B=\begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+5 & 3+7 \\ 4+9 & 5+11 & 6+13 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 7 & 10 \\ 13 & 16 & 19 \end{bmatrix}$

Algunos autores acostumbran a emplear el término "suma componente a componente", para significar la suma de los respectivos a_{ij} de cada matriz.

Ejemplo 2:

Si Jorge quisiera saber lo que vendió en las dos semanas, deberá realizar la operación $A+B$, es decir:

$$A=\begin{bmatrix} 20 & 32 & 40 \\ 15 & 8 & 20 \\ 10 & 12 & 15 \\ 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \; ; \; B=\begin{bmatrix} 12 & 14 & 18 \\ 20 & 18 & 25 \\ 6 & 9 & 12 \\ 10 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 32 & 46 & 58 \\ 35 & 26 & 45 \\ 16 & 21 & 27 \\ 15 & 19 & 22 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3:

Dados $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$, realice *A+B*

Respuesta: no es posible, ya que el tamaño de las matrices **no** es el mismo. Los elementos b_{13} y b_{23}, no tienen elementos en A con quien sumarse.

Forma alternativa de representar una matriz

1. Forma de fila

   Consiste en pensar en cada fila de la matriz, como un vector con n componentes (si la matriz es de tamaño n x m)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ ò en forma de fila, $A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, donde:

$$a_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$a_m=\begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2. Forma de columnas

   Consiste en pensar cada columna de la matriz como un vector con m componentes, (si la matriz es de tamaño m x n)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$, ò en forma de columna

$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, donde $a_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ . . . $a_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

Nota: De estas definiciones es claro que, por ejemplo, si deseamos sumar dos matrices A y B, representada en alguna de las dos formas anteriores, se requiere que cada vector tenga el mismo número de componentes ,lo que coincide con la definición de suma de matrices dada inicialmente (esto implicaría, que el tamaño de las dos matrices sea el mismo).

Es decir sea:

$A = [\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n\ ]$ y $B = [\ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots \quad b_n\ ]$, entonces $A + B = [\ a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2 \quad a_3 + b_3 \quad \cdots \quad a_n + b_n\ ]$

Ejemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad ; \ B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 5 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Entonces A y B en forma de columnas serian:

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \qquad ; \ B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$

Donde $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

Y $\quad b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}$

De donde $A + B = [a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2 \quad a_3 + b_3]$

$$a_1 + b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$a_2 + b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$a_3 + b_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 16 \\ 7 & 13 & 18 \end{bmatrix}$, que obviamente debe coincidir con la suma componente a_{ij} componente.

Ejemplo 2:

Si expresamos A y B en forma de filas, tenemos:

$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, donde

$a_1=[1 \quad 3 \quad 5]$ $a_2=[2 \quad 4 \quad 6]$

$b_1=[4 \quad 6 \quad 11]$ $b_2=[5 \quad 9 \quad 12]$

Entonces $A+B=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}$, es decir

$a_1+b_1=[1 \quad 3 \quad 5]+[4 \quad 6 \quad 11]=[5 \quad 9 \quad 16]$

$a_2+b_2=[2 \quad 4 \quad 6]+[5 \quad 9 \quad 12]=[7 \quad 13 \quad 18]$, por lo tanto

$$A+B=\begin{bmatrix} 5 & 9 & 16 \\ 7 & 13 & 18 \end{bmatrix}$$

Observaciones

En algunas oportunidades para referirnos a una matriz A del tamaño m x n, también se emplea la notación:

$A=[a_{ij}]$ con $\begin{matrix} i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n \end{matrix}$

3.1.2 MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR

Sea una matriz de m x n, de la forma:

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, y α un número real, entonces el producto de α y A, que se nota αA, es una nueva matriz de m x n, en donde cada una de las entradas de la matriz original (A), se multiplica por α, veamos:

$\alpha A=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \cdots & \alpha a_{n1} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \cdots & \alpha a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$, o en forma equivalente $\alpha A=\alpha[a_{ij}]=[\alpha a_{ij}]$, para

$i=1,2,\ldots,m$

$j=1,2,\ldots,n$

Ejemplo 1:

Sea $a = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, realice $-4A$

Solución

$$-4A = -4\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 & -16 \\ -8 & -24 & -24 \\ -12 & -28 & -32 \end{bmatrix}$$

Nota: es claro que a partir de la definición de suma de matrices y de multiplicación por escalar, se tiene inmediatamente la resta de matrices es decir, $A - B = A + (-1)B$

Ejemplo 2:

Dadas $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, realice $A - B$

Solución:

$$(-1)B = -1\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Dado que $A - B = A + (-1)B$, entonces

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

3.1.3 MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Definición: Sea A una matriz de m x n y B una matriz de n x p, entonces el producto de de A y B, que lo notamos AB, en una nueva matriz digamos C de tamaño m x p, en donde cada entrada de la nueva matriz la obtenemos al multiplicar (producto punto) la fila i-ésima de A con la columna j-ésima de B, este resultado (que es un escalar) corresponde a la entrada c_{ij} de la matriz C.

Veamos.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Fila i-ésima

Columna j-ésima

$$AB = \begin{bmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}$$

Posición c_{ij}

$$c_{ij} = (a_{i1}a_{i2}\ldots a_{ij}\ldots a_{in})\cdot(b_{i1}b_{i2}\ldots b_{ij}\ldots b_{in})$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{i1} + a_{i2}b_{i2} + \ldots + a_{ij}b_{ij} + \ldots + a_{in}b_{mj}$$

Note que para el producto escalar anterior tenga sentido, el numero de elementos que hay en cada fila de A debe ser igual al numero de elementos que hay en la columna de B.

Como consecuencia de lo anterior, se tiene que para poder realizar el producto de 2 matrices, debemos verificar que el numero de columnas de A coincida con el numero de filas de B, ya que el numero de columnas de A nos indica el numero de elementos que tiene cada fila de A y por otro lado el numero de filas de B nos indica el numero de elementos que tiene cada columnas de B, y a partir de la definición de producto escalar, que requiere la igualdad de estos dos resultados.

Si la matriz A es de m x n y B de n x p, podemos encontrar el tamaño de la matriz, realizando la siguiente comparación:

$$\overbrace{mxn}^{A} \qquad \overbrace{nxp}^{B}$$

Esta igualdad verifica que es posible realizar el producto.

$$\overbrace{mxn}^{A} \qquad \overbrace{nxp}^{B}$$

Tamaño de la matriz producto $m \times p$

Ejemplo 1:

Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, realice $A \cdot B$

<u>Solución</u>

Primero verificamos que el producto *AB* tenga sentido, es decir,

$$\overbrace{2x3}^{A} \qquad \overbrace{3x3}^{B}$$

Como el número de columnas de A coincide con el número de filas de B, es posible realizar el producto.

El tamaño de la matriz producto será:

$$\overbrace{2x3}^{A} \qquad \overbrace{3x3}^{B}$$

2x3

Ahora llamemos C al producto de A y B, es decir $C = AB$, entonces C es de la forma:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Donde para poder hallar cada c_{ij} de C debemos realizar el producto punto entre la fila i de A y la columna j de B. hallémoslos:

$$c_{11} = [1 \quad 3 \quad 5] \cdot [-1 \quad 0 \quad 4] = -1 + 0 + 20 = 19$$

$$c_{12} = [1 \quad 3 \quad 5] \cdot [1 \quad 2 \quad 5] = 1 + 6 + 25 = 32$$

$$c_{13} = [1 \quad 3 \quad 5] \cdot [2 \quad 9 \quad 3] = 2 + 27 + 15 = 44$$

$$c_{21} = [2 \quad 4 \quad 6] \cdot [-1 \quad 0 \quad 4] == -2 + 0 + 24 = 22$$

$$c_{22} = [2 \quad 4 \quad 6] \cdot [1 \quad 2 \quad 5] = 2 + 8 + 30 = 40$$

$$c_{23} = [2 \quad 4 \quad 6] \cdot [2 \quad 9 \quad 3] = 4 + 36 + 18 = 58$$

Ubicamos los valores en C, tenemos:

$$AB = C = \begin{bmatrix} 19 & 32 & 44 \\ 22 & 40 & 58 \end{bmatrix}$$

<u>Observaciones</u>: el producto BA no tiene sentido, puesto que B es una matriz de 3x3 y A es una de 2x3, y no existe compatibilidad entre el numero de columnas de B y el numero de filas de A $(3 \neq 2)$

Ejemplo 2:

Sea $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ y $E = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Si llamamos $F = DE$, entonces F es de la forma $F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$, ya que

$\overbrace{2x2}^{D}$ $\overbrace{2x2}^{E}$ $\qquad$ $\overbrace{2x2}^{D}$ $\overbrace{2x2}^{E}$

Compatible $\qquad$ Tamaño de la matriz F

$$f_{11} = [1 \quad 5] \cdot [-1 \quad 4] = -1 + 20 = 19$$
$$f_{12} = [1 \quad 5] \cdot [2 \quad 6] = 2 + 30 = 32$$
$$f_{21} = [7 \quad 3] \cdot [-1 \quad 4] = -7 + 12 = 5$$
$$f_{22} = [7 \quad 3] \cdot [2 \quad 6] = 14 + 18 = 32$$

Por lo tanto

$$F = \begin{bmatrix} 19 & 32 \\ 5 & 32 \end{bmatrix}$$

Ahora si llamamos $G = ED$, entonces es de la forma $G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$, Ya que

$\overbrace{2x2}^{E}$ $\overbrace{2x2}^{D}$ $\qquad$ $\overbrace{2x2}^{E}$ $\overbrace{2x2}^{D}$

Compatible $\qquad$ Tamaño de la matriz F

$$ED = G = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$g_{11} = [-1 \quad 2] \cdot [1 \quad 7] = -1 + 14 = 13$$
$$g_{12} = [-1 \quad 2] \cdot [5 \quad 3] = -5 + 6 = 1$$
$$g_{21} = [4 \quad 6] \cdot [1 \quad 7] = 4 + 42 = 46$$

$g_{22} = [4 \quad 6] \cdot [5 \quad 3] = 20 + 18 = 38$

Por lo tanto

$$G = \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 46 & 38 \end{bmatrix}$$

Definición: Dos matrices A y B son iguales si y solo si tienen el mismo tamaño, y si además $a_{ij} = b_{ij}$, para cada i y j, en A y B respectivamente.

En otras palabras las entradas de A y de B debe ser iguales, para cada posición.

Regresando al ejemplo 2, note que $DE \neq ED$, ya que

$$DE = \begin{bmatrix} 19 & 32 \\ 5 & 32 \end{bmatrix} \qquad ED = \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 46 & 38 \end{bmatrix}$$

El tamaño coincide pero, la igualdad en las posiciones de la matriz no se tiene, es decir,

$19 \neq 13$

$32 \neq 1$

$5 \neq 46$

$32 \neq 38$

La anterior situación y la ilustrada en el ejemplo 1 nos dice que, en general, el producto de matrices no es conmutativo, es decir $AB \neq BA$.

Ya que se requiere:

1. Compatibilidad para realizar el producto, ya que, puede ser posible realizar AB, pero puede resultar que a partir de los tamaños de las matrices BA puede no ser posible.

2. Igualdad en las entradas de la matriz producto. Lo que en la mayoría de casos no se tiene.

3.2. OPERACIONES SOBRE MATRICES

Dada una matriz A de tamaño m x n, sobre ella es posible realizar, tres tipos de operaciones (que denominaremos elementales), los cuales son operaciones fila (o renglón). Estas operaciones elementales son:

1. Multiplicar una fila por un número diferente de cero.

2. Multiplicar una fila por un número y a este resultado sumarlo a otra fila.

3. Intercambiar dos filas.

Cuando aplicamos las operaciones elementales por fila a una matriz, obtenemos una nueva matriz (que conserva muchas de las propiedades de la original), y a este proceso lo denominamos "reducción por fila".

La notación que empleamos para referirnos a las operaciones elementales fila, son:

1. cf_i: significa que la fila i-ésima la multiplicamos, la multiplicamos por el numero real *c*.
2. $f_i \leftrightarrow f_j$: significa que intercambiamos la fila *i* con la fila *j*.
3. $f_i + cf_j$: significa que sustituimos lo que se haya en la fila *i* por el siguiente resultado: multiplicamos la fila *j* por *c* y este resultado se lo sumamos a la antigua fila *i*.

Ejemplo 1:

Considere la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, y realice la siguiente operación elemental:

- Multiplique la fila 1, por 4

Solución:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} 4f_1 \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

Dada la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, realice la siguiente operación elemental.

- Intercambie la fila 1 y 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} f_1 \leftrightarrow f_3 \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3:

Dada la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, realice la siguiente operación elemental:

- Multiplique la fila 1 por -2 y súmesela a la fila 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} f_2 - 2f_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Revise cuidadosamente la notación general dada para las operaciones elementales y contrástela con la dada en estos tres ejemplos. Esta es la forma en que debe representarse dichas operaciones.

La forma de notar la operación numerada como 3, es la que mayor dificultad presenta, y en la que se presentan los mayores errores, por lo que daremos unas características.

$f_i + cf_j$

La fila j no cambia, sigue siendo la misma. Por lo tanto se sugiere que se escriba antes de hacer la operación.

La fila j (la que no cambia), se encuentra a la "derecha" de la expresión que representa la operación elemental. La nueva fila *i*, es el resultado de multiplicar la fila *j* (que no cambia) por *c* y sumársela a la antigua fila *i*.

Aunque sabemos que la operación $f_i + cf_j$, es una suma y como tal es conmutativa, es decir, $f_i + cf_j = cf_j + f_i$, significaría que la fila *i* (no cambia) y la nueva fila *j* se obtendrá la antigua fila *j* por *c* y sumándosela a la fila *i*. Lo que claramente es distinto.

Por esta razón es muy necesario ser muy cuidadosos, en el momento de escribir una operación elemental.

Considere la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix}$, y realice en ella la siguiente operación: $f_2 + 3f_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix} f_2 + 3f_1 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 14 & 27 \end{bmatrix}$$

Ahora de la misma matriz, realice la siguiente operación: $3f_1 + f_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix} 3f_1 + f_2 \begin{bmatrix} 8 & 14 & 27 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Que obviamente produce matrices distintas.

<u>Sugerencia:</u> lea con atención e interiorice los resultados de la forma en que se notan las operaciones elementales, porque como observo, el intercambiar el orden de una operación como $f_i + cf_j$ produce matrices <u>distintas</u>.

Ejemplo 4:

Dada la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, realice en el orden dado las siguientes operaciones elementales:

1. Multiplique la fila 1 por ½

2. multiplique la fila 1 por -5 y el resultado súmeselo a la fila 2.

3. sume la fila 1 y la 3 y el resultado será la nueva fila 3.

Solución:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{2}f_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} f_2 - 5f_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-11}{2} & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} f_3 + f_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-11}{2} & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

3.2.1 FORMA ESCALONADA Y FORMA ESCALONADA REDUCIDA.

Definición: Una matriz A de m x n se encuentra en la forma escalonada (o escalonada por renglón) si cumple:

a. cualquier fila que este totalmente compuesta por ceros se encuentra en la parte inferior.

b. En cada fila distinta de cero, la primera entrada distinta de cero (denominada entrada principal o pivote) se encuentra en una columna a la izquierda de cualquier entrada principal debajo de ella.[6]

Ejemplo:

Las siguientes matrices se encuentran en forma escalonada

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad ; \; C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Definición: una matriz A de tamaño m x n, se encuentra en la forma escalonad reducida, si además de esta en la forma escalonada se tiene:

a. Todos los pivotes son 1

b. Todos lo elementos por encima y por debajo de los pivote son cero.

Ejemplo:

Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada reducida

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad ; B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \ ; C=\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&0&1&3\end{bmatrix} \ ; D=\begin{bmatrix}1&0&5&3\\0&1&7&9\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Definición 3: Dos matrices son equivalentes por fila (o renglón) si existe una secuencia de operaciones elementales por fila que transforma a A en B

Ejemplo: reducir la matriz siguiente a la forma escalonada

$$\begin{bmatrix}2&1&-3\\4&3&1\\5&0&2\end{bmatrix}=A$$

Comenzaremos introduciendo ceros en la primera columna abajo del 2 principal (el pivote) en la primera fila.

$$\begin{bmatrix}2&1&-3\\4&3&1\\5&0&2\end{bmatrix} f_2-2f_1 \begin{bmatrix}2&1&-3\\0&1&7\\5&0&2\end{bmatrix} f_3-\frac{5}{2}f_1 \begin{bmatrix}2&1&-3\\0&1&7\\0&\frac{-5}{2}&\frac{19}{2}\end{bmatrix}$$

La primera columna ahora esta como la queremos, de modo que el siguiente paso es avanzar a ala siguiente fila y seleccionar la primera posición (vista de izquierda a derecha) que sea distinta de cero, este será nuestro nuevo pivote, en este caso el 1 de la siguiente fila.

Ahora, con este pivote creamos un cero en la parte inmediatamente inferior del pivote, es decir:

$$\begin{bmatrix}2&1&-3\\0&1&7\\0&\frac{-5}{2}&\frac{19}{2}\end{bmatrix} f_3+\frac{5}{2}f_2 \begin{bmatrix}2&1&-3\\0&1&7\\0&0&27\end{bmatrix}=B$$

La columna dos ya esta lista.

El paso siguiente será avanzar a la siguiente fila y en ella seleccionar la primero posición (vista de izquierda a derecha) distinta de cero, ese será nuestro nuevo pivote. Con este pivote creamos ceros en las posiciones que se encuentran por debajo de el. Para nuestro caso, no hay posiciones por debajo de el, por lo que allí finalizamos y la matriz obtenida se encuentra en la forma escalonada por fila.

Si a esta última matriz la llamamos B podemos afirmar a partir de la definición 3, que A y B son equivalentes por fila.

Ejemplo

Reducir la siguiente matriz a la forma escalonada reducida

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 5 & -1\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Comencemos trasformando en 1 la primera entrada de la matriz en la fila 1. (Este será nuestro pivote)

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & 5 & -1\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 2 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{4}f_1\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{4}\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1-3 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Proseguimos creando ceros en las posiciones que ese encuentran debajo de nuestro pivote

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{4}\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 2 & 0\end{bmatrix}f_2-3f_1\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{4}\\ 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{7}{4}\\ 2 & -3 & 2 & 0\end{bmatrix}f_3-2f_1\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{4}\\ 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{7}{4}\\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

La primera columna esta ahora como la queremos, de modo que el siguiente paso es avanzar en la siguiente fila y seleccionar la primera posición (vista de izquierda a derecha) que sea distinta de cero, este será nuestro nuevo pivote, en este caso el $\left(\frac{-3}{4}\right)$, de la segunda fila.

Ahora con este pivote creamos un cero en la posición que se encuentra por encima del pivote y creamos otro cero en la posición que se encuentra debajo del pivote, pero antes de esto debemos transformar nuestro pivote en 1.

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{4}\\ 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{7}{4}\\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\frac{-4}{3}f_2\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{4}\\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{-7}{3}\\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}f_1-\frac{1}{4}f_2$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{-7}{3}\\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}f_3+\frac{7}{2}f_2\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{-7}{3}\\ 0 & 0 & \frac{37}{3} & \frac{-23}{3}\end{bmatrix}$$

La columna 2 ya esta lista.

Ahora avanzamos a la tercera fila y seleccionamos como pivote, la primera entrada (vista de izquierda a derecha) distinta de cero, con este pivote debemos crear ceros en las posiciones que se encuentran por encima del pivote. Pero entonces debemos transformar el pivote en 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{37}{3} & \frac{-23}{3} \end{bmatrix} \frac{3}{37} f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-23}{37} \end{bmatrix} f_2 - \frac{11}{3} f_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{37} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-23}{37} \end{bmatrix} f_1 - \frac{1}{3} f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{20}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{37} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-23}{37} \end{bmatrix}$$

Con este último procedimiento finalizamos el proceso, ya que todas las posiciones por encima de este último pivote son cero, y habría que avanzar a la siguiente fila para seleccionar la primera entrada distinta de cero, pero al no haber más filas se tiene la finalización del proceso.

Note que una matriz que es escalonada reducida es a su vez escalonada, pero al revés, no necesariamente se tiene.

3.2.2 INVERSA DE UNA MATRIZ

Pensemos inicialmente el las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 6 & 2\end{bmatrix} \quad ; \; B=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{5}{9}\\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18}\\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Y realicemos el siguiente producto

1. *AB*

2. *BA*

Note que ambos productos están definidos, vamos con AB

Sea $C=AB$, entonces C es de la forma

$$C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}, \text{ donde}$$

$$c_{11}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{3}=1$$

$$c_{12}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{-8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}=\frac{-8}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{3}=0$$

$$c_{13}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{5}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{5}{9}+\frac{2}{18}-\frac{2}{3}=0$$

$$c_{21}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}=\frac{-1}{9}+\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=0$$

$$c_{22}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{-8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}=\frac{8}{9}+\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=1$$

$$c_{23}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{5}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{-5}{9}+\frac{4}{18}+\frac{1}{3}=0$$

$$c_{31}=\begin{bmatrix}0 & 6 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}=0+\frac{6}{9}-\frac{2}{3}=0$$

$$c_{32}=\begin{bmatrix}0 & 6 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{-8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}=0+\frac{6}{9}-\frac{2}{3}=0$$

$$c_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = 0 + \frac{6}{18} + \frac{2}{3} = 1$$

Por lo tanto:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora realicemos el producto *BA*

Sea $D = BA$, entonces *D* es de la forma:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}, \text{ donde}$$

$$d_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} + 0 = 1$$

$$d_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} - \frac{32}{9} + \frac{30}{9} = 0$$

$$d_{13} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{-2}{9} - \frac{8}{9} + \frac{10}{9} = 0$$

$$d_{21} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 0 = 0$$

$$d_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{6}{18} = 1$$

$$d_{23} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{-2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{18} = 0$$

$$d_{31} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} + 0 = 0$$

$$d_{32} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \frac{-2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{6}{3} = 0$$

$$d_{31} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Por lo tanto

$$D = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En los dos casos, el producto era posible y además nos dio la misma matriz. A esta matriz especial que contiene unos en su diagonal principal y ceros en las otras posiciones, la llamamos matriz identidad de orden *n* (I_n), y obviamos el *n* en el sub-índice cuando el contexto no de lugar a confusiones.

La matriz identidad podría ser representada como:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Definición: Una matriz *A* de m x n se dice cuadrada si $m = n$. Esto nos indica que el número de filas y columnas es el mismo.

Nota: la matriz identidad es una matriz cuadrada y el subíndice "*n*" nos indica el número de filas o columnas.

Un poco mas acerca de la matriz identidad

Regresemos al ejemplo inicial, y realicemos los productos *IA* y *AI*.

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Es decir $IA = A$

Y ahora *AI*

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Es decir $AI = A$

En otras palabra, la matriz identidad (o idéntica) realiza el papel del modulo de las matrices para la operación producto.

Recordemos en los números reales se encuentra la siguiente propiedad:

Dado $a \in R$, $\exists e \in R$, tal que $a \cdot e = a$ y $e \cdot a = a$

A este numero e lo denominamos "modulo" con respecto al producto y en el caso de los reales $e = 1$

Entonces la matriz identidad juega el papel de modulo en el espacio de matrices.

Ahora recordemos otra de las propiedades de los números reales:

Dado $b \in R$, con $b \neq 0$, $\exists e' \in R$, tal que $b \cdot e' = e$ y $e' \cdot b = e$

Es decir existe un real siempre que $(b \neq 0)$, tal que al multiplicarlo por *b* nos da el modulo.

A este número lo llamamos el inverso multiplicativo.

Dado $5 \in R$, existe $\frac{1}{5}$, talque $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$ y $\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$

Si revisamos más cuidadosamente los resultados obtenidos de *AB* y *BA,* tenemos:

$AB = I$

$BA = I$

Es decir la matriz *B* esta jugando del papel de inversa de la matriz *A,* ya que $AB = I$ y de la misma forma $BA = I$

Antes de proseguir es necesario decir que no siempre existe dicha matriz inversa, pero en caso de existir esta resulta única.

<u>Definición</u>: Sea *A* y *B* dos matrices de n x n y suponga que $AB = BA = I$, entonces *B* se denomina la inversa de *A* y se denota A^{-1}. Si *A* tiene inversa se dice que *A* es invertible.[7]

<u>Teorema</u>: Si una matriz A es invertible entonces su inversa es única.

Demostración: supongamos que A' y A'', son dos inversas de *A.* Debemos ver que $A' = A''$. A partir de la definición se tiene si A' es la inversa de *A,* entonces:

$AA' = A'A = I \qquad (1)$

Si además también A'' es una matriz inversa de *A,* entonces:

$AA'' = A''A = I \qquad (2)$

Ahora expresemos a A', en términos de *A* y A'', así:

$A' = A'I$, pero de (2) tenemos que $I = AA''$, de donde

$A' = A'I = \underbrace{A'(AA'') = (A'A)A''} = IA'' = A''$

Por ley asociativa de la multiplicación de matrices

Entonces $A' = A''$, y el teorema quedo demostrado.

<u>Teorema:</u> Si *A* y *B* son matrices invertibles de *n x n*. entonces *AB* es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demostración: lo que debemos demostrar es que existe una matriz *C* tal que $(AB)C = I = C(AB)$

Sea $C = B^{-1}A^{-1}$, veamos que esto verifica la igualdad:

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

Y $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

Donde hemos utilizado la asociatividad para manipular los paréntesis. Ahora dado que la inversa es única, se tiene que la inversa de *AB* es $A^{-1}B^{-1}$

¿Cómo encontrar la inversa de una matriz?

1. Podemos realizar operaciones por filas sobre A e I de manera simultanea, mediante la construcción de una matriz "aumentada" $[A|I]$, esta matriz es de la forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & A_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \multicolumn{4}{c|}{\underbrace{a_{n1} \quad a_{n2} \quad \cdots \quad a_{nn}}_{A_{nxn}}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1}_{I_n}} \end{array}\right]$$

2. Por medio de operaciones elementales, se lleva la matriz A a su forma escalonada reducida.

   Si esta forma escalonada reducida de A, coincide con la matriz identidad, entonces A es invertible.

   Si la forma escalonada de A contiene una fila de ceros, en la parte izquierda de la matriz a amentada, entonces A no es invertible.

   El procedimiento anterior recibe el nombre de "reducción de Gauss-Jordán para hallar la inversa"

   Ejemplo 1:

   Hallemos la inversa de la matriz A dada la inicio de esta sección, es decir:

   Dada $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, hallas A^{-1}

   Matriz aumentada $[A|I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] f_2+f_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{6}f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] f_1-2f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$f_3 - 6f_2\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]\frac{1}{3}f_3\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$f_1 + \frac{5}{3}f_3\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]f_2 + \frac{1}{6}f_3\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{18}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Como la matriz A puede se llevada por medio de operaciones elementales a la matriz identidad, la matriz que se encuentra a la derecha es la inversa de A es decir A^{-1} es:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{18}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Otra forma de hallar si *A* es invertible es la siguiente: "A es invertible, si es equivalente por filas a la matriz identidad"

Ejemplo 2:

Dada la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$, halle B^{-1}, si existe.

Matriz aumentada $[B|I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]f_1 \leftrightarrow f_2\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$-f_1\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]f_3 + 3f_1\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{8}f_2\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] f_1 + 2f_2\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$f_3 + 4f_2\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Aquí podemos detenernos, ya que, la ultima fila del lado izquierdo de la línea vertical, es cero, esto nos indica que no es posible reducir *B* a la matriz *I*.

3.2.3 MATRICES ELEMENTALES.

Definición: Una matriz elemental es cualquier matriz que puede ser obtenida al realizar una operación elemental por filas sobre una matriz identidad.[8]

A partir de la definición de operaciones elementales por fila, vemos que solo puede haber tres tipos de matrices elementales.

Las matrices elementales se encuentran notadas por la letra *E*.

Ejemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

E_1 es una matriz elemental ya que, la podemos obtener multiplicando la tercera fila de *I* por 4.

Es decir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 4f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$$

E_2 es una matriz elemental ya que, la podemos obtener multiplicando la fila 1 por -3 y sumándola a la fila 4: Es decir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_4 - 3f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E_3$$

E_3 es una matriz elemental ya que, la podemos obtener intercambiando la fila 3 por la fila 4: Es decir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_4 - 3f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inversa de la matriz elemental.

Como existen 3 tipos de matrices elementales, veamos como es la forma de cada una y cual es su inversa.

i. Matriz elemental obtenida al intercambiar dos filas.

Tomemos como referencia una matriz de 3x3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

ahora intercambiemos cualquier par de filas, digamos la primera y la tercera.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_1 \leftrightarrow f_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ y encontremos la inversa de esta ultima matriz.

Empleado el método de Gauss-Jordán:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$, como necesitamos que la primera entrada de la matriz sea distinta de cero intercambiamos la fila 1 y 3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$, la matriz del lado izquierdo ya es la matriz identidad, por consiguiente la del lado derecho es la matriz inversa.

$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Es decir la inversa de una matriz elemental de permutación (intercambio de filas) es ella misma.

ii. Matriz elemental obtenida al multiplicar una fila por un escalar.

Tomemos como referencia una matriz de 3x3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora multiplicamos la cualquiera de sus filas por el escalar $\alpha, (\alpha \neq 0)$. Digamos la fila 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \alpha f_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces la inversa de esta ultima matriz. Empleando el método de Gauss-Jordán

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como necesitamos que el segundo pivote sea 1, multiplicamos por el inverso multiplicativo de α, es decir $\dfrac{1}{\alpha}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \frac{1}{\alpha} f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz del lado izquierdo es la matriz identidad, por lo tanto la del lado derecho es la matriz inversa.

Tenemos por lo tanto que si

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Es decir, la inversa de una matriz elemental obtenida de la multiplicación de una fila, por un escalar, es otra matriz de la misma forma, salvo que en la entrada que se vio afectada por el escalar α, ahora se halla su inverso multiplicativo.

iii. Matriz elemental obtenida una fila *i* y sumársela a una fila *j.*

Tomemos como referencia una matriz de 3x3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora multipliquemos alguna de sus filas por un escalar y su resultado sumémoselo a otra de las filas. Digamos por ejemplo que multiplicamos la fila 2 por β y se la sumamos a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_1 + \beta f_2 \begin{bmatrix} 0 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y encontremos la inversa de esta última matriz. Empleando el método de Gauss-Jordán.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \beta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Note que lo único que hace falta es volver cero la posición que se encuentra arriba del segundo pivote. Para lograr esto hacemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \beta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] f_1 - \beta f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz del lado izquierdo ya es la matriz identidad, por lo tanto la del lado derecho es la matriz inversa, tenemos por lo tanto que si:

$E = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A partir de lo mostrado anteriormente, espero que sea evidente la forma de cada inversa dada la matriz elemental.

Ejemplo 1:

Encuentre la inversa de $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solución

$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ya que E^{-1} es una matriz obtenida al intercambiar la fila 1 y 2.

Ejemplo 2:

Encuentre la inversa de $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solución

$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ya que E_2, es una matriz obtenida al multiplicar la fila 3 por 5 y sumársela a la fila 2.

Ejemplo 3:

Encuentre la inversa de $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Solución

$$E_{3.}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$, ya que E_3, es una matriz obtenida al multiplicar la fila 3 por 1/3.

Importante: para realizar una operación elemental en una matriz A, se multiplica A por la por la izquierda por la matriz elemental adecuada.

Ejemplo:

Dada $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\-1&4&1\\0&6&2\end{bmatrix}$, sume la fila 1 a la fila 2 y después muestre esta operación como el producto de una matriz elemental y la matriz A.

Solución

$$\begin{bmatrix}1&2&-2\\-1&4&1\\0&6&2\end{bmatrix} f_2+f_1 \begin{bmatrix}1&2&-2\\0&6&-1\\0&6&2\end{bmatrix}$$

Ahora para ver esto como el producto de una matriz elemental y la matriz A, realicemos la operación f_2+f_1 sobre la matriz identidad y el resultado de esta operación será nuestra matriz elemental, es decir:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} f_2+f_1 \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$, por lo tanto si efectuamos el producto

$$E_1\cdot A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\-1&4&1\\0&6&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&6&-1\\0&6&2\end{bmatrix}$$

Ahora vamos a utilizar la multiplicación de matrices para obtener, un punto de vista alternativo acerca de la reducción por filas de las matrices.

Consideremos nuevamente la matriz

$A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\-1&4&1\\0&6&2\end{bmatrix}$ y reduzcámosla mediante operaciones elementales de fila hasta obtener su forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} f_2 + f_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{6} f_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} f_1 - 2f_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} f_3 - 6f_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{3} f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_1 + \frac{5}{3} f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_2 + \frac{1}{6} f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El resultado obtenido ya lo conocemos, es decir, la matriz A es equivalente por operaciones fila a la matriz identidad, por lo tanto es invertible, sin embargo eso no es lo que deseamos ver ahora. Veamos de izquierda a derecha las operaciones elementales que se efectúan sobre la matriz A, es tas son:

$f_2 + f_1$; $\frac{1}{6} f_2$; $f_1 - 2f_2$; $f_3 - 6f_2$; $\frac{1}{3} f_3$; $f_1 + \frac{5}{3} f_3$; $f_2 + \frac{1}{6} f_3$

Y apliquemos cada una de estas operaciones sobre la matriz idéntica, el resultado por definición es una matriz elemental.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_2 + f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} f_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_1 - f_2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_3 - 6f_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} = E_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = E_5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_1 + \frac{5}{3} f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_1 + \frac{1}{6} f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_7$$

Ya tenemos todas las matrices elementales, que nos permiten reducir la matriz A en la matriz identidad, ahora realicemos el siguiente producto:

$$E_7 \cdot E_3 \cdot E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Realicemos el producto de izquierda a derecha de dos en dos, es decir empezamos con $E_7 \cdot E_6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Continuando

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Seguimos

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-10}{3} & \frac{5}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{18} \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Seguimos

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-16}{3} & \frac{5}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{18} \\ 0 & -2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Seguimos

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Seguimos

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la última línea se tiene que la matriz de la izquierda (que es el resultado de realizar $E_7 \cdot E_6 \cdot E_5 \cdots E_1$) debe ser A^{-1}, ya que al realizar el producto de ella con A nos dio la matriz identidad. En general se tiene que:

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot E_{k-2} \ldots E_1 \cdot E_2 = A^{-1}$$

Es decir, que la inversa de una matriz A (si existe) se puede expresar como el producto de las matrices elementales. Pero note que ese producto finito de matrices empieza con la última matriz elemental y así sucesivamente hasta llegar a la primera matriz elemental (E_1). Además debe realizarse el producto de izquierda a derecha (recuerde que en general $AB \neq BA$).

Partamos nuevamente de la expresión:

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot E_{k-2} \ldots E_1 \cdot E_2 = A^{-1}$$

Y tomemos la inversa a ambos lados, es decir:

$$\left(E_k \cdot E_{k-1} \cdot E_{k-2} \ldots E_1 \cdot E_2\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1}$$

Del teorema que nos indica que $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$, se tiene su generalización, es decir:

$$\left(E_k \cdot E_{k-1} \cdot E_{k-2} \ldots E_1 \cdot E_2\right)^{-1} = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \ldots E_{k-2}^{-1} \cdot E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{\ -1}$$

Y por otro lado es claro que $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ (para ver esto, notemos que debemos tener que existe una matriz *X* tal que $A^{-1}X = I = XA^{-1}$, pero $A = X$ satisface estas ecuaciones de tal forma que A^{-1} es invertible y *A* es una inversa de A^{-1}. Dado que las inversas son únicas se tiene que $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$)

De lo anterior se tiene que

$$E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \ldots E_{k-2}^{-1} \cdot E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{\ -1} = A$$

Es decir, la matriz *A* también puede ser escrita como el producto de matrices elementales (mas concretamente de inversas de matrices elementales).

Veamos esto último, con el ejemplo que traíamos.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } E_6^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto } E_7^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora realicemos el siguiente producto

$E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \ldots E_6^{-1} \cdot E_7^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realicemos los productos de izquierda a derecha, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seguimos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seguimos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seguimos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seguimos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{-5}{3} \\ -1 & 4 & \frac{5}{3} \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

En conclusión, hemos visto que dada una matriz A, si esta es invertible, tanto A como su inversa pueden ser escritas como el producto de matrices elementales (ya que, las inversas de las matrices elementales son a su vez matrices elementales.

MATRICES TRIANGULAR SUPERIOR Y TRIANGULAR INFERIOR.

Definición 1: una matriz de n x n se dice triangular superior si todas las componentes debajo de la diagonal principal son cero. Escrito de otra forma se tiene que a_{ij} esta debajo de la diagonal principal si $i > j$.[9]

Ejemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A y B son triangulares superiores.

Definición 2: una matriz de n x n se dice triangular inferior si todas las componentes arriba de la diagonal principal son cero. Escrito de otra forma, se tiene que a_{ij} esta debajo de la diagonal principal si $i < j$.

Ejemplo 1:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

C y D son triangulares inferiores.

Definición 3: una matriz de n x n cuyas entradas no diagonales son todas cero se denomina matriz diagonal. Escrito de otra forma se tiene que $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

Ejemplo

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Definición 4: una matriz diagonal en la cual todas sus entradas diagonales son iguales, se denomina una matriz escalar.

Escrito de otra forma

$$a_{ij} = \begin{cases} \beta & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Ejemplo:

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Nota: si el escalar de la diagonal es 1, es decir $\beta = 1$ (para $i = j$), la matriz se denomina matriz identidad.

3.2.4 LA FACTORIZACION LU

Al igual que factorizamos números naturales en un producto de otros numero naturales $(36 = 2 \cdot 3 \cdot 6)$, resulta conveniente factorizar matrices (en el caso que sea posible). Entonces diremos que cualquier representación de una matriz como el producto de dos o más matrices se denomina "factorización matricial"

Ejemplo:

$\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 32 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, es una factorización matricial.

Es claro que algunas factorizaciones son más útiles que otras. Aquí nos concentraremos en que dada una matriz A, podamos escribirla como el producto de una matriz triangular superior (la que denominamos U del ingles "Upper") y una matriz triangular inferior (la que denominamos L, del ingles "Lower")

Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Y por medio de operaciones elementales llevémosla a su forma escalonada. (NO escalonada reducida)

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} f_2-2f_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} f_3-3f_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

Note que U es una matriz triangular superior.

Ahora encontremos la matriz escalonada E_1 y E_2, que logran esta reducción de *A* a la forma escalonada *U*.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_2-2f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_3-3f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$$

Tenemos pues

$E_2 \cdot E_1 \cdot A = U$ (Verifíquemolo)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 14 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Realicemos los productos de izquierda a derecha

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Ahora tomemos nuevamente la ecuación $E_2 \cdot E_1 \cdot A = U$, y resolvámosla para hallar A para lograr esto, multiplicamos a izquierda por E_2^{-1}, es decir:

$E_2^{-1}E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_2^{-1}U$

Nos queda

$E_1 \cdot A = E_2^{-1}U$

Finalmente multiplicamos a la izquierda por E_1^{-1}

$E_1^{-1}E_1 \cdot A = E_1^{-1}E_2^{-1}U$

Entonces

$A = E_1^{-1} E_2^{-1} U$

Al producto $E_1^{-1}E_2^{-1}$ llamémoslo L y veamos que $E_1^{-1}E_2^{-1} = L$ es una matriz triangular inferior unitaria (con unos en la diagonal principal)

Como:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{se tiene que } E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{se tiene que } E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora realicemos el producto $E_1^{-1}E_2^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente verifiquemos que $A = LU$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Veamos otro ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Encuentre una matriz superior *U* y una matriz inferior *L* tal que $A = LU$

Primero reduzcamos A a su forma escalonada.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} f_2 - \frac{5}{3} f_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{22}{3} & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} f_3 - \frac{2}{3} f_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{22}{3} & -3 \\ 0 & \frac{-5}{3} & 5 \end{bmatrix}$$

$$f_3 + \frac{5}{22} f_2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{22}{3} & -3 \\ 0 & 0 & \frac{-51}{22} \end{bmatrix} = U$$

Ahora sabemos que L es de la forma $L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$, donde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_2 - \frac{5}{3} f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

Por lo tanto $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Note que otra manera de encontrar la inversa de este tipo de matriz elemental, es considerado la operación $f_2 + \frac{5}{3} f_1$ en lugar de $f_2 - \frac{5}{3} f_1$, de esta forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_3 + \frac{2}{3} f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_3 - \frac{5}{22} f_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{22} & 1 \end{bmatrix} = E_3^{-1}$$

Por lo tanto $E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$ será.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{22} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-5}{22} & 1 \end{bmatrix} = L$$

Por lo tanto

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-5}{22} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{22}{3} & -3 \\ 0 & 0 & \frac{-51}{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Observación:</u> la forma escalonada por renglón de una matriz no es única. Sin embargo, si A es una matriz invertible y por medio de la reducción de fila (matriz escalonada) podemos expresar a A como $A = LU$, entonces esta factorización si es única.

FACTORIZACIÓN $PA = LU$

Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & -8 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

E intentemos llevar a cabo el procedimiento que nos permite expresar a A como LU .

Reducción por fila.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & -8 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} f_2 - 2f_1 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} f_3 - 3f_1 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 13 & -2 \end{bmatrix}$$

Note que esta última matriz NO es triangular superior, sin embargo, si permutamos (intercambiamos) la fila 2 y la 3 si lo será. Veamos

$$f_2 \leftrightarrow f_3 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

Enfoquemos el problema de manera distinta. Si aplicamos sobre A el intercambio de la fila 2 y tres antes de inicial el proceso de reducción por filas, veremos que la matriz obtenida es directamente un matriz triangular superior. Ahora, esta operación de intercambio de la filas 2 y 3, la podemos lograr empleando una matriz elemental (que llamaremos matriz de permutación), así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_2 \leftrightarrow f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_1$$

Entonces si hacemos (antes de iniciar el proceso de reducción por filas) P_1A , resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & -8 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Y ahora reduciendo a la forma escalonada:

$$P_1 A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix} f_2 - 3f_1 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 13 & -2 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix} f_3 - 2f_1 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

Note que esta nueva matriz $(P_1 A)$ pudo reducirse a *U* sin realizar permutación. Ahora hallemos a *L*.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_2 + 3f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_3 + 2f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2^{-1}$$

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $P_1 A = LU$

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

La pregunta natural que debe seguir es ¿Por qué multiplicar a A por P_1 antes de inicial el proceso y no considerar la permutación como una matriz elemental mas en el procedimiento?

La respuesta a esta pregunta la podemos obtener a partir del procedimiento que iniciamos con la matriz A (en la primera parte de esta sección). Realicémoslo nuevamente. (Ignorando lo que hicimos anteriormente, es decir, $P_1 A = LU$).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & -8 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} f_2 - 2f_1 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} f_3 - 3f_1 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 13 & -2 \end{bmatrix}$$

$$f_2 \leftrightarrow f_3 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

Veamos la matriz $L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_2 + 2f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_3 + 3f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_2 \leftrightarrow f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E_3^{-1}$$

Entonces $L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$, seria

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando la multiplicación de izquierda a derecha

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq L$$

Esta última no es una matriz triangular inferior.

En general se tiene el siguiente resultado:

$P = P_n P_{n-1} P_{n-2} \ldots P_2 P_1$

Donde P es la matriz de permutación. La cual es el producto de las matrices de permutación elementales.

Esta P será útil en el momento en que conozcamos con anterioridad las permutaciones que deben realizarse. Cada permutación se lleva a cabo multiplicando a A por la izquierda por una matriz de permutación elemental, la que denotamos P_i.

Vamos a hablar de P en el caso en que sea necesario efectuar más de una permutación.

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & -15 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

Para reducir A por filas a la forma triangular superior primero intercambiamos los renglones 1 y 3, así:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & -15 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & -15 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} f_2-3f_1 \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_2 \leftrightarrow f_3 \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Al realizar esta reducción por filas fue necesario hacer dos permutaciones. Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_1 \leftrightarrow f_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_1 \leftrightarrow f_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_2$$

Entonces

$$P=P_2P_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí, que $PA=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & -15 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -15 & 4 \end{bmatrix}$

A esta ultima matriz *PA* nos permiten obtener una matriz triangular superior y triangular inferior sin hacer permutaciones adicionales. De aquí $PA=LU$.

Nota: si se elige una P diferente, entonces se obtiene matrices L y U diferentes.

¿Existe alguna forma más sencilla de obtener la factorización LU?

La respuesta es si. Suponga que A es una matriz de n x n que se puede reducir a una matriz triangular superior sin realizar permutaciones, entonces una forma mas sencilla para hallar las matrices L y U debe tener en cuenta lo siguiente:

1. la primera fila de la matriz U es la primera fila de la matriz A.

2. los elementos de la diagonal de la matriz L son todos 1.

3. los otros elementos distintos a los enunciados en los numerales 1 y 2 se presentan por medio de variables y su valor será determinado a partir del producto de matrices y de la igualdad de matrices.[10]

Ejemplo:

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Emplee el producto descrito anteriormente y encuentre la matriz L y U.

Desarrollo:

Sabemos que L es de la forma:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya que es una matriz triangular inferior unitaria.

U es de la forma:

$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix}$, ya que la primera fila de U es la primera fila de A.

Por lo tanto la ecuación $LU = A$, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Realizamos el producto matricial e igualando a cada entrada de la matriz A, tenemos:

$c_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$

$$c_{12} = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot [1 \quad \beta_1 \quad 0] = 2$$

$$c_{13} = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot [1 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = -2$$

$$c_{21} = [\alpha_1 \quad 1 \quad 0] \cdot [1 \quad 0 \quad 0] = \alpha_1 = -1$$

$$c_{22} = [\alpha_1 \quad 1 \quad 0] \cdot [1 \quad \beta_1 \quad 0] = 2\alpha_1 + \beta_1 = 4$$

Como $\alpha_1 = -1$, entonces $\beta_1 = 4 - 2\alpha_1$

$\beta_1 = 4 - 2(-1)$; $\beta_1 = 6$

$$c_{23} = [\alpha_1 \quad 1 \quad 0] \cdot [-2 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = -2\alpha_1 + \beta_2 = 4$$

Como $\alpha_1 = -1$, entonces $\beta_2 = 1 + 2\alpha_1$

$\beta_1 = 1 + 2(-1)$; $\beta_2 = -1$

$$c_{31} = [\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad 1] \cdot [1 \quad 0 \quad 0] = \alpha_2 = 0$$

$$c_{32} = [\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad 1] \cdot [2 \quad \beta_1 \quad 0] = \alpha_2 + \alpha_3\beta_1 = 6$$

Como $\alpha_2 = 0$, y $\beta_1 = 6$, entonces $\alpha_3 = \dfrac{6 - 2\alpha_2}{\beta_1}$

$\alpha_3 = \dfrac{6 - 2(0)}{6}$; $\alpha_3 = 1$

$$c_{33} = [\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad 1] \cdot [-2 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = -2\alpha_2 + \alpha_3\beta_2 + \beta_3 = 2$$

Como $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $\beta_2 = -1$, entonces $\beta_3 = 2 - 2\alpha_2 - \alpha_3\beta_2$

$\beta_3 = 2 + 2(0) - 1(-1)$; $\beta_3 = 3$

Armando las matrices L y U a partir de los resultados obtenidos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Definición: sea A una matriz de m x n, entonces la transpuesta de A, que se denota A^t, es una matriz de n x m en donde la fila i de A^t es la columna i de A.

Es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$, entonces

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{nxm}$$

Ejemplo 1:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, halle A^t

Solución:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

Sea $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 14 \\ 4 & 10 & 16 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$, halle B^t

Solución:

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

Definición 2: Una matriz A de n x n se dice simétrica si $A = A^t$

Ejemplo 1:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, entonces $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2:

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, entonces $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

4. DETERMINANTES

Definición: Sea A una matriz de 2x2, de la forma

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces el determinante de A, que se denota $\det A$ ò $|A|$ es:

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Ejemplo:

Encuentre el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Solución:

$|A| = (1)(4) - (3)(2) = 4 - 6 = 2$

Ejemplo 2:

Encuentre el determinante de $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Solución:

$|B| = (-1)(4) - (-2)(5) = -4 + 10 = 6$

Teorema: si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces A es invertible si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, en cuyo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, entonces A no es invertible. (ver demostración en apéndice)

Definición: sea A una matriz de 3x3 de la forma

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces el determinante de A es:

$$A = a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad [11]$$

Note que se uso lo que se sabia de un determinante de 2x2, para definir el de 3x3. de la misma forma se emplean estos resultados para definir de manera inductiva el determinante de una matriz *n x n*.

Ejemplo:

Sea $A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$, calcule $|A|$

Solución:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}-(-5)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=2(4-27)+5(8-18)-1(36-12)=-120$$

Otra forma para calcular determinantes de 3x3

Dada A como antes, es decir:

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ Se escribe A nuevamente y al lado derecho se re-escriben sus dos primeras columnas

$$\begin{array}{c} - \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \\ + \end{array}$$

$$|A|=[a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}]-[a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{21}a_{12}]$$

$$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ahora se calculan los seis productos indicados, por las flechas, teniendo cuidado de anteponer el signo menos $(-)$en los productos que llevan las flechas hacia arriba, y el signo mas $(+)$ en los productos que llevan las flechas hacia abajo. Finalmente se suman estos seis productos.

Advertencia: este procedimiento únicamente es valido para determinantes de 3x3

Ejemplo:

Sea $B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix}$, calcule $|B|$

Solución:

Escribimos $\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & -3 & 4 & 7 \end{array}\right.$

$$|B| = (-1)(5)(-3) + (3)(1)(4) + (2)(2)(7) - (4)(5)(2) - (7)(1)(-1) - (-3)(2)(3)$$
$$|B| = 15 + 12 + 28 - 40 + 7 + 18 = 40$$

Definición: Sea una matriz de n x n, entonces el menor *ij* de *A*, que se nota M_{ij}, es una matriz de tamaño $(n-1)x(n-1)$, obtenida de A al suprimir la fila *i* y la columna *j*.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & -2 & -6 \\ 3 & 7 & -3 & 7 \\ 4 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Encuentre M_{31}, M_{12}, M_{24} y M_{42}

Solución:

Suprimiendo la tercera fila y la primera columna hallamos M_{31}

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

De la misma forma:

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 7 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$M_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_{42} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Definición: sea A una matriz de n x n, entonces el cofactor *ij* de *A*, denotado por A_{ij}, esta dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}| \qquad [12]$$

Note que el cofactor es un número que cambia de signo dependiendo del exponente $i + j$. Además, de ser claro que la notación $|M_{ij}|$ hace referencia al determinante del menor M_{ij}.

Se tienen, pues, dos situaciones para el signo del factor, esta son:

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & si \quad i+j \quad \text{es par} \\ -1 & si \quad i+j \quad \text{es impar} \end{cases}$$

Ejemplo:

Dada la matriz A del ejemplo anterior, es decir

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & -2 & -6 \\ 3 & 7 & -3 & 7 \\ 4 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, encuentre A_{31}, A_{12}, A_{24} y A_{42}

<u>Solución</u>

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = |M_{31}| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ 8 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 336$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 7 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 256$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}|M_{24}| = |M_{24}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -64$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2}|M_{42}| = |M_{42}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Tenga cuidado con el signo del cofactor.

Definición: sea A una matriz de n x n, de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces el determinante de *A,* esta dado por:

$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$ ó

$\det A = |A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + \ldots + a_{2n}A_{in}$ ó

$\det A = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \ldots + a_{in}A_{in}$

Para $i = 1,2,3,\cdots,n$

Es decir, el determinante de A puede ser calculado empleando para ello cualquier fila de A y realizando su expansión en cofactores.

También es cierto que:

$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + \ldots + a_{n1}A_{n1}$ ó

$\det A = |A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + \ldots + a_{n2}A_{n2}$ ó

$\det A = |A| = a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$

Para $j = 1,2,3,\cdots,n$

Es decir, el determinante de A puede ser calculado empleando para ello cualquier columna de A y realizando su expansión en cofactores.

Ejemplo:

Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & -2 & -6 \\ 3 & 7 & -3 & 7 \\ 4 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, calcule el $\det A$

Solución:

De la definición anterior se tiene que podemos calcularlo por cualquier fila o columna.

Vamos a calcularlo por la fila 3 y por la columna 4. En ambos casos nos deben coincidir los resultados.

Por la fila 3:

$$|A| = 3A_{31} + 7A_{32} + (-3)A_{33} + 7A_{34}$$

Donde

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = |M_{31}| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ 8 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 336$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -|M_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -6 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -128$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = |M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & -6 \\ 4 & 8 & 8 \end{vmatrix} = -144$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4}|M_{34}| = -|M_{34}| = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 32$$

Por lo tanto

$$|A| = 3(336) + 7(-128) + (-3)(144) + 7(32) = 768$$

Ahora calculémoslo con la columna 4.

$$|A| = 5A_{14} + (-6)A_{21} + 7A_{34} + 8A_{44}$$

Donde:

$$A_{14} = (-1)^{1+4}|M_{14}| = -|M_{14}| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 3 & 7 & -3 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 32$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}|M_{24}| = |M_{24}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -64$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4}|M_{34}| = -|M_{34}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 32$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4}|M_{44}| = |M_{44}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto

$$|A| = 5(32) + (-6)(-64) + 7(32) + 8(0) = 768$$

<u>Definición:</u> sea A una matriz de n x n triangular superior o inferior. Entonces

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \qquad [13]$$

Es decir, el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los componentes de la diagonal.

<u>Teorema</u>: si A y B son matrices de n x n, entonces $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

Para demostrar este teorema hay que demostrar lo siguiente:

1. Sea B una matriz de n x n y E una matriz elemental de n x n, entonces:

   $$\det(EB) = (\det E)(\det B)$$

   Para demostrar lo anterior hay que demostrar 3 cosas más a saber:

   a. Sea E la representación de $f_i \leftrightarrow f_j$, y B una matriz de n x n. Entonces $\det EB = \det E \cdot \det B$

b. Sea E la representación de $f_j + cf_i$ y B una matriz de n x n. entonces $\det EB = \det E \cdot \det B$

c. Sea E la representación de cf_i y B una matriz de n x n. entonces $\det EB = \det E \cdot \det B$

Por lo extenso de la prueba tan solo vamos a aceptar el resultado.

4.1. ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Sea A una matriz de n x n

1. Si A tiene una fila o columna cero, entonces $\det A = 0$
2. Si B se obtiene al intercambiar dos filas o columnas de A, entonces $\det B = -\det A$
3. Si A tiene dos filas o columnas iguales, entonces $\det A = 0$
4. Si B se obtiene al multiplicar una fila o columna de A por α, entonces $\det B = \alpha \det A$
5. Si B se obtiene al sumar un múltiplo de una fila o columna de A a otra fila o columna, entonces $\det B = \det A$

Ilustración de las propiedades. (Estas propiedades se tienen para matrices de n x n, en particular para 2x2)

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces, $|A| = (2)(0) + (3)(0) = 0$

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, e intercambiamos las filas 1 y 2. Esto nos da una nueva matriz, que podemos llamar B.

   $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, entonces:

   $|A| = (1)(4) - (3)(2) = -2$

   $|B| = (3)(2) - (1)(4) = 2$

   De donde $\det B = -\det A$, es decir $2 = -(-2)$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$, entonces

   $|A| = (-2)(7) - (7)(-2) = -14 + 14 = 0$

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y multipliquemos la fila 2 por 3. Esto nos produce una nueva matriz, llamémosla *B.*

$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 9 & 12\end{bmatrix}$, entonces:

$|A|=(1)(4)-(3)(2)=-2$

$|B|=(1)(12)-(9)(2)=-6$

De donde $\det B=3\det A$, es decir $-6=3(-2)$

Nota: hay que tener mucho cuidado al emplear esta propiedad. Si nos dan una matriz y deseamos calcular su determinante y por alguna razón debemos multiplicar una fila (o columna) por un escalar α , entonces para no alterar el resultado del determinante original deberemos multiplicar el determinante resultante por $\frac{1}{\alpha}$.

Por ejemplo, considere la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, y suponga que deseamos multiplicar la fila 2 por $\frac{1}{2}$, entonces, para que el $\det A$ sea igual a la nueva matriz afectada por $\left(\frac{1}{2}\right)$debemos multiplicar el determinante por $\frac{1}{\alpha}$, es decir por $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

Veamos:

$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}\rightarrow 2\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2[(1)(2)-(1)(3)]=-2$

5. Sea $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ y multipliquemos la fila 2 por 3 y sumémosela a la fila 1. Esto nos produce una nueva matriz, llamémosla B.

   $B=\begin{bmatrix}7 & 18\\ 2 & 5\end{bmatrix}$, entonces:

   $|A|=(1)(5)-(2)(3)=-1$

   $|B|=(7)(5)-(2)(18)=-1$

   Donde $\det A=\det B$

   Observación: esta es quizás la propiedad más útil para generar ceros en un determinante. Note además, que esta es por definición una operación elemental por fila, sin embargo, en los determinantes podemos aplicarla también a las columnas.

Definición: sea A una matriz de n x n, entonces la matriz de cofactores de A que es una matriz n x n, y que denotamos B, es:

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definición: sea A una matriz de n x n y sea B un matriz de cofactores. Entonces la adjunta de A (o la adjugada de A), que se denota $\operatorname{adj} A$, es la transpuesta de la matriz B, es decir:

$$\operatorname{adj} A = B^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad [14]$$

4.2 INVERSAS

Teorema: Sea A una matriz de n x n. entonces A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$. Si $\det A = 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A \qquad [15] \quad \text{(Ver demostración en el apéndice)}$$

Teorema: sea A una matriz de 2x2. Entonces:

i. Sea A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$

ii. Si $\det A \neq 0$, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \qquad [16] \quad \text{(Ver demostración en el apéndice)}$$

Ahora vamos a considerar una matriz de 4x4 y hallar su inversa empleando la matriz adjunta, aprovecharemos la oportunidad para emplear algunas de las propiedades de los determinantes listadas anteriormente, de manera que, intentaremos transformar la matriz en una triangular superior o inferior, ya que, su determinante es inmediato.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, determine si A es invertible y en caso de serlo encuentre su inversa.

Solución:

i. Para determinar si A es invertible debemos calcular su determinante y si este es distinto de cero, A es invertible.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$, ya que hay un cero por debajo de la diagonal principal, vamos a emplear las propiedades de los determinantes para transformar a A en una matriz triangular superior. Esta es una decisión libre, pero en general, se esta tentando a generar la mayor cantidad de ceros por encima o debajo de la diagonal, dependiendo de los ceros que ya tenga la matriz.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 9 & 0 \end{vmatrix} f_4+2f_2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -3 \\ 13 & 0 & 13 & 12 \end{vmatrix} c_1 \leftrightarrow c_2$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 13 & 13 & 12 \end{vmatrix} (f_2+f_1) - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 13 & 13 & 12 \end{vmatrix}$$

Porque intercambiamos dos columnas

$$(c_2-5c_3)-\begin{vmatrix} 1 & -13 & 3 & 3 \\ 0 & -20 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -52 & 13 & 12 \end{vmatrix} \frac{1}{2}f_2 - \begin{vmatrix} 1 & -13 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -52 & 13 & 12 \end{vmatrix}$$

$$-20\begin{vmatrix} 1 & -13 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -52 & 13 & 12 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_4 - 52 f_2} -20\begin{vmatrix} 1 & -13 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-42}{5} \end{vmatrix}$$

Porque multiplicamos una fila por $\frac{1}{20}$, y para que el determinante no se altere hay que multiplicarlo por $\frac{1}{\frac{1}{20}} = 20$

Note que ya es una matriz triangular superior, por lo tanto su determinante, es el producto de los elementos de la diagonal, multiplicados además por el factor (-20), es decir:

$$|A| = (-20)\left[(1)(-1)(1)\left(\frac{-42}{5}\right)\right] = -168$$

Dado que el determinante $A \neq 0$, se tiene que A es invertible.

ii. Vamos a hallar su matriz cofactor.

La matriz de cofactores de A es de la forma:

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

Donde debemos hallar esto de16 cofactores.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -41$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}| = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -77$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 49$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}|M_{14}| = -|M_{14}| = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -52$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -|M_{21}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{21}| = |M_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 105$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -|M_{23}| = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -21$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}|M_{24}| = |M_{24}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = |M_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -42$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -|M_{32}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -42$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = |M_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 42$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4}|M_{34}| = -|M_{34}| = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1}|M_{41}| = -|M_{41}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 19$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2}|M_{42}| = |M_{42}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3}|M_{43}| = -|M_{43}| = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -35$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4}|M_{44}| = |M_{44}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20$$

Ya hemos calculado todos lo factores, por lo tanto nuestra matriz de cofactores es:

$$B = \begin{bmatrix} -4 & -77 & -49 & -52 \\ -3 & 105 & -21 & -12 \\ -42 & -42 & 42 & 0 \\ 19 & 7 & -35 & 20 \end{bmatrix}$$

Ahora, si hallamos la transpuesta de B, estaremos encontrando la adjunta de A:

$$B^t = \begin{bmatrix} -41 & -3 & -42 & 19 \\ -77 & 105 & -42 & 7 \\ 49 & -21 & 42 & -35 \\ -52 & -12 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \operatorname{adj} A$$

Finalmente la inversa de A, será:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-168} \begin{bmatrix} -41 & -3 & -42 & 19 \\ -77 & 105 & -42 & 7 \\ 49 & -21 & 42 & -35 \\ -52 & -12 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Naturalmente la forma de verificar este resultado parte de la definición misma de la inversa, es decir:

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{-168} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -41 & -3 & -42 & 19 \\ -77 & 105 & -42 & 7 \\ 49 & -21 & 42 & -35 \\ -52 & -12 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{-168} \begin{bmatrix} -168 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -168 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -168 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -168 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Ejemplo:

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, determine si A es invertible, y en caso de serlo halle su inversa.

i. Veamos si $\det A \neq 0$

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = (2)(3) - (1)(9) = -3$$

Como $\det A \neq 0$, entonces A tiene inversa.

ii. La inversa de A, a partir del teorema para matrices de 2x2 es:

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Veamos que en efecto $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

$$A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observaciones: Note que cuando empleamos determinantes para hallar la matriz inversa de A, las entradas de la matriz adjunta son números enteros lo que facilitan el producto con A (en el caso en que las entradas de A sean también números enteros). Sin embargo, si alguien lo desea puede realizar el producto del escalar que multiplica a la adjunta $\left(\dfrac{1}{\det A} \right)$, y de la misma forma realizar el producto con A. Aquí hemos recurrido a la siguiente propiedad de las matrices:

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, entonces

$$\alpha A=\begin{bmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn}\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Ejemplo:

La inversa en el ejemplo 2, tenemos

$A^{-1}=\dfrac{1}{-3}\begin{bmatrix}3 & -9\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, la cual podremos escribir también como:

$A^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{-3}{3} & \dfrac{9}{3}\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{-2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{-2}{3}\end{bmatrix}$, Por comodidad en las multiplicaciones, se prefiere la primera forma, sin embargo son equivalentes.

Complemento

1. Recordemos la definición dada en el capitulo 1 sea $u=(u_1,u_2,u_3)$ y $v=(v_1,v_2,v_3)$, entonces el producto cruz (producto vectorial) de u y v denotado como $u\times v$, es un nuevo vector denotado como:

$$u\times v=(u_2v_3-v_2u_3)\hat{i}-(u_1v_3-v_1u_3)\hat{j}+(u_1v_2-v_1u_2)\hat{k}$$

Si empleamos determinantes podemos derivar la misma relación para $u\times v$.

Teorema

$$u\times v=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-v_2u_3)\hat{i}-(u_1v_3-v_1u_3)\hat{j}+(u_1v_2-v_1u_2)\hat{k}$$

Demostración

$$\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}$$

$$=(u_2v_3-v_2u_3)\hat{i}-(u_1v_3-v_1u_3)\hat{j}+(u_1v_2-v_1u_2)\hat{k}$$

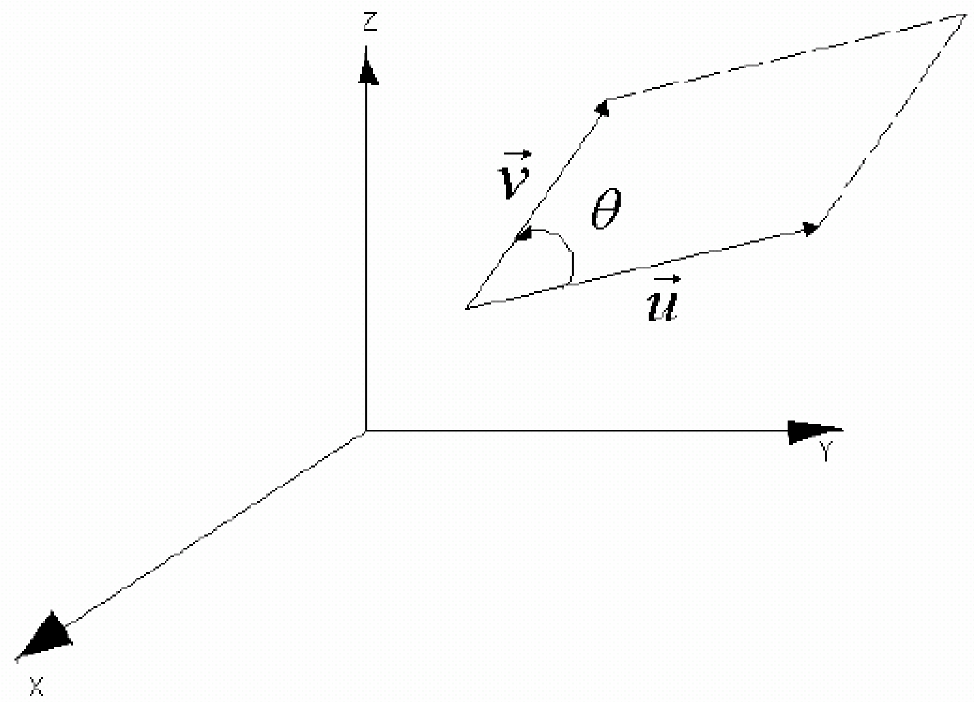
Que coincide con la definición dada en el capitulo 1. [17]

Nota: el teorema ayuda a recordar el resultado del producto cruz, sin embargo, siendo rigurosos no se tiene un determinante, ya que $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ no son números.

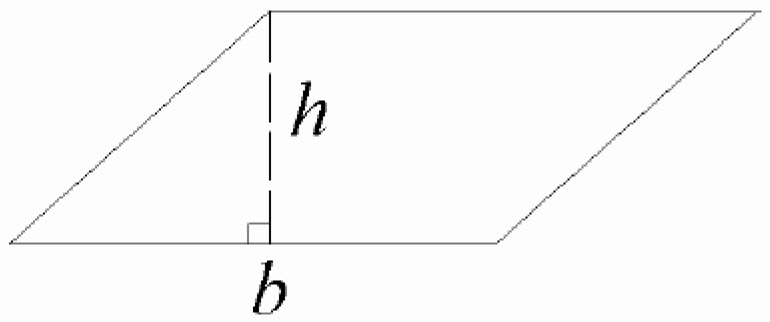
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO CRUZ

1. Área de un paralelogramo.

Consideremos los vectores $\hat{u}$ y $\hat{v}$, como en la gráfica, y pensemos que son los lados adyacente de un paralelogramo.



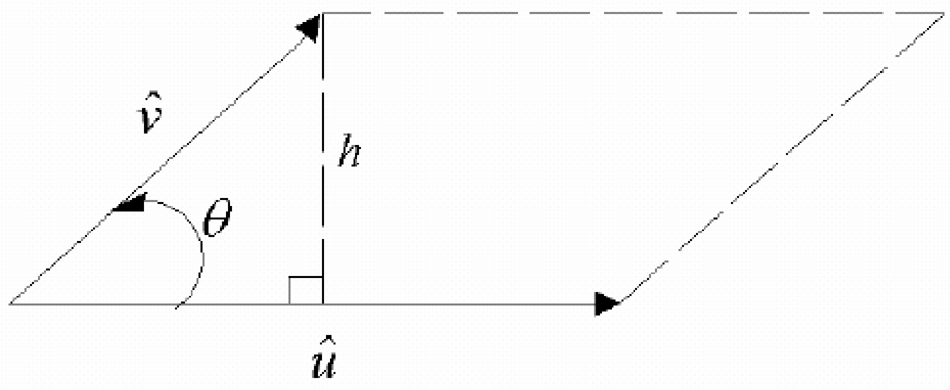
Entonces, de geometría tenemos que el área de un paralelogramo es:



$$A = b \cdot h$$

Donde *h* es perpendicular a *b*.

Entonces para nuestro caso tenemos:



De donde el área del paralelogramo será

$$A = |\hat{u}| \cdot h$$

Entonces $sen\theta = \frac{h}{|v|}$; por tanto

$$h = |v| sen\theta$$

Finalmente se tiene que

$$A = |u||v| sen\theta$$

Ahora, el siguiente teorema nos relaciona (desde el punto de vista geométrico) el área de un paralelogramo, con el producto vectorial.

<u>Teorema</u>

Si θ es el ángulo entre $\hat{u}$ y $\hat{v}$, entonces

$$u \times v = |u||v| sen\theta$$

Demostración:

Primero debemos demostrar lo siguiente:

$$|u \times v|^2 = |u|^2 |v|^2 - (u \bullet v)^2$$

Para esto vamos a comprobar las coordenadas de los dos lados de la ecuación:

Sea $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$,

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3)\hat{i} - (u_1 v_3 - v_1 u_3)\hat{j} + (u_1 v_2 - v_1 u_2)\hat{k}$$

$$|u \times v| = \sqrt{(u_2 v_3 - v_2 u_3)^2 + (u_1 v_3 - v_1 u_3)^2 + (u_1 v_2 - v_1 u_2)^2}$$

$$|u \times v| = u_2^2 v_3^2 - 2u_2 v_3 v_2 u_3 + v_2^2 u_3^2 + v_1^2 u_3^2 - 2v_1 u_3 u_1 v_3$$
$$+ u_1^2 v_3^2 + u_1^2 v_2^2 - 2u_1 v_2 v_1 u_2 + v_1^2 u_2^2 \qquad (1)$$

Ahora veamos el lado derecho de la ecuación es decir

$$|u|^2|v|^2-(u\bullet v)^2$$

Tenemos

$$|u|^2=u_1^2+u_2^2+u_3^2$$

$$|v|^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2$$

$$|u|^2|v|^2=\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)$$

$$|u|^2|v|^2=u_1^2v_1^2+u_1^2v_2^2+u_1^2v_3^2+u_2^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_2^2v_3^2+u_3^2v_1^2+u_3^2v_2^2+u_3^2v_3^2 \quad (2)$$

$$u\bullet v=(u_1,u_2,u_3)\bullet(v_1,v_2,v_3)=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

$$(u\bullet v)^2=(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2=u_1^2v_1^2+u_1v_1u_2v_2+u_1v_1u_3v_3$$
$$+u_2v_2u_1v_1+u_2^2v_2^2+u_2v_2u_3v_3+u_3v_3u_1v_1+u_3v_3u_2v_2$$
$$+u_3^2v_3^2=u_1^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_3^2v_3^2+2u_1v_1u_2v_2+2u_1v_1u_3v_3+2u_2v_2u_3v_3 \quad (3)$$

Restando (2) y (3)

$$u_1^2v_1^2+u_1^2v_2^2+u_1^2v_3^2+u_2^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_2^2v_3^2+u_3^2v_1^2+u_3^2v_2^2+u_3^2v_3^2$$
$$-\left(u_1^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_3^2v_3^2+2u_1v_1u_2v_2+2u_1v_1u_3v_3+2u_2v_2u_3v_3\right)$$
$$=u_2^2v_3^2-2u_2v_3v_2u_3+v_2^2u_3^2+v_1^2u_3^2-2v_1u_3u_1v_3+u_1^2v_3^2+u_1^2v_2^2-2u_1v_2v_1u_2+v_1^2u_2^2$$

Que es el mismo resultado obtenido en (1) de allí se tiene que $|u\times v|^2=|u|^2|v|^2-(u\bullet v)^2$

Continuemos con la demostración:

Sabemos que $u\bullet v=|u||v|\cos\theta$, por lo tanto

$$(u\bullet v)^2=|u|^2|v|^2\cos^2\theta$$

Entonces

$$|u\times v|^2=|u|^2|v|^2-(u\bullet v)^2$$

$$|u\times v|^2=|u|^2|v|^2-|u|^2|v|^2\cos^2\theta$$

$$|u\times v|^2=|u|^2|v|^2\left(1-\cos^2\theta\right)$$

$$|u\times v|^2=|u|^2|v|^2 sen^2\theta$$

De la identidad $sen^2\theta+\cos^2\theta=1$

Por lo tanto

$$|u\times v|^2=|u|^2|v|^2 sen^2\theta$$

Tomando raíz cuadrada a ambos lados nos queda

$u \times v = |u||v| sen\theta$

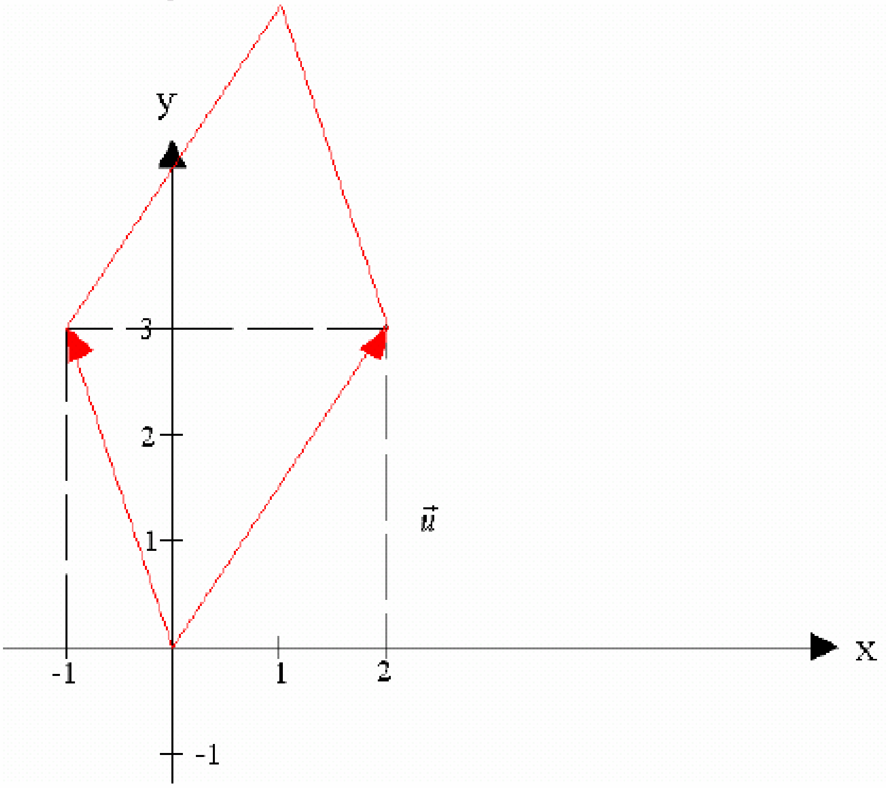
Note que $sen\theta \geq 0$, ya que por definición θ es el menos ángulo medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj, por tanto $0 \leq \theta \leq \pi$

Lo anterior establece (desde el punto de vista geométrico) que $|u \times v| =$ Área del paralelogramo.

Ejemplo:

Encuentre el área del paralelogramos cuyos lados adyacentes se hallan determinados por el origen y los puntos $P = (-1,3)$ y $Q = (2,3)$

La solución grafica muestra la situación:



Sea $\hat{u}_1 = \overrightarrow{OP} = (-1,3)$ y $\hat{v}_1 = \overrightarrow{OQ} = (2,3)$

Ahora supongamos que nos encontramos en R^3, pero nuestro paralelogramo esta en xy, de aquí que nuestra coordenada $z = 0$. Entonces:

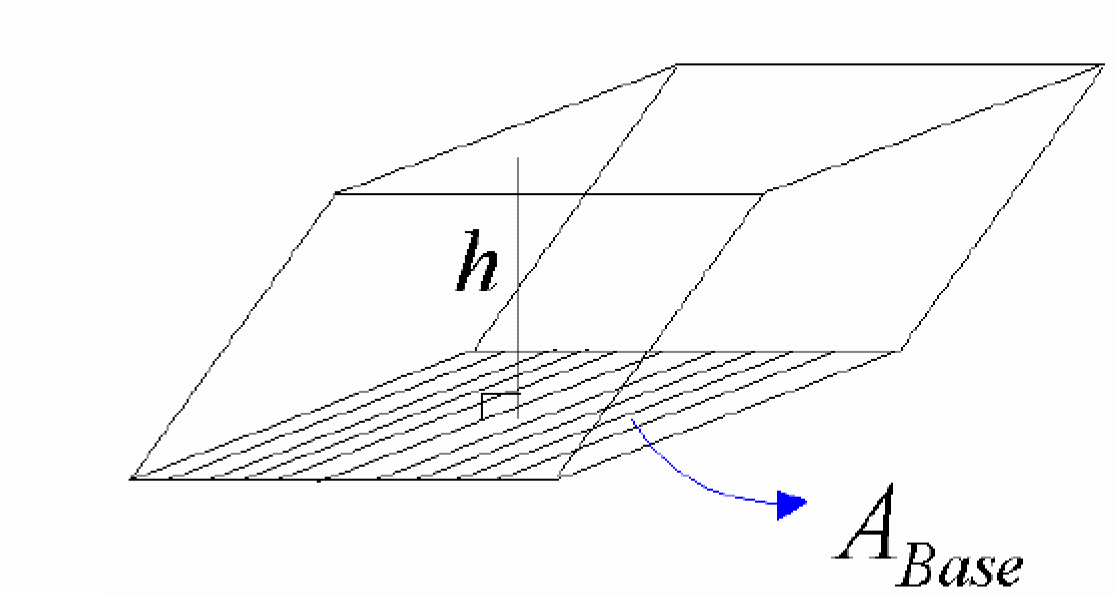
$\hat{u}_1 = (-1,2,0)$ y $\hat{v}_1 = (2,3,0)$

De $|u \times v| =$ Área, tenemos

$$u \times v = \left| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix} \right| = \left| \hat{i}\left[(3)(0)-(3)(0)\right] - \hat{j}\left[(-1)(0)-2(0)\right] + \hat{k}\left[(-1)(3)-(2)(3)\right] \right|$$

$$= \left| \hat{k}(-9) \right| = \sqrt{(-9)^2} = 9$$

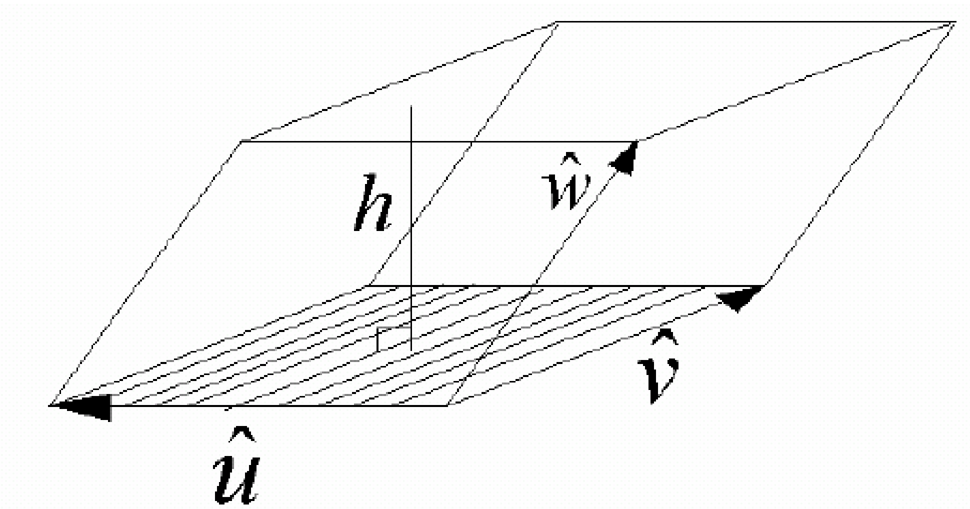
2. *Volumen de un paralelepípedo.*



Volumen $A_{base} \cdot h$

Note que h es perpendicular a la base.

Ahora consideremos el siguiente paralelepípedo y los vectores *u*, *v* y *w*.

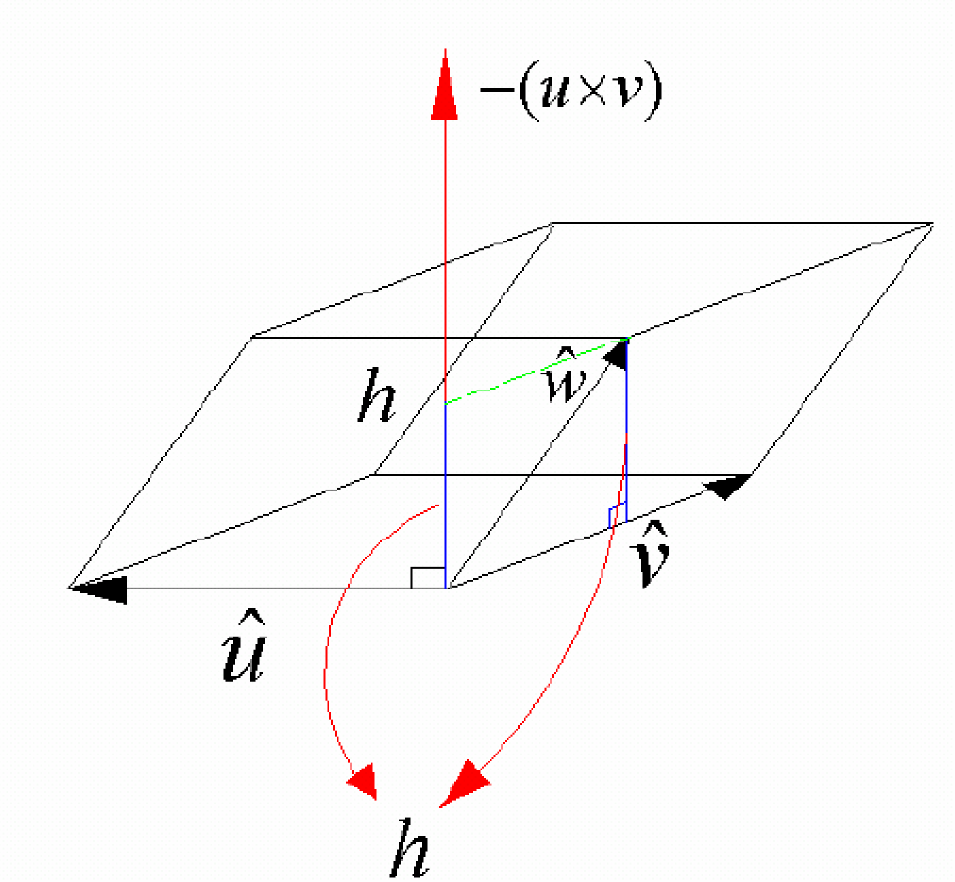


Note que $\hat{u}$, $\hat{v}$ y $\hat{w}$ son paralelos a los lados de del paralelepípedo, y tienen su misma longitud.

La base del paralelepípedo es a su vez un paralelogramo y por lo dicho en el numeral 1 su área es:

$Area = |u \times v|$

Para establecer h que es perpendicular a la base, podemos recurrir al producto vectorial entre u y v (recordemos que este producto nos permite obtener un vector que es ortogonal a $\hat{u}$ y a $\hat{v}$ simultáneamente), así:



El volumen del paralelepípedo, es:

$V = A_{base} \cdot h$

$V = |u \times v| \cdot h$

Note que h es la componente del vector $\hat{w}$ en la dirección de $-(u \times v)$.(recuerde que la componente de $\hat{x}$ en la dirección de $\hat{y}$ esta dado por $comp_y x = \dfrac{x \cdot y}{|y|}$)

Por lo que para nuestro caso, basta con constituir $\hat{w}$ por $\hat{x}$ y $-(u \times v)$ por $\hat{y}$, de lo cual:

$$h = comp_{(u \times x)} w = \left| \frac{w \bullet (u \times v)}{|u \times v|} \right|$$

Las barras del valor absoluto son para garantizar que *h* sea positivo.

Entonces

$$V = |u \times v| \cdot h$$

$$V = |u \times v| \cdot \left| \frac{w \bullet (u \times v)}{|u \times v|} \right| = w \bullet (u \times v)$$

Es decir el volumen de un paralelepípedo determinado por los tres vectores *u, v* y *w* es:

$V = w \bullet (u \times v)$ (Valor absoluto del triple producto escalar de *u, v* y *w*)

Advierta que a partir de la grafica, el producto cruz de $\hat{u}$ y $\hat{v}$ (siguiendo la regla de la mano derecha) estaría dirigido en la dirección opuesta al que se represento. Si se desea una representación con $u \times v$ positivo, invierta los papeles de $\hat{u}$ y $\hat{v}$. Además, note que el valor absoluto nos elimina esta dificultad.

Ejemplo

Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por lo vectores $2\hat{i} - 3\hat{j}, -\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}, 2\hat{j} + 5\hat{k}$

Solución:

$\hat{u}$, $\hat{v}$ y $\hat{w}$ no depende de la elección que se haga de ellos. Por tanto tenemos:

$$\hat{u} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$$

$$\hat{v} = -\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\hat{w} = 2\hat{j} + 5\hat{k}$$

Recordemos que $V = |w \bullet (u \times v)|$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}[(-3)(2) - (-1)(0)] - \hat{j}[(2)(2) - (-1)(0)] + \hat{k}[(2)(-1) - (-1)(-3)]$$

$$= -6\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$u \times v = -6\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$$

Ahora realicemos: $w \bullet (u \times v)$

$$w \bullet (u \times v) = (0,2,5) \bullet (-6,-4,-5) = -8 - 25 = -33$$

Finalmente, tomemos el valor absoluto

$|w \bullet (u \times v)| = |-33| = 33$ Unidades cúbicas.

PROBLEMAS

1. Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -7\\ -1 & 5 & 4\\ 4 & 0 & 4\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 4\\ 5/3 & 1 & 2\\ 5 & -1 & 9\end{bmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{bmatrix}7 & -4 & -4\\ 5 & 1 & 1/2\\ 8 & 6 & 3\end{bmatrix}\ \text{realice:}$$

   a. $A+B+C$

   b. $A-3B-2C$

Respuestas: a. $A+B+C=\begin{bmatrix}7 & -1 & -7\\ 17/3 & 7 & 13/2\\ 17 & 5 & 16\end{bmatrix}$

b. $A-3B-2C=\begin{bmatrix}-6 & 11 & -11\\ -16 & 0 & -3\\ -27 & -9 & -29\end{bmatrix}$

2. Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 0 & 5\\ 4 & 2 & -3 & 6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5\\ -4\\ -2\\ -3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-9 & 2 & 6\end{bmatrix}\ \text{y}\ D=\begin{bmatrix}10 & 5\\ 0 & 8\\ 1 & 2\end{bmatrix}\ \text{realice:}$$

   a. AB

   b. BC

   c. CD

   d. DA

Respuestas: a. $AB=\begin{bmatrix}-40\\ 0\end{bmatrix}$ b. $BC=\begin{bmatrix}-45 & 10 & 30\\ 36 & -8 & -24\\ 18 & -4 & -12\\ 27 & -6 & -18\end{bmatrix}$

c. $CD=\begin{bmatrix}-84 & -17\end{bmatrix}$ d. $DA=\begin{bmatrix}10 & 60 & -15 & 80\\ 32 & 16 & -24 & 48\\ 7 & 9 & -6 & 17\end{bmatrix}$

3. Encuentre la inversa de la siguiente matriz, empleando para ello en método de Gauss- Jordán.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -7\\ -1 & 5 & 4\\ 4 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

Respuesta:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & \frac{47}{240} \\ \frac{1}{12} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{240} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{13}{240} \end{bmatrix}$$

4. Encuentre la forma escalonada reducida de las siguientes matrices

   a. $A=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

   b. $B=\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

   c. $C=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ \frac{5}{3} & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 9 \end{bmatrix}$

   Respuestas:

a.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-15}{22} & \frac{10}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{22} & \frac{13}{11} \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Encuentre la inversa de la siguiente matriz, empleando para ello en método de Gauss- Jordán.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Respuesta:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 77/127 & 6/127 & -23/127 & 45/127 \\ 41/127 & -10/127 & -4/127 & 52/127 \\ 2/127 & 15/127 & 6/127 & 49/127 \\ -7/127 & 11/127 & -21/127 & 19/127 \end{bmatrix}$$

6. Encuentre la matriz triangular inferior L con unos en la diagonal, y una matriz triangular superior U tal que $A = LU$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}; U=\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 46 \end{bmatrix}$$

7. Encuentre la matriz triangular inferior L con unos en la diagonal, y una matriz triangular superior U tal que $A = LU$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; U=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

8. Calcule los siguientes determinantes (sugerencia: emplee algunas de las propiedades para intentar transformarla en una matriz triangular)

a. $\begin{vmatrix} -12 & 3 & 10 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Respuestas: a. 116 b. 410 c. 1283

9. Determine (empleando determinantes) si la matriz dada es invertible.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 11 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ c.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & -2 & 6 \\ -2 & 10 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuestas: a. No es invertible $|A| = 0$

b. Si es invertible $|A| = -12 \neq 0$

c. Si es invertible $|A| = 10 \neq 0$

10. Encuentre la inversa de la siguiente matriz, empleando para ello determinantes (Recuerde: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} AdjA)$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Respuesta: $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} -16 & -9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 22 & 15 & -1 \end{bmatrix}$

AUTOEVALUACION

1. Para que valores de α la matriz $\begin{pmatrix} 2\alpha & 4 \\ 2 & 5-\alpha \end{pmatrix}$ es no invertible?

2. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR},$ y $\overrightarrow{PS}$, donde $P=(-2,2,1)$, $Q=(-4,1,4)$, $R=(-1,5,3)$ y $S=(3,4,-5)$

SOLUCIÓN:

1. Para determinar los valores de α de tal forma que la matriz no sea invertible, calculamos su determinante y el resultado lo igualamos a cero.

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & 4 \\ 2 & 5-\alpha \end{vmatrix} = 10\alpha - 2\alpha^2 - 8 = \alpha^2 - 5\alpha + 4$$

Igualando este ultimo resultado a cero, obtenemos

$$\alpha^2 - 5\alpha + 4 = 0$$

$$(\alpha - 4)(\alpha - 1) = 0$$

$\alpha_1 = 4$ y $\alpha_2 = 1$

2. Hacemos las siguientes asignaciones:

$$\hat{u} = \overrightarrow{PQ} = (-4+2, 1-2, 4-1) = (-2,-1,3)$$

$$\hat{v} = \overrightarrow{PR} = (-1+2, 5-2, 3-1) = (1,3,2)$$

$$\hat{w} = \overrightarrow{PS} = (3+2, 4-2, -5-1) = (5,2,-6)$$

Ahora, empleamos el valor absoluto del triple producto escalar, es decir:

$$V = |w \bullet (u \times v)|$$

Realicemos $u \times v$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}[(-1)(2)-(3)(3)] - \hat{j}[(-2)(2)-(1)(3)] + \hat{k}[(-2)(3)-(1)(-1)] =$$

$$-11\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k}$$

Ahora realizamos $|w \bullet (u \times v)|$

$|(5,2,-6) \bullet (-11,7,-5)| = |-55+14+30| = 11$ Unidades cúbicas.

UNIDAD 2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES, RECTAS, PLANOS Y ESPACIOS VECTORIALES

OBJETIVO GENERAL

Que el estudiante comprenda los fundamentos teóricos que soportan la concepción de los sistemas lineales, rectas, planos y los principios de espacio vectorial, a través del complejo ejercicio mental de abstracción, estudio, análisis e interpretación de fuentes bibliográficas referenciadas y casos específicos de aplicación en diferentes áreas del conocimiento.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Evidenciar en el estudiante una apropiación conceptual que refleje el entendimiento de nociones como la de un plano o de una recta en el espacio. Complementado con un manejo pertinente de las diversas formas en que son obtenidas y empleadas las ecuaciones que las representan.

- Lograr que el estudiante conozca de cerca el concepto de lo que es un sistema de ecuaciones lineales, lo lleve a espacios más generales y reconozca su importancia en aplicaciones mas especificas. Además, debe entender y manejar con propiedad los distintos procedimientos que le permiten obtener una solución del mismo (en el caso en que sea posible)

5. SISTEMAS LINEALES

Antes de dar una definición de lo que es un sistema lineal, conviene recordar algunas características de unas curvas de R^2 muy particulares, estas son las rectas.

La ecuación cartesiana de una recta de la forma

$$ax + by = c \qquad (1)$$

Donde *a*, *b* y *c* son números reales.

Si despejamos y de esta ecuación tenemos:

$$y = \frac{-b}{a}x + \frac{c}{a} \qquad (2)$$

Al cociente $\frac{-b}{a}$, se acostumbra a designarlo por la letra m, es decir $m = \frac{-b}{a}$, y representa la pendiente de la recta (que no es mas que la inclinación de esta con respecto al eje x).

Al cociente $\frac{c}{a}$ lo podemos designar por $b*$, es decir $b* = \frac{c}{a}$, con estas dos asignaciones podemos reescribir (2) así:

$$y = mx + b*$$

Para realizar la grafica de una recta es suficiente una de las dos condiciones siguientes:

1. tener mínimo dos puntos que pertenezcan a la recta.

2. tener mínimo un punto y la pendiente.

Ejemplo:

Realice la grafica de la recta $2x - 4y = 8$

Solución:

Vamos a encontrar un par de puntos que pertenezcan a la recta. Para esto vamos a darle un valor a una de las variables y obtenemos el valor de la otra despejándole. Este procedimiento lo repetimos para hallar el otro punto.

Si $x=0$, entonces la ecuación $2x-4y=8$, se transforma en $-4y=8$, de donde:

$$y=\frac{8}{-4};\ y=-2$$

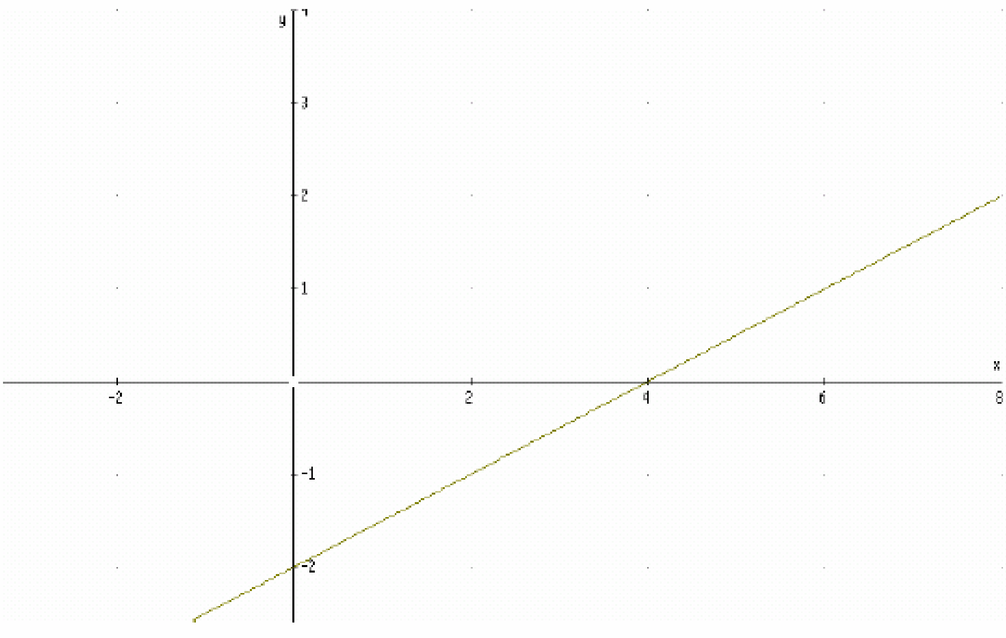
Es decir el punto $(0,-2)$, se encuentra en la recta.

Si $y=0$, la ecuación $2x-4y=8$, se transforma en $2x=8$, de donde $x=\frac{8}{2}$;

$x=4$

Por lo tanto tenemos el segundo punto, con coordenadas $(4,0)$.

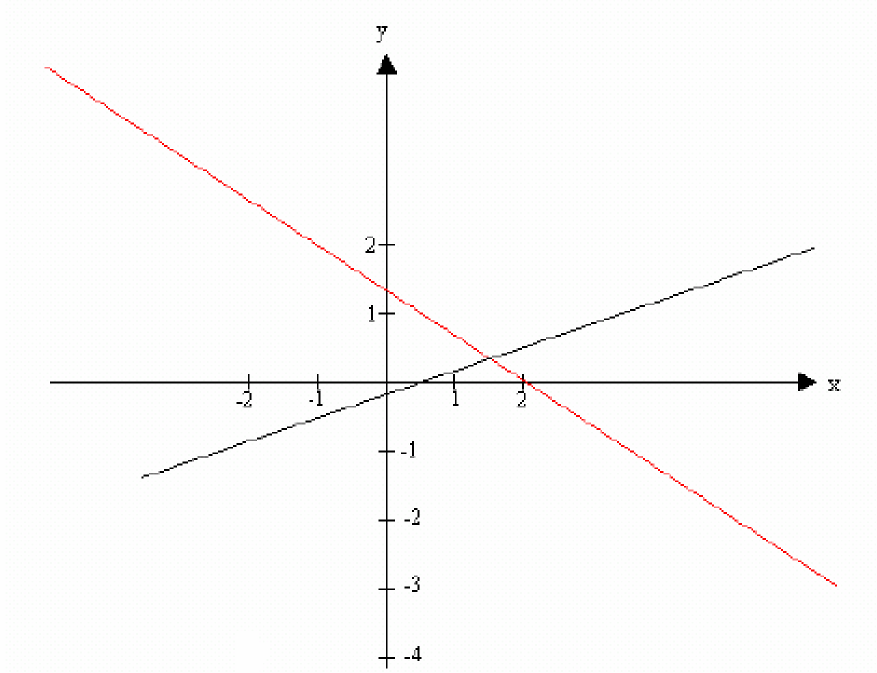
La grafica es la siguiente.



Ahora recordemos un concepto importante, el de paralelismo. En términos de sus pendientes podemos afirmar que dos rectas L_1 y L_2, son paralelas si sus pendientes son iguales, es decir, si

$m_1=m_2$

Si las rectas L_1 y L_2 no son las mismas (es decir, una no es múltiplo escalar de la otra) y sus pendientes no son iguales $(m_1 \neq m_2)$, entonces, necesariamente se intersectan en un punto, a este punto lo llamamos solución del sistema.

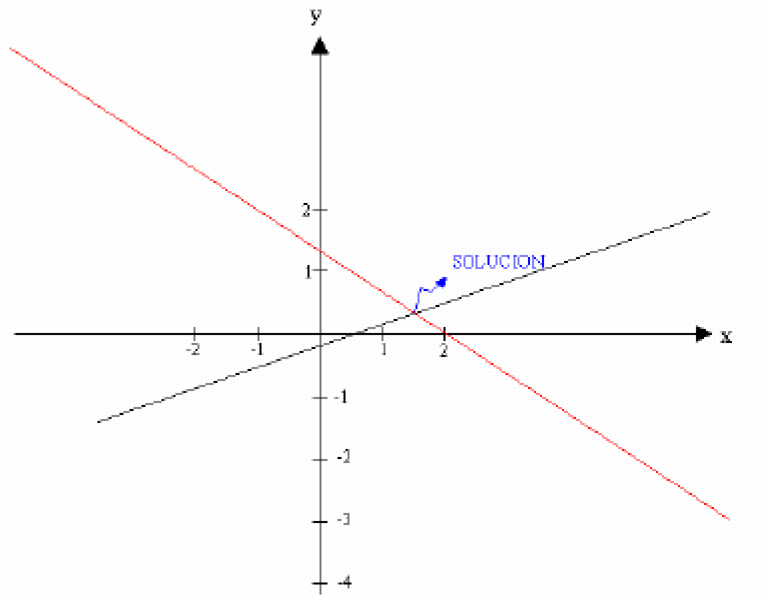


Nótese que este punto pertenece a la recta L_1 (por lo que debe satisfacer la ecuación cartesiana de L_1) y también pertenece a la recta L_2 (por lo que debe satisfacer la ecuación cartesiana de L_2)

Lo que nos interesa en adelante es precisamente el hallar este punto común.

Nuestra intuición (acerca de lo que hemos mencionado de lo que es una solución) nos deberá indicar tres posibles situaciones:

1. Que exista un único punto de intersección de las rectas:



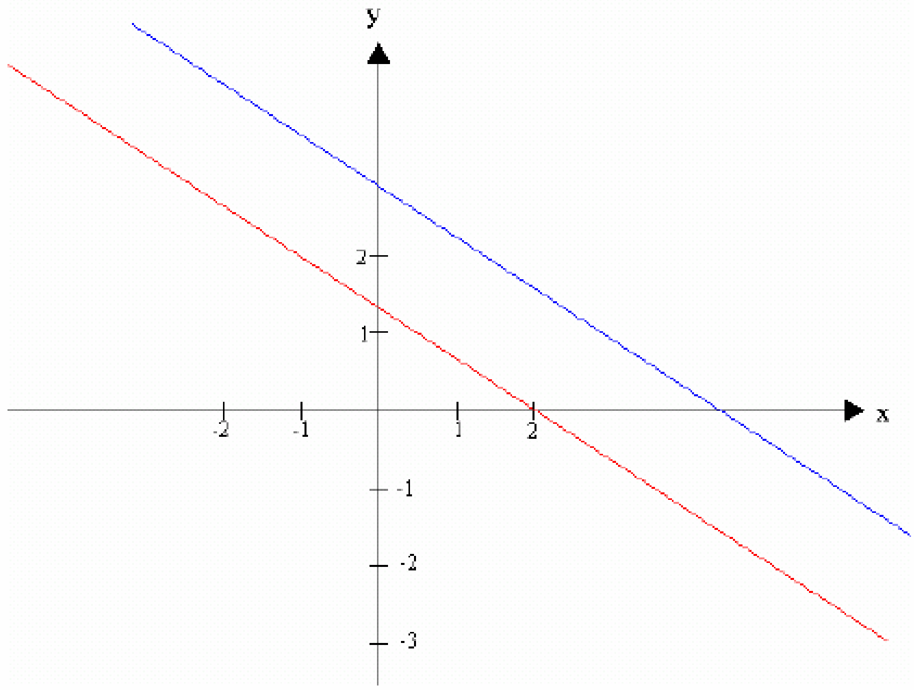
$m_1 \neq m_2$

2. Que no exista un punto en común entre L_1 y L_2

$L_1 : y_1 = m_1 + b_1^*$

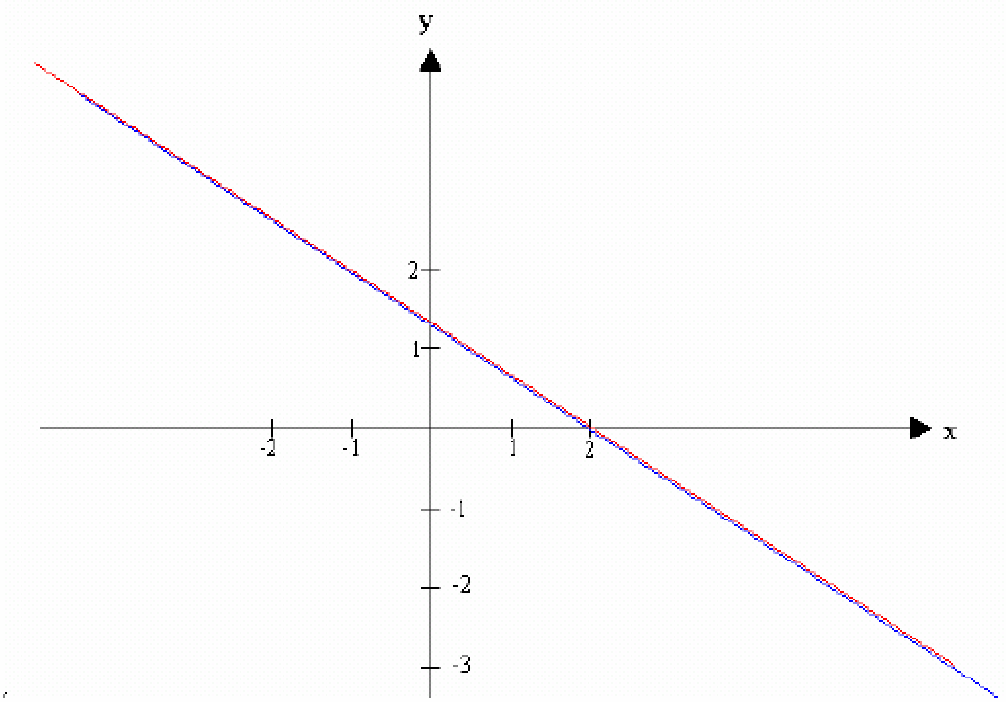
$L_1 : y_2 = m_2 + b_2^*$

Con $m_1 = m_2$, pero $b_1^* \neq b_2^*$



Recuerde que $b*$ se denomina ordenada al origen, y representa el valor (sobre el eje *y*), donde corta la recta.

3. Que exista una familia infinita de puntos comunes.



$L_1 : y_1 = m_1 + b_1^*$

$L_2 : y_2 = m_2 + b_2^*$

Se tiene que $m_1 = m_2$ y $b_1^* = b_2^*$

De esto naturalmente se desprende que las dos rectas son las mismas $(L_1 = L_2)$.

Regresemos nuevamente a la ecuación cartesiana de una recta cualquiera

$ax + by = c$ para L_1 y

$dx + ey = f$ para L_2

Por comodidad (dado que el abecedario es finito), se acostumbra a representar esas mismas constantes *a, b, c, d, e* y *f*. Por las letra a con subíndices. Así:

$L_1 : a_{11}x + a_{12}y = b_1$

$L_1 : a_{21}x + a_{22}y = b_2$

Que es una notación que ya nos es más familiar.

Cuando consideramos a L_1 y L_2 simultáneamente estamos pensando en un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas (*x* y *y*) y lo que nos interesa (cuando las pensamos simultáneamente) es hallar la solución de este, que no es mas, que los puntos que pertenecen a las dos rectas y que naturalmente satisfacen sus ecuaciones. Por lo descrito anteriormente, pueden suceder tres situaciones:

1. Que exista un único punto (que llamaremos de ahora en adelante "solución única").

2. Que no existan puntos en común. (que denominaremos de ahora en adelante "sistema inconsistente" o "sistema sin solución").

3. Que existan infinitos puntos comunes (que llamaremos de ahora en adelante: "sistema con infinitas soluciones")

Teorema 1: El sistema

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

De dos ecuaciones con dos incógnitas x y y, no tiene solución, tiene una solución única o tiene un numero infinito de soluciones. Esto es:

i. Tiene una solución única si y solo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

ii. No tiene solución o tiene un numero infinito de soluciones si y solo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ [24]

Veamos tres ejemplos que ilustren estas situaciones:

Ejemplo 1:

Sea

$L_1 : x - y = 4$

$L_1 : -x + 2y = 8$

Encuentre el punto de intersección (si lo hay) de las dos rectas.

Solución:

En principio, podemos emplear uno de los cuatro procedimientos, usuales para resolver sistemas (igualación, adición, sustitución o determinantes)

Vamos a emplear adición:

$x - y = 4$

$-x + 2y = 8$

Sumemos las dos ecuaciones

$$\begin{array}{r} x - y = 4 \\ -x + 2y = 8 \\ \hline y = 12 \end{array}$$

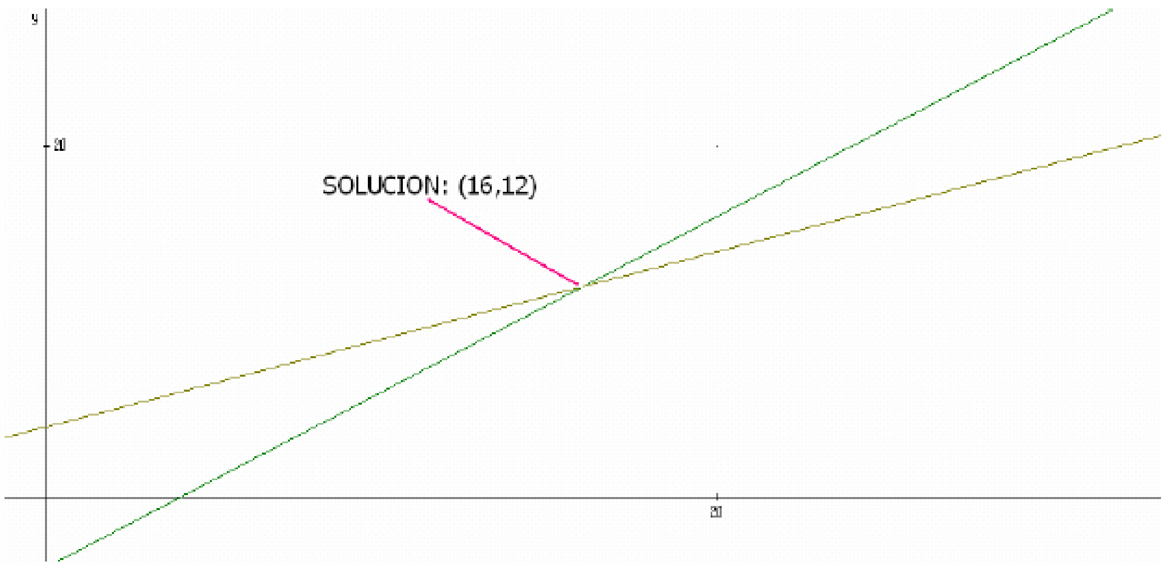
Sustituyendo el valor de $y = 12$, en cualquiera de las dos ecuaciones (digamos en la primera) obtenemos el valor de la otra variable.

$-x + y = 4 \quad ; \; x = 4 + y$, entonces

$x = 4 + 12 \quad ; \; x = 16$

Por lo tanto el punto $(16,12)$ satisface ambas ecuaciones (verifíquelo)

En esta oportunidad hay un único punto, por lo que decimos que la solución es única.



Ejemplo 2:

Sea

$L_1 : 2x - y = 4$

$L_1 : -6x + 3y = -12$

Encuentre el punto de intersección (si lo hay) de las dos recta.

Solución:

Empleemos nuevamente el método de la adición:

$x \;-\; y = 4 \qquad (1)$

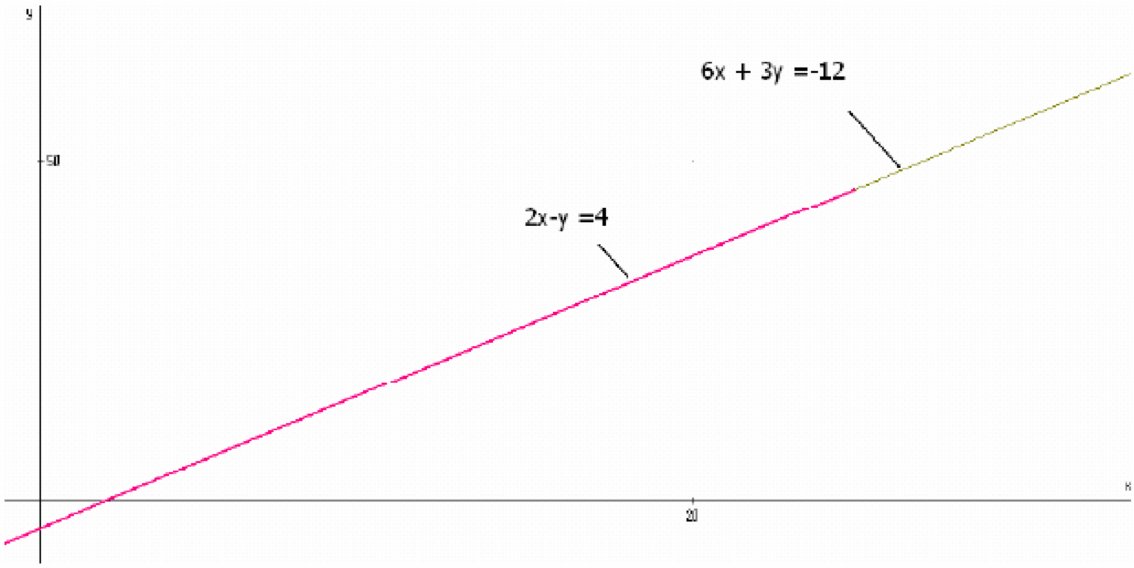
$-x + 2y = 8 \qquad (2)$

Multipliquemos la ecuación (1) por 3 y sumémosla.

$$\begin{array}{l} 6x - 3y = 12 \\ \underline{-x + 2y = -12} \\ \quad 0 \quad = 0 \end{array}$$

Pero esto nos arroja información adicional acerca de las soluciones. Sin embargo, si revisamos lo que sucedió al multiplicar la ecuación (1) por 3, nos damos cuenta que la ecuación resulto idéntica a la de la ecuación (2)con los signos opuestos… ¡son la misma ecuación!

Por lo tanto al graficarlas una a una deben coincidir en todos lo puntos, es decir, es un caso de infinitas soluciones.



Ejemplo 3:

Sea

$L_1 : -3x - 9y = 18$

$L_1 : x + 3y = 4$

Encuentre el punto de intersección (si lo hay) de las dos recta.

Solución:

Empleemos nuevamente el método de la adición, tenemos:

$$-3x - 9y = 18 \qquad (1)$$

$$x + 3y = 4 \qquad (2)$$

Multipliquemos la ecuación (2) por 3 y sumémosla.

$$\begin{array}{r} -3x-9y=18 \\ \underline{-3x+3y=12} \\ 0 \quad =30 \end{array}$$

Lo cual es falso (absurdo ya que, $0 \neq 30$) . Note que las rectas L_1 y L_2 no son las mismas y el procedimiento no nos arroja mas información que la inconsistencia $0=30$.

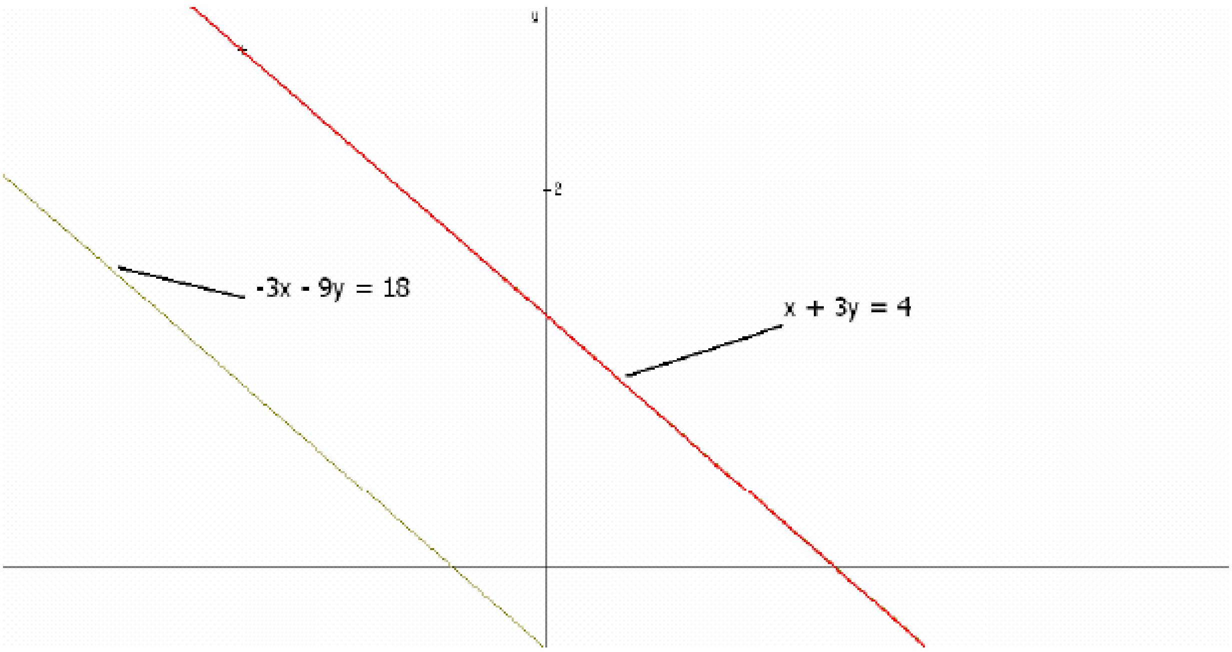
Veamos las pendientes de L_1 y L_2

$$L_1: \qquad y_1 = \frac{-3}{9}x - \frac{18}{9}$$

$$y_1 = \frac{-1}{3}x - 2$$

$$L_2: \qquad y_2 = \frac{-1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Las pendientes de L_1 y L_2 son iguales, pero las ordenadas al origen no $\left(-2 \neq \frac{4}{3}\right)$, por lo tanto las rectas son paralelas y no son las mismas



De aquí tenemos que no hay puntos en común, por lo tanto, el sistema no tiene solución o lo que es equivalente, es inconsistente.

Ahora analicemos los tres ejemplos anteriores un poco más.

Para el ejemplo 1

$$x - y = 4$$

$$-x + 2y = 8$$

Formemos la siguiente matriz, en donde, en la columna 1 se encuentran los coeficientes de la variable x y en la segunda columna los coeficientes de la variable y. así:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, a esta matriz dada la naturaleza de sus elementos en cada una de sus entradas, la llamaremos matriz de coeficientes del sistema.

Calculemos el determinante de A.

$$|A| = (1)(2) - (-1)(-1) = 2 - 1 = 1$$

Para el ejemplo 2

$$x - y = 4$$

$$-x + 2y = 8$$

Su matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculemos el determinante de A.

$$|A| = (2)(3) - (-3)(-1) = 6 - 6 = 0$$

Para el ejemplo 3

$$-3x - 9y = 18$$

$$x + 3y = 4$$

Su matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculemos el determinante de A.

$$|A| = (-3)(3) - (1)(-9) = -9 + 9 = 0$$

Note lo siguiente (no es coincidencia)

- En el caso en que el sistema tiene solución única, (en el ejemplo 1), el determinante nos dio 1 que es diferente de cero.

- En el caso en que el sistema tenía infinitas soluciones (en el ejemplo 2), el determinante nos dio cero.

- En el caso en que el sistema resulto inconsistente (en el ejemplo 3), el determinante nos dio cero.

Los resultados de los determinantes en los tres casos anteriores no son coincidencia, de hecho hay un teorema (el cual tiene su demostración en el apéndice) que nos permite conocer con anterioridad si el sistema tiene solución única o no.

Por ahora pensemos en un sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas, este tiene la forma:

$$a_{11}x + a_{12y} = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Su matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Y los términos b_1 y b_2, los podemos escribir como un vector columna así:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Para las incógnitas *x* y *y*, podemos recurrir nuevamente a una presentación tipo vector columna, es decir:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Note que a partir de estas designaciones, el sistema

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Puede ser escrito como una matriz *A* (de coeficientes), un vector X (de incógnitas) y un vector de términos constantes (o independientes) el vector $\vec{b}$.

Al escribirlo de esta manera, se satisfacen las condiciones del producto matricial. Veamos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Realicemos el producto matricial del lado izquierdo.

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

De la igualdad de matrices se tiene:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Esta presentación no es exclusiva para sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas, sino, en general, para sistemas de m ecuaciones con n incógnitas (esto lo veremos mas adelante).

Antes de proseguir, es conveniente definir adecuadamente lo que es un sistema lineal.

<u>Definición:</u> Una ecuación lineal con n variables, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots a_nx_n = b$$

De donde los coeficientes $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ y el termino constante b son constantes. [18]

Observación: Las ecuaciones lineales no contienen productos, inversos de las variables u otras funciones de las variables. La potencia de la variable es uno (1).

Ejemplo. Las siguientes ecuaciones son lineales:

$2x - 5y = -3$; $w - \frac{3}{4}t + \frac{1}{9}s = 9$

$\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{3}y = 4$; $\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)t - \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)s = 2$

$2.18x - 4.15y = 1.5$

Ejemplo 2. Las siguientes ecuaciones no son lineales.

$x^2 + 2y + 2x = 4$ $\sqrt{x} - 2y = 3$

$3xy - 2x + 3y = 10$ $\sin x - 2y = 2$

Otra forma de expresar lo que presenta la solución de una ecuación lineal, es la siguiente:

Dada la ecuación lineal:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots a_nx_n = b$$

Una solución es un vector $[w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n]$, cuyos componentes al ser sustituidos en la ecuación la satisfacen, de tal forma que, $x_1 = w_1, x_2 = w_2, x_3 = w_3, \cdots, x_n = w_n$.

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto finito de ecuaciones lineales, con la característica de que en todas las ecuaciones están las mismas variables.

Cuando hablamos de resolver un sistema nos referimos al procedimiento que nos permite encontrar el conjunto solución (el conjunto de todas las soluciones del sistema).

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, es de la forma:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \qquad (1)$$

Entonces podemos definir:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, como la matriz de coeficientes del sistema.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; Como el vector de incógnitas.

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$; Como el vector de términos independientes.

Note que *A* es una matriz de *m x n*, X es una matriz de n x 1, por lo tanto el producto matricial *AX* esta definido y resulta ser una matriz de *m x 1*. Que naturalmente, es el tamaño del vector *b*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el sistema (1), puede escribirse como:

$$AX = b$$

Forma que denominamos representación matricial de un sistema lineal.

Ejemplo 1:

Escriba el siguiente sistema lineal en su forma matricial.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_2 - 10x_3 &= -2 \\ 8x_1 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -10 \\ 8 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad ; \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad ; \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

Escriba el siguiente sistema lineal, en su forma matricial.

$$\begin{aligned} &3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 10 \\ &-x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 8 \end{aligned}$$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -8 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad ; b = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Concentrémonos momentáneamente en los sistema que tienen igual número de incógnitas y de ecuaciones. Estos son de la forma:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$, su matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$, que es un matriz de *n x n*.

Como A es una matriz cuadrada, podemos encontrar su determinante, herramienta importante si queremos determinar *a priori*, si el sistema tiene solución única o no. Esto lo podemos ver de la siguiente manera:

Sabemos que A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$ (ver demostración en el apéndice), por lo tanto consideremos el sistema de n ecuaciones y n incógnitas.

$$AX = b \qquad (1)$$

Supongamos que A es invertible (lo que es equivalente a decir que $\det A \neq 0$). Entonces el sistema (1), podemos multiplicar a la izquierda por A^{-1}, nos queda:

$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$

Por definición sabemos que $A^{-1}A = I$, por lo tanto

$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$

$$IX = A^{-1}b$$

Y dado que $IX = X$ (ya que, la matriz identidad juega el papel de modulo de las matrices) nos queda:

$$IX = A^{-1}b$$

$$X = A^{-1}b \qquad (2)$$

Lo cual es la solución del sistema $AX = b$

Veamos que en efecto $X = A^{-1}b$, resuelve el sistema $AX = b$, para ver esto sustituyámoslo en $AX = b$.

$AX = b$; $A(A^{-1}b) = b$; $(AA^{-1})b = b$

$Ib = b$; $b = b$

Ahora veamos que esa solución $(X = A^{-1}b)$, es única. Supongamos que existe otra solución para $AW = b$, esta seria (reproduciendo el proceso anterior).

$W = A^{-1}b \quad (3)$

De (2) y (3) se tiene como

$A^{-1}b = W$ y $A^{-1}b = X$

Entonces $w = X$ (entonces la única solución es $(X = A^{-1}b)$)

Por lo tanto podemos afirmar lo siguiente:

Si A es invertible, el sistema $AX = b$, tiene una solución única $X = A^{-1}b$

Medite cuidadosamente las consecuencias de lo anterior, y vea lo importante que resultan las matrices inversas para resolver un sistema que tenga solución única.

Para empezar consideremos el ejemplo 1 nuevamente.

$$x - y = 4$$

$$-x + 2y = 8$$

La matriz de coeficientes *A* es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Su determinante es

$$|A| = (1)(2) - (-1)(-1) = 1$$

Como $A \neq 0$, entonces el sistema tiene solución única.

Hallemos esa solución. Para esto debemos hallar la inversa (que ya sabemos que existe).

Para hallar la matriz de 2x2, su inversa (empleando determinantes) es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$, por lo tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que en efecto $A^{-1}A = I$

Con la inversa encontramos la solución, así:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad ; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Es decir $x = 16$ y $y = 12$

Otro ejemplo

Consideremos el siguiente sistema lineal.

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$$

$$-3x_1 - x_2 + x_3 = -6$$

$$4x_2 - 5x_3 = -2$$

Determine si tiene o no solución única y en caso de tener solución única encuéntrela.

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Para establecer si tiene o no solución única, hallemos su determinante.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -31$$ (Verifíquelo)

Como $\det A \neq 0$, el sistema tiene solución única y además existe A^{-1}. Ahora tenemos dos procedimientos para encontrar A^{-1}. El primero empleando la reducción de Gauss-Jordán, y el segundo encontrando la matriz adjunta de A.

Vamos a emplear el método de reducción de Gauss-Jordán.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \frac{1}{2}f_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$f_2+3f_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \frac{2}{7}f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$f_1-\frac{3}{2}f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] f_3-4f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-31}{7} & \frac{-12}{7} & \frac{-8}{7} & 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{-7}{31}f_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{31} & \frac{8}{31} & \frac{-7}{31} \end{array}\right] f_2+\frac{1}{7}f_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{-3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{31} & \frac{10}{31} & \frac{-1}{31} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{31} & \frac{8}{31} & \frac{-7}{31} \end{array}\right]$$

$$f_1+\frac{2}{7}f_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{31} & \frac{-11}{31} & \frac{-2}{31} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{31} & \frac{10}{31} & \frac{-1}{31} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{31} & \frac{8}{31} & \frac{-7}{31} \end{array}\right]$$

De esto ultimo tenemos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{31} & \frac{-11}{31} & \frac{-2}{31} \\ \frac{15}{31} & \frac{10}{31} & \frac{-1}{31} \\ \frac{12}{31} & \frac{8}{31} & \frac{-7}{31} \end{bmatrix}$$

De aquí que la solución del sistema es:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-1}{31} & \frac{-11}{31} & \frac{-2}{31} \\ \frac{15}{31} & \frac{10}{31} & \frac{-1}{31} \\ \frac{12}{31} & \frac{8}{31} & \frac{-7}{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

EQUIVALENCIA ENTRE SISTEMAS LINEALES Y MATRICES.

A partir de la construcción que se realizo de la matriz A, del vector X y del vector b, se tiene que existe una relación entre los sistemas lineales y las matrices. Es decir:

$$\text{Sistemas lineales} \longrightarrow \text{Matrices} \qquad (1)$$

Ejemplo:

$$\begin{matrix} 3x_1 - 2x_2 = 4 \\ -x_1 + 5x_2 = 8 \end{matrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \; ; \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \; ; \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, si el contexto así lo permite,(eso depende del tipo de problema que estemos considerando), dada una matriz B, a ella podemos asociarle un sistema lineal, si además conocemos el vector *X* y el vector *b*. Es decir, estamos considerando el camino de regreso en el esquema (1). Así:

$$\text{Sistemas lineales} \longleftarrow \text{Matrices}$$

Ejemplo.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 9\\ 3 & 5 & 3\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1-x_2+2x_3&=1\\ 4x_2+9x_3&=2\\ 3x_1+5x_2+3x_3&=3\end{aligned}$$

El camino de regreso, implica identificar que los elementos de la primera fila de A, son los coeficientes de las variables $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$. De la misma forma con la segunda fila y así sucesivamente.

Como en el contexto en el que se ubican las variables del sistema lineal no da lugar a confusiones, es decir, es fácil determinar el número de variables, se acostumbra a presentar la información mas relevante del sistema lineal, en una matriz que contiene la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes, en una sola matriz que llamaremos la matriz ampliada o aumentada. La separación entre la matriz A y el vector *b*, hacen por medio de una línea vertical o una línea vertical punteada, así:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \vdots\qquad\ \vdots\qquad\qquad\ \vdots\quad&\ \ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}\qquad (1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right]$$, la matriz ampliada del sistema (1)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{nm} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

5.1 PRIMER MÉTODO PARA RESOLVER ECUACIONES LINEALES.

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Consiste en dado un sistema de ecuaciones, escribir su matriz ampliada y aplicar operaciones elementales para transformar la parte correspondiente a la matriz A, en su forma escalonada. Después (como existe una correspondencia entre las matrices y los sistema lineales), volvemos a escribir el sistema lineal resultante, y por medio de sustituciones hacia atrás, hallamos la solución del mismo.

Ejemplo:

Resuelva el siguiente sistema lineal, empleando el método de eliminación Gaussiana.

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$-5x_1 + x_2 + x_3 = -3$$

Solución:

Matriz ampliada.

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 3 & 4 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{matrix}}_{b} \end{array}\right]$$, ahora llevemos la matriz A a su forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -5 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] f_2 - \frac{3}{2} f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} \\ -5 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] f_3 + \frac{5}{3} f_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{-22}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] f_3 + \frac{23}{11} f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{19}{11} & \frac{19}{11} \end{array}\right]$$

La matriz A, ya se encuentra en su forma escalonada por filas, por lo que el proceso de reducción termina allí. Ahora escribimos el sistema lineal, que nos resulto en esta última matriz.

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2$$

$$\frac{-11}{3}x_2 + \frac{13}{3}x_3 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{19}{9}x_3 = \frac{19}{9}$$

Note que de la última ecuación obtenemos x_3

$$\frac{19}{9}x_3 = \frac{19}{9} \quad ; \; x_3 = 1$$

Conocido x_3, podemos hallar x_2 de la siguiente ecuación, así:

$$\frac{-11}{3}x_2 + \frac{13}{3}x_3 = \frac{2}{3} \quad \text{Como } x_3 = 1$$

$$\frac{-11}{3}x_2 + \frac{13}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{-11}{3}x_2 = \frac{2}{3} - \frac{13}{3}$$

$$\frac{-11}{3}x_2 = \frac{-11}{3}$$

$$x_2 = 1$$

Y finalmente conocido x_2 y x_3, podemos dirigirnos a la primera ecuación y hallar x_1.

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2$$

$$3x_1 + 4(1) - 5(1) = 2$$

$$3x_1 = 2 - 4 + 5$$

$$3x_1 = 3$$

$$x_1 = 1$$

Observe que lo que hicimos fue sustituir "hacia atrás" empleando para ello el valor de la variables que vamos hallando.

Nota: en el proceso de reducción de la matriz a su forma escalonada, pudimos haber convertido el primer pivote (entrada 1,1) en 1 para facilitar los cálculos posteriores. Esta es una decisión que depende únicamente de la persona que este reduciendo la matriz.

Sin embargo, recuerde que si lo que esta es reduciendo la matriz para realizar una factorización tipo LU allí no debe transformar los pivotes en 1.

Aquí en el método de eliminación Gaussiana puede o no hacerlo (si así lo desea)

5.2. *SEGUNDO MÉTODO PARA RESOLVER ECUACIONES LINEALES.*

MÉTODO DE GAUSS-JORDÁN

Consiste en dado un sistema de ecuaciones, escribir su matriz ampliada y aplicar operaciones elementales para transformar la parte correspondiente a la matriz A, en su forma escalonada reducida. Después (como existe una correspondencia entre las matrices y los sistemas lineales) volvemos a escribir el sistema lineal. La idea puede ilustrarse como sigue:

Dado el sistema lineal.

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}$$

Y su matriz ampliada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right]$$

Por medio de operaciones elementales

Transformamos la matriz A en su forma escalonada reducida. Es decir:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & c_n
\end{array}\right] \qquad (2)$$

De donde los c_i (para $i = 1,2,3,\cdots,n$), son los números (términos independientes) resultantes después de llevar a cabo el proceso de reducción.

El sistema representado en la última matriz, es:

$x_1 = c_1$

$x_2 = c_2$

$\vdots$

$x_n = c_n$

Que es la solución del sistema (ya no se requiere hacer sustituciones hacia atrás).

Naturalmente, la forma representada en (2), es posible solo si A es de *n x n* e invertible. En caso contrario, por ejemplo en caso que A sea *m x n* se debe llegar a su forma escalonada reducida, y a partir de allí escribir la solución del sistema.

Ejemplo:

Resuelva el sistema lineal, por el método de Gauss-Jordán

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$3x_1 + x_2 - 5x_3 = -2$$

$$4x_2 + 2x_3 = 2$$

Solución:

La matriz ampliada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \frac{1}{2} f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] f_2 - 3f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{-7}{2} \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\frac{2}{5} f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-7}{5} \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] f_1 + \frac{1}{2} f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-6}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-7}{5} \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] f_3 - 4f_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-6}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{38}{5} & \frac{38}{5} \end{array}\right] \frac{5}{38} f_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-6}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] f_2 + \frac{7}{5} f_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-6}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$f_1+\frac{6}{5}f_3\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

De la última matriz (que se encuentra en su forma escalonada reducida), se tiene

$x_1=1$

$x_2=0$

$x_3=1$

Ejemplo 2: Resuelva el siguiente sistema, empleando el método de Gauss-Jordán

$$3x_1+5x_2-x_3-x_4=3$$

$$-4x_1-x_2+5x_3+x_4=-1$$

Solución:

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}3&5&-1&-1&3\\-4&-1&5&1&-1\end{array}\right]\frac{1}{3}f_1\left[\begin{array}{cccc|c}1&\frac{5}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}&1\\-4&-1&5&1&-1\end{array}\right]f_2+4f_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&\frac{5}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}&1\\0&\frac{17}{3}&\frac{11}{3}&\frac{-1}{3}&3\end{array}\right]\frac{3}{17}f_2\left[\begin{array}{cccc|c}1&\frac{5}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}&1\\0&1&\frac{11}{17}&\frac{-1}{17}&\frac{9}{17}\end{array}\right]$$

$$f_1-\frac{5}{3}f_2\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&\frac{-24}{17}&\frac{-4}{17}&\frac{2}{17}\\0&1&\frac{11}{17}&\frac{-1}{17}&\frac{9}{17}\end{array}\right]$$

La matriz A, ya se encuentra en su forma escalonada reducida, por lo que el método finaliza allí.

Escribamos el sistema resultante:

$$x_1-\frac{24}{17}x_3-\frac{4}{17}x_4=\frac{2}{17}$$

$$x_2+\frac{11}{17}x_3-\frac{1}{17}x_4=\frac{9}{17}$$

Note que las variables x_3 y x_4 están presentes en las dos ecuaciones. A x_3 y x_4 las llamaremos variables libres.

Para encontrar un vector que satisfaga las dos ecuaciones se requiere asignarle a x_3 y x_4, valores arbitrarios, con eso obtenemos lo valores para x_1 y x_2.

Despejemos x_1 en la primera ecuación.

$$x_1 = \frac{2}{17} + \frac{24}{17}x_3 + \frac{4}{17}x_4$$

Despejemos x_2 en la segunda ecuación:

$$x_2 = \frac{9}{17} - \frac{11}{17}x_3 + \frac{1}{17}x_4$$

x_3 y x_4 son arbitrarios (cualquiera). Recuerde que lo que buscamos es un vector $[x_1, x_2 x_3, x_4]$, que satisfaga el sistema. por lo tanto podemos escribirlo así:

$$x_1 = \frac{2}{17} + \frac{24}{17}x_3 + \frac{4}{17}x_4$$

$$x_2 = \frac{9}{17} - \frac{11}{17}x_3 + \frac{1}{17}x_4$$

$$x_3 = x_3$$

$$x_4 = x_4$$

Que escrito como vector fila seria:

$$\left[\frac{2}{17} + \frac{24}{17}x_3 + \frac{4}{17}x_4, \frac{9}{17} - \frac{11}{17}x_3 + \frac{1}{17}x_4, x_3, x_4\right] \qquad (1)$$

Observe que para cada valor que se le asigne para x_3 y x_4 (las variables libres) se obtiene un vector que satisface las dos ecuaciones.

Como podemos asignar a x_3 y x_4 todos los valores que deseemos, se trata pues un caso de infinitas soluciones.

La forma de la solución escrita en (1), recibe el nombre de solución general , ya que contiene la forma de todas las posible soluciones.

Si deseamos encontrar un vector cualquiera que satisfaga el sistema, le asignamos un valor a x_3 y x_4 (cualquiera), a este vector lo llamaremos solución particular.

Veamos pues una solución particular.

$$\left[\frac{2}{17}+\frac{24}{17}x_3+\frac{4}{17}x_4,\frac{9}{17}-\frac{11}{17}x_3+\frac{1}{17}x_4,x_3,x_4\right]$$

Por ejemplo si $x_3=0$ y $x_4=0$, resulta.

$\left[\frac{2}{17},\frac{9}{17},0,0\right]$, Solución particular 1.

Otra solución particular, si $x_3=1$ y $x_4=0$

$\left[\frac{26}{17},\frac{-2}{17},1,0\right]$; Solución particular 2

Verifique en efecto que estas dos soluciones satisfacen las ecuaciones lineales del ejemplo.

Naturalmente como x_3 y x_4 pueden tomar cualquier valor (tantos numero reales hay), se pueden general tantas soluciones particulares como se desee.

Ejemplo 3:

Resuelva el siguiente sistema lineal mediante el método de Gauss-Jordán

$$x_1-7x_2+x_3=-5$$

$$3x_1+2x_2-5x_3=7$$

$$-2x_1+14x_2-2x_3=4$$

Solución:

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-7&1&-5\\3&2&-5&7\\-2&14&-2&4\end{array}\right]f_2-3f_1\left[\begin{array}{ccc|c}1&-7&1&-5\\0&23&-8&22\\-2&14&-2&4\end{array}\right]f_3+2f_1\left[\begin{array}{ccc|c}1&-7&1&-5\\0&23&-8&22\\0&0&-2&-6\end{array}\right]$$

Aquí ya podemos detenernos, ya que, si observamos cuidadosamente, en la tercera fila dice:

$0 = -6$, lo cual es un absurdo

Se trata pues de un sistema inconsistente (no tiene solución) y ya conocemos una forma de identificarlo.

5.3 TERCER MÉTODO PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES.

REGLA DE CRAMER

Definición: sea A una matriz de n x n y suponga que $\det A \neq 0$, entonces la solución única del sistema $AX = b$, esta dada por:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Para esto consideremos el sistema lineal

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Donde:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

.
.
.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \qquad [19]$$

Ejemplo:

Resuelva el siguiente sistema lineal, empleando para ello la regla de Cramer.

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 7$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2$$

$$4x_1 \qquad + 2x_3 - x_4 = 6$$

$$5x_1 - x_2 - x_3 \qquad = 4$$

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Entonces.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -114$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -114$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -114$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-114}{-114} = 1 \quad ; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-114} = 0$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-114}{-114} = 1 \quad ; \; x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{0}{-114} = 0$$

Cada uno de los determinantes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_n$, se obtienen sustituyendo el vector b en la columna 1, columna 2…columna n de la matriz A y posteriormente se procede a calcular el respectivo determinante.

5.4 CUARTO MÉTODO PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES.

EMPLEANDO LA FACTORIZACIÓN LU

El objetivo es resolver un sistema de la forma $AX = b$ (con A de n x n), donde A es invertible. Si A se puede escribir de la forma $A = LU$ donde L y U son invertibles entonces existe un único vector y tal que $LU = b$ y otro único vector X tal que $UX = y$

Entonces de $AX = b$, resulta

$LUX = b$, como $UX = y$ queda:

$L(UX) = b$; $Ly = b$, Lo cual soluciona el sistema.

Ejemplo:

Dado el sistema lineal

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$$

$$-4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

Emplee la factorización LU para obtener la solución del mismo.

Solución:

Empleando el método fácil para hallar L y U, tenemos

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{bmatrix} \quad ; U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

De donde

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

De la multiplicación de matrices, del lado izquierdo y de la igualdad tenemos:

$c_{11} = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot [2 \quad 0 \quad 0] = 2 = 2$

$c_{12} = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot [-1 \quad \beta_1 \quad 0] = -1 = -1$

$c_{13} = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot [5 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = 5 = 5$

$c_{21} = [\alpha_1 \quad 1 \quad 0] \cdot [2 \quad 0 \quad 0] = 2\alpha_1$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}$$

$c_{22} = [\alpha_1 \quad 1 \quad 0] \cdot [-1 \quad \beta_2 \quad 0] = -\alpha_1 + \beta_1 = 2$

Como $\alpha_1 = \dfrac{3}{2}$, se tiene que $\beta_1 = 2 + \alpha_1$

$$\beta_1 = 2 + \frac{3}{2} \quad ; \ \beta_1 = \frac{7}{2}$$

$c_{23} = [\alpha_1 \quad 1 \quad 0] \cdot [5 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = 5\alpha_1 + \beta_2 = -1$

Como $\alpha_1 = \dfrac{3}{2}$, se tiene que $\beta_2 = -1 - 5\alpha_1$

$$\beta_2 = -1 - (5)\frac{3}{2} \quad ; \ \beta_2 = \frac{-17}{2}$$

$c_{31} = [\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad 1] \cdot [2 \quad 0 \quad 0] = 2\alpha_2 = 4$

$$\alpha_2 = \frac{-4}{2} \quad ; \ \alpha_2 = -2$$

$c_{32} = [\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad 1] \cdot [-1 \quad \beta_1 \quad 0] = -\alpha_2 + \alpha_3\beta_1 = 3$

Como $\alpha_2 = -2$ y $\beta_1 = \dfrac{7}{2}$ se tiene que $\alpha_3 = \dfrac{3 + \alpha_2}{\beta_1}$

$$\alpha_3 = \frac{3 + -2}{\frac{7}{2}} \quad ; \ \alpha_3 = \frac{2}{7}$$

$c_{33} = [\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad 1] \cdot [5 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = 5\alpha_2 + \alpha_3\beta_2 + \beta_3 = 1$

Como $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = \frac{2}{7}$ y $\beta_2 = \frac{-17}{2}$ se tiene que $\beta_3 = 1 - 5\alpha_2 - \alpha_3\beta_2$

$$\beta_3 = 1 - 5(-2) - \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{-17}{2}\right) \; ; \; \beta_3 = 1 + 10 + \frac{17}{7} \quad ; \; \beta_3 = \frac{94}{7}$$

Por tanto las matrices L y U son:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & \frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix} \; ; \; U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{94}{7} \end{bmatrix}$$

Ahora para resolver el sistema empleamos inicialmente $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & \frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando el producto de la izquierda

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{3}{2}y_1 + y_2 \\ -2y_1 + \frac{2}{7}y_2 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos el proceso de sustitución hacia atrás, tenemos:

$y_1 = 12$

De la segunda fila tenemos

$$\frac{3}{2}y_1 + y_2 = 8 \qquad ; \; y_2 = 8 - \frac{3}{2}y_1$$

$$y_2 = 8 - \frac{3}{2}(12) \qquad ; y_2 = -10$$

De la tercera fila

$$-2y_1 + \frac{2}{7}y_2 + y_3 = 0 \qquad ; \; y_3 = 2y_1 - \frac{2}{7}y_2$$

$$y_3 = 2(12) - \frac{2}{7}(10) \qquad ; \; y_3 = 24 + \frac{20}{7}$$

$$y_3 = \frac{188}{7}$$

Finalmente empleando la relación $UX = y$, podemos hallar *x*:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{94}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -10 \\ \frac{188}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{17}{2}x_3 \\ \frac{94}{7}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -10 \\ \frac{188}{7} \end{bmatrix}$$

De la tercera fila, $\frac{94}{7}x_3 = \frac{188}{7}$

$$x_3 = \frac{188}{94} \qquad ; \; x_3 = 2$$

De la segunda fila, $\frac{7}{2}x_2 - \frac{17}{2}x_3 = -10$

$$x_2 = \frac{-10 + \frac{17}{2}x_3}{\frac{7}{2}} \qquad ; \; x_2 = \frac{-10 + \frac{17}{2}(2)}{\frac{7}{2}}$$

$$x_2 = \frac{-10 + 17}{\frac{7}{2}} \qquad ; \; x_2 = 2$$

De la primera fila, $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 12$

$$x_1 = \frac{12 + x_2 - 5x_3}{2} \quad ; \; x_1 = \frac{12 + 2 - 5(2)}{2}$$

$$x_1 = \frac{14 - 10}{2} \quad ; \; x_1 = 2$$

5.5 QUINTO METODO PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES

EMPLEANDO LA MATRIZ INVERSA

El objetivo es resolver un sistema de la forma $AX = b$ (con A de $n \times n$), donde A es invertible.
Partiendo del sistema $AX = b$, podemos multiplicar a izquierda por A^{-1} (Que existe, dado que A es invertible), con lo que nos queda:

$A^{-1}AX = A^{-1}b$ Agrupando obtenemos
$(A^{-1}A)X = A^{-1}b$ Simplificando
$(I)X = A^{-1}b$ Finalmente
$X = A^{-1}b$

La ultima afirmación, nos indica que se A es de $n \times n$ e invertible, entonces la solución del sistema lineal $AX = b$, la encontramos de la forma $X = A^{-1}b$.

Ejemplo

Dado el sistema lineal

$$2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 21$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 = 11$$
$$7x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 17$$

Determine si el sistema tiene solución única o no. De tener solución única, encuentre su inversa y úsela para resolver el sistema.

Solución

Para determinar si el sistema tiene solución única o no, debemos calcular su determinante. Si este nos da diferente de cero (0), entonces el sistema tendrá única solución y además la inversa de la matriz de coeficientes existirá (y esta será única)

Encontremos el determinante:

$$DetA = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -225$$

Recordemos que tenemos dos procedimientos para hallar la inversa:

1. Empleando el método de reducción de Gauss- Jordán
2. Empleando determinantes ($A^{-1} = \frac{1}{\det A} * AdjA$)

Voy a emplear el método de reducción de Gauss- Jordán. Se deja al estudiante la invitación a realizarlo también por el otro método.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \frac{1}{2}f_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad f_2 - 4f_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -19 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad f_3 - 7f_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -19 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & -31 & \frac{-7}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \frac{1}{7}f_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{-3}{2} & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-19}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & -31 & \frac{-7}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \quad f_1 + \frac{3}{2}f_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{13}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-19}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & -31 & \frac{-7}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$f_3 - \frac{11}{2}f_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{13}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-19}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-225}{14} & \frac{-27}{14} & \frac{-11}{14} & 1 \end{array}\right] \quad \frac{-14}{225}f_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{13}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-19}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{25} & \frac{11}{225} & \frac{-14}{225} \end{array}\right]$$

$$f_1 - \frac{13}{14} f_3 \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{25} & \frac{38}{225} & \frac{13}{225} \\ 0 & 1 & \frac{-19}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{25} & \frac{11}{225} & \frac{-14}{225} \end{array}\right| \qquad f_2 + \frac{19}{7} f_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{25} & \frac{38}{225} & \frac{13}{225} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{25} & \frac{62}{225} & \frac{-38}{225} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{25} & \frac{11}{225} & \frac{-14}{225} \end{array}\right]$$

Por lo tanto, dado que la matriz A pudo ser reducida (por medio de operaciones elementales) a la matriz identidad, se tiene que la matriz del lado derecho es la inversa de A.
Es decir,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{25} & \frac{38}{225} & \frac{13}{225} \\ \frac{1}{25} & \frac{62}{225} & \frac{-38}{225} \\ \frac{3}{25} & \frac{11}{225} & \frac{-14}{225} \end{bmatrix}$$

Finalmente, para obtener la solución del sistema, consideramos la ecuación $X = A^{-1}b$.
Donde,

$$b = \begin{bmatrix} 21 \\ 11 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-1}{25} & \frac{38}{225} & \frac{13}{225} \\ \frac{1}{25} & \frac{62}{225} & \frac{-38}{225} \\ \frac{3}{25} & \frac{11}{225} & \frac{-14}{225} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 11 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Es decir, la solución es $x_1 = 2; x_2 = 1; x_3 = 2$

Definición:

Un sistema lineal se dice homogéneo si es de la forma

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\ \ \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

Es decir el vector de términos independientes tiene en todos sus componentes es valor cero (0).

Un sistema homogéneo tiene como solución el vector $(0,0,0,\cdots,0)$, es decir

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$$

A esta solución la llamamos solución trivial.

En forma matricial, el sistema homogéneo puede representarse como $AX = 0$, ya que $b = 0$.

Ahora, si A es una matriz de n x n y además $\det A \neq 0$, entonces la única solución del sistema $AX = 0$, es la solución trivial.

Si $\det A = 0$, entonces el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones. Es claro, que un sistema homogéneo no puede ser inconsistente, ya que, por lo menos tiene una solución (la trivial).

Ejemplo:

Dado el sistema

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 &= 0 \\
-5x_1 - 6x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Determine si tiene solución distinta a la trivial.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = (2)(-6) - (-5)(4) = 8$$

Dado que $|A| \neq 0$, entonces la única solución es la trivial.

Ejemplo 2:

Dado el sistema

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$-3x_1 + 5x_2 + \alpha x_3 = 0$$

Determine lo valores de α (si los hay) de manera que el sistema tenga solución distinta a la trivial.

Solución:

Vamos a emplear el proceso de reducción de Gauss-Jordán, aunque, también podría emplearse el determinante e igualarlo a cero. (¿Por que?).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & \alpha & 0 \end{array}\right] f_2 - 2f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ -3 & 5 & \alpha & 0 \end{array}\right] f_2 + 3f_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 9+\alpha & 0 \end{array}\right] \frac{1}{5} f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 9+\alpha & 0 \end{array}\right] f_3 + f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{38}{5}+\alpha & 0 \end{array}\right]$$ Aquí

podemos detenernos, ya que, para que el sistema tenga infinitas soluciones, se requiere que la ultima fila se una fila de ceros (¿Por qué?). Es decir

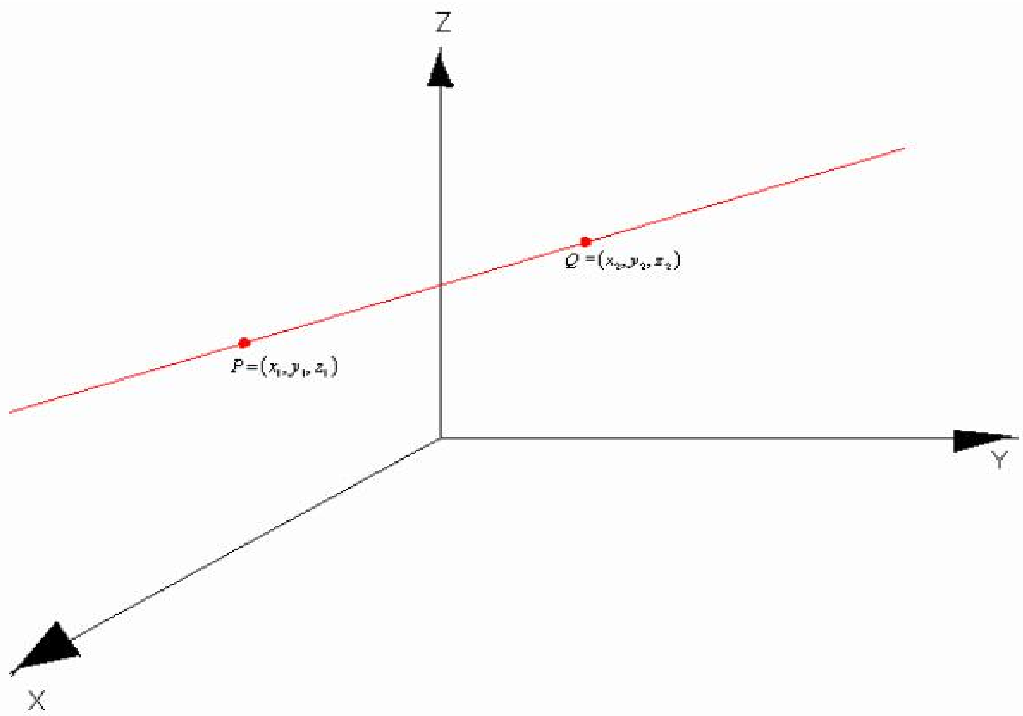
$\frac{38}{5} + \alpha = 0$, es decir $\alpha = \frac{-38}{5}$

6. RECTAS EN R^3

La idea que motiva la siguiente discusión, es similar a la que conocemos en R^2, es decir, que dados dos puntos por ellos pasan una y solo una recta. Tratemos pues de derivar la ecuación de dicha recta en R^3.

Consideremos dos puntos $P=(x_1,y_1,z_1)$ y $Q=(x_2,y_2,z_2)$

Que se encuentran sobre la recta.



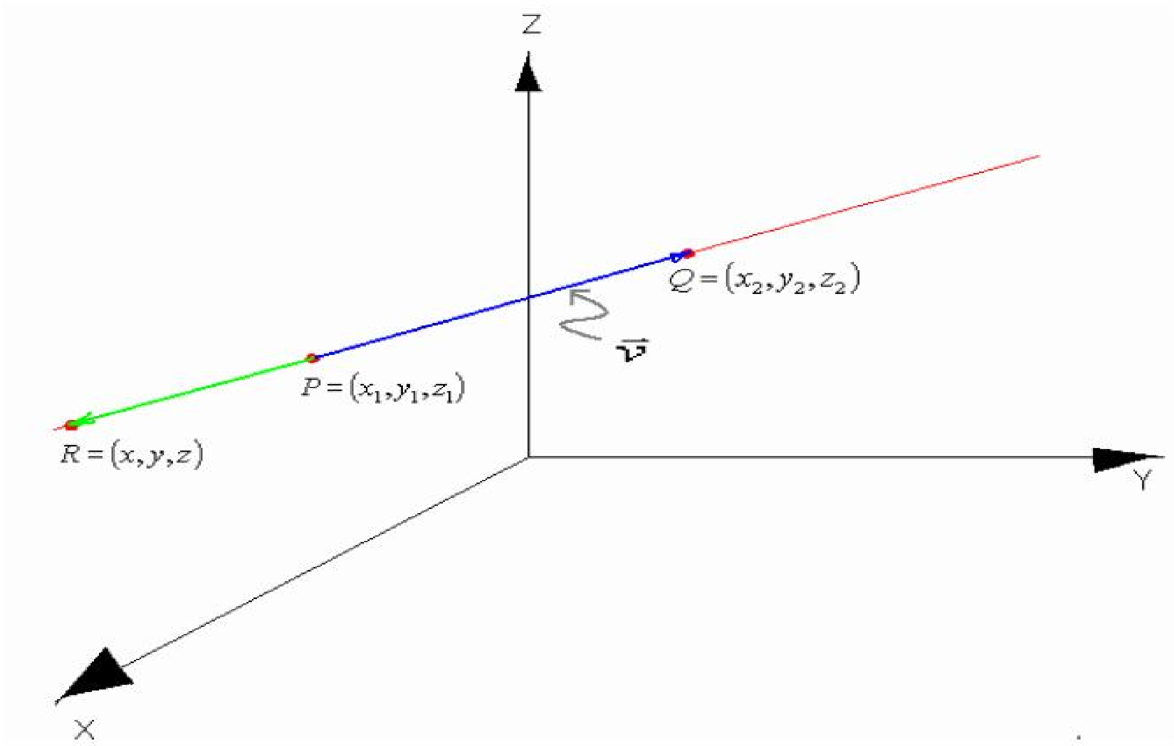
Ahora, un vector paralelo a la recta es de la forma $\overrightarrow{PQ}$ (recordemos que $\overrightarrow{PQ}$ tiene una familia infinita de vectores que son equivalentes a el), por tanto:

$$\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}$$

Un vector equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ es por ejemplo $\vec{v}$, que tiene la forma:

$$\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}$$

Consideremos ahora otro punto (cualquiera) sobre la recta $R=(x,y,z)$.

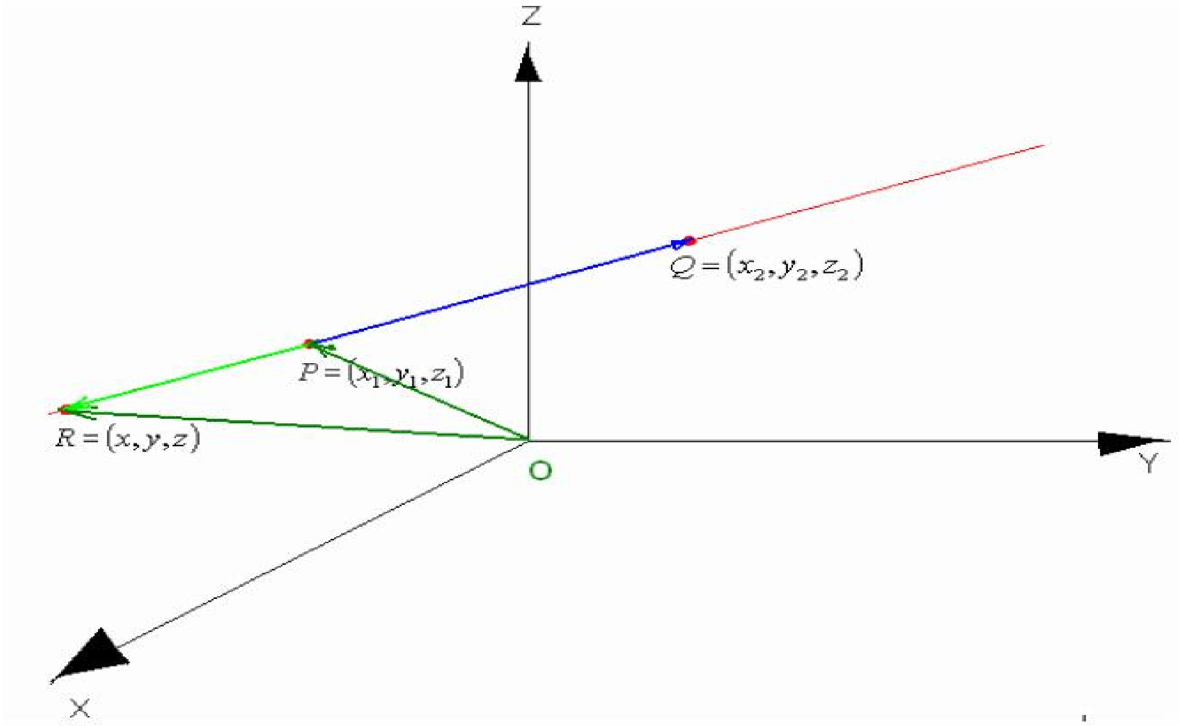


Note que $\overrightarrow{PR}$, es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ y como $\overrightarrow{PQ}$ es equivalente a un vector $\vec{v}$, entonces $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\vec{v}$. A partir, de esto podemos escribir que $\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{PQ}$

Es decir, como $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos, existe un escalar t, que los hacen iguales (si van en dirección opuesta t es negativo, si uno es mayor que otro entonces t es un numero racional, etc.).

Ahora como $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\vec{v}$, entonces $\overrightarrow{PR}=t\vec{v}$

Finalmente, representamos los vectores de posición $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{PR}$

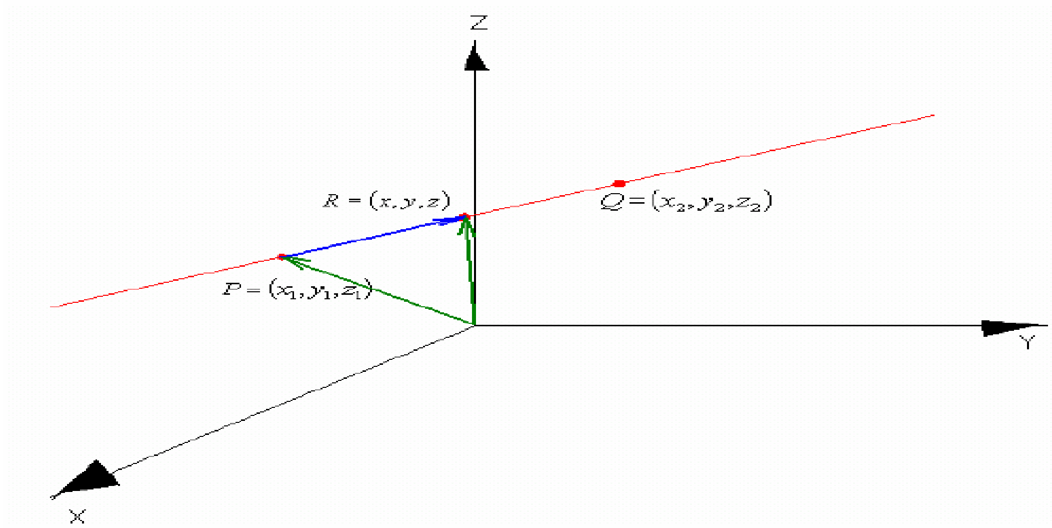


Note que para el grafico anterior, se tiene la siguiente suma

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}$$

Esto si R esta a la izquierda de P.

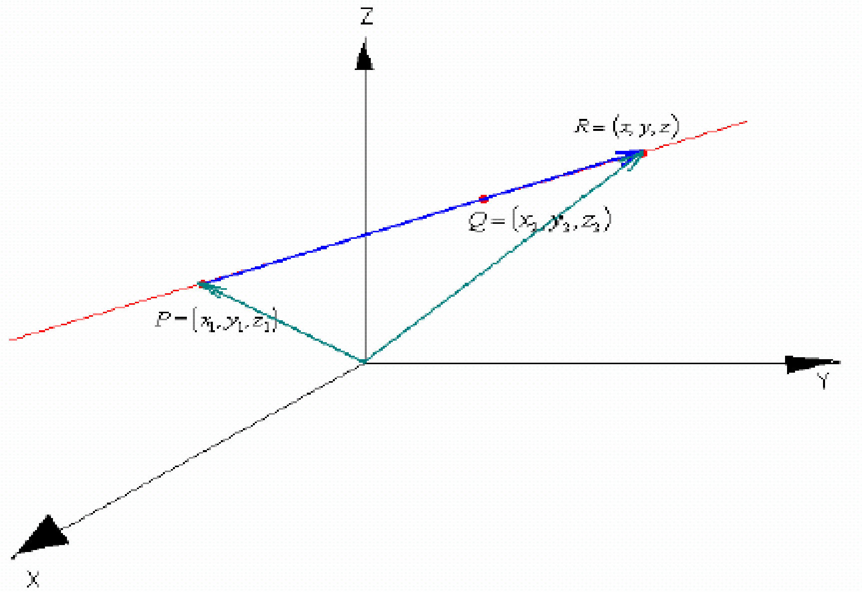
Si R esta entre P y Q, tenemos:



Y la suma vuelve a ser la misma

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}$$

Finalmente si, *R* esta a la derecha de *Q*, entonces:



Nuevamente $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}$

Dado que $\overrightarrow{PR}=t\vec{v}$, se tiene entonces

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+t\vec{v}$ Ecuación vectorial.

Como

$$\overrightarrow{OR}=(x-0)\hat{i}+(y-0)\hat{j}+(z-0)\hat{k}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

$$\overrightarrow{OP}=(x_1-0)\hat{i}+(y_1-0)\hat{j}+(z_1-0)\hat{k}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$$

$$t\hat{v}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}$$

Si sustituimos en la ecuación vectorial, tenemos:

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+t\vec{v}$$

$$x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}+t(x_2-x_1)\hat{i}+t(y_2-y_1)\hat{j}+t(z_2-z_1)$$

Igualando componentes:

En $\hat{i}$: $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$

En $\hat{j}$: $y = y_1 + t(y_2 - y_1)$ $\qquad (2)$

En $\hat{k}$: $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$

Las anteriores son denominadas las ecuaciones paramétricas de la recta.

Si un punto R esta sobre la recta L, estas ecuaciones (al igual que la vectorial) se satisfacen para algún valor de t. Ahora, si de las ecuaciones paramétricas despejamos t, nos queda:

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$t = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$t = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

E igualando

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (3)$$

A estas últimas ecuaciones se les denomina ecuaciones simétricas de la recta.

Para simplificar un poco la notación, se acostumbra a hacer las siguientes asignaciones:

$$x_2 - x_1 = a$$

$$y_2 - y_1 = b$$

$$z_2 - z_1 = c$$

De donde las ecuaciones paramétricas quedan

$$x = x_1 + ta$$

$$y = y_1 + tb$$

$$z = z_1 + tc$$

Y las simétricas

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} \quad [20]$$

Con esto afirmamos que

$$\vec{v}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$$

Donde los números *a*, *b* y *c* son los números directores del vector $\hat{v}$ (que es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$.

Ejemplo:

Encuentre las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por los puntos $P=(1,2,3)$ y $Q=(-3,3,8)$

Solución:

$$\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(-3-1)\hat{i}+(3-2)\hat{j}+(8-3)\hat{k}=-4\hat{i}+1\hat{j}+5\hat{k}$$

Por lo tanto

$a=-4 \qquad ; b=1 \qquad ; \ c=5$

Ecuaciones vectoriales

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+t\vec{v}$$

$$x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=1\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+t\left(-4\hat{i}+1\hat{j}+5\hat{k}\right)$$

Ecuaciones paramétricas:

$x=x_1+ta$		$x=1-4t$
$y=y_1+tb$	Entonces	$y=2+t$
$z=z_1+tc$		$z=3+5t$

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

Entonces

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{5}$$

Para encontrar otros puntos que se encuentren en la recta, podemos darle un valor a t en las ecuaciones paramétricas. Por ejemplo si $t = 2$

$x = 1 - 4(2)$		$x = -7$
$y = 2 + 2$	Entonces	$y = 4$
$z = 3 + 5(2)$		$z = 13$

Por lo tanto el punto $(-7,4,13)$, también esta en *L*.

Ejemplo 2:

Encuentre las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta que pasan por el punto $(2,6,-3)$, y es paralela al vector $\hat{v} = 4\hat{i} - 5\hat{k}$

Solución:

Aquí $P = (2,6,-3) = (x_1, y_1, z_1)$ y $\hat{v} = 4\hat{i} + 0\,\hat{j} - 5\hat{k}$

$x = 2 + 4t$

$y = 6$

$z = -3 - 5t$

De donde las ecuaciones simétricas son de la siguiente forma:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{z+3}{-5} \ ; \ y = 6$$

Naturalmente la expresión $\frac{y - y_1}{b}$, carece sentido si $b = 0$, por lo tanto se debe escribir las ecuaciones simétricas como se hizo.

<u>Nota</u>: Las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta no son únicas. Basta con tomar un par de puntos distintos y se verifica la afirmación.

Ejemplo 3:

Demuestre que las rectas

$$L_1: \frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{2} \quad \text{y} \quad L_2 = \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+4}{5}$$

Son ortogonales.

Solución:

Para ver esto, es suficiente con ver los vectores de dirección de las rectas $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, son ortogonales.

$$\vec{v}_1 = 4\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{v}_2 = -2\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$$

Veamos el producto escalar de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = (4,-1,2) \bullet (-2,2,5) = -8 - 2 + 10 = 0$$

Por lo tanto $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son ortogonales, al igual que la rectas L_1 y L_2.

Ejemplo 4.

Demuestre que las rectas

L_1: $x = 2 + 4t$; $y = -3 + t$; $z = 3 - 2t$

L_2: $x = 1 + 3s$; $y = -4 + s$; $z = -7 + 2s$

Tiene el punto $(10,-1,-1)$, en común.

Solución:

Hay varias formas de enfocar el problema, una de ellas es pensar que nos están afirmando que existe un punto en común y supongamos que no lo conocemos (la idea de hallarlo y debe coincidir con el punto que nos dan)

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$, en un punto en común de las rectas L_1 y L_2.

Como P esta en L_1, debe satisfacer su ecuación para algún t, es decir:

$x_0 = 2 + 4t$

$y_0 = -3 + t$

$z_0 = 3 - 2t$

De otra parte, como P también esta en la L_2, debe satisfacer la ecuación de esta recta, es decir:

$x_0 = 1 + 3s$

$y_0 = -4 + s$

$z_0 = -7 + 2s$

Dado que los lados izquierdos de las ecuaciones paramétricas son iguales, los derechos también deben serlo, así:

$$\begin{aligned} 2 + 4t &= 1 + 3s \\ -3 + t &= -4 + s \\ 3 - 2t &= -7 + 2s \end{aligned} \qquad \text{Ò} \qquad \begin{aligned} 4t - 3s &= -1 \\ t - s &= -1 \\ -2t - 2s &= -10 \end{aligned}$$

Que nos da la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -10 \end{array}\right] f_1 \leftrightarrow f_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{c} f_2 - 4f_1 \\ f_3 + 2f_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \begin{array}{c} f_3 - 4f_2 \\ f_1 + f_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Lo que significa que $t = 2$ y $s = 3$

Sustituyendo $t = 2$ en L_1, nos queda

$x = 2 + 4t \quad ; \; x = 10$

$y = -3 + t \quad ; \; y = -1$

$z = 3 - 2t \quad ; \; z = -1$

Ahora sustituyendo en L_2

$x = 1 + 3s \quad ; \; x = 10$

$y = -4 + s \quad ; \; y = -1$

$z = -7 + 2s \quad ; \; z = -1$

Por lo tanto L_1 y L_2, tiene en común el punto $(10,-1,-1)$

Si lo que nos pidieran fuese que dadas dos rectas L_1 y L_2 demostrar que estas no tienen puntos en común , el enfoque anterior ayuda mucho, ya que supongamos lo contrario, es decir que si tienen un punto en común digamos $P(x_0, y_0, z_0)$ y debemos llegar a un absurdo (es decir no existe t y s que satisfagan las ecuaciones). Este absurdo se presenta en la reducción que se hace en la matriz aumentada.

Esta contradicción verifica que no hay puntos en común.

Ejemplo 5.

Encuentre una recta L ortogonal a las rectas

$L_1: \quad x = 2 + 4t \quad ; \; y = -2 - 3t \quad ; \; z = 1 + t$

$L_2: \quad x = 5 + 2s \quad ; \; y = 1 + s \quad ; \; z = -4 - 5s$

Y que pase por el punto $(1,2,-1)$

Solución:

De la recta L_1 obtenemos su vector de dirección $\vec{v}_1$, así:

$\vec{v}_1 = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 1\hat{k}$

De la recta L_2, hallamos su vector de dirección $\vec{v}_2$, así:

$\vec{v}_2 = -2\hat{i} + 1\hat{j} - 5\hat{k}$

La recta L que buscamos debe ser ortogonal a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ que es equivalente a decir, que es ortogonal a L_1 y L_2. Si hacemos el producto vectorial cruz entre $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, hallaremos un vector $\vec{w}$ que es ortogonal a las dos rectas.

$$\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 14\hat{i} + 18\hat{j} - 2\hat{k}$$

$\vec{w}$ Será el vector de dirección de la recta L pedida. Como conocemos el punto por donde pasa L y tenemos un vector paralelo a ella (a L) podemos hallar su ecuación:

$x = x_1 + ta$

$y = y_1 + tb$

$z = z_1 + tc$

Donde $\vec{w} = 14\hat{i} + 18\hat{j} - 2\hat{k}$, entonces $a = 14$, $b = 18$ y $c = -2$ por tanto

$x = 1 + 14t$

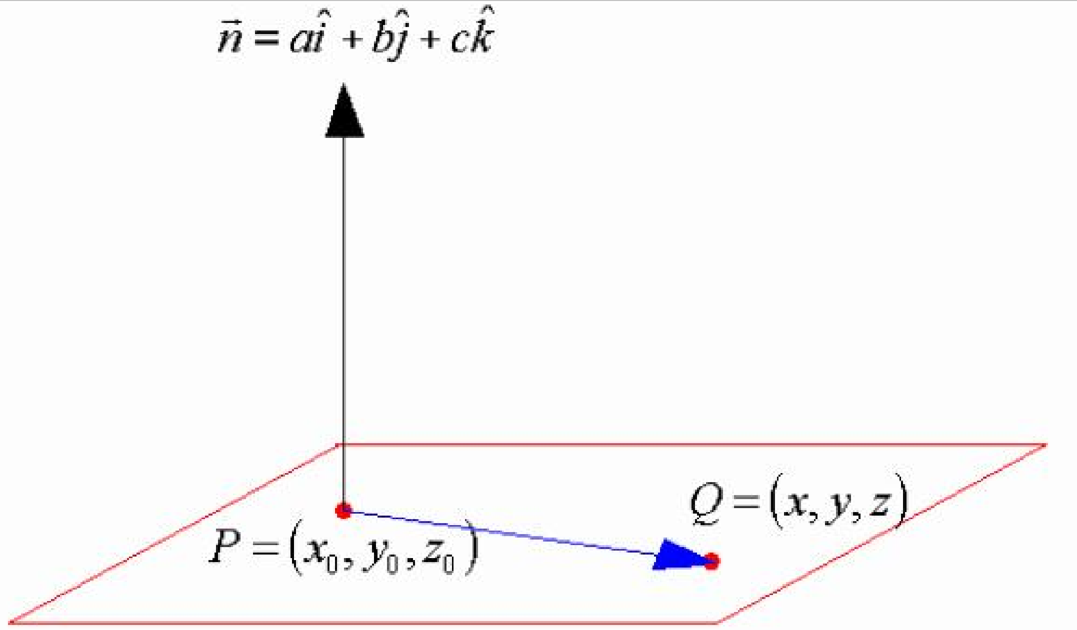
$y = 2 + 18t$

$z = -1 - 2t$

7. PLANOS

Definición:

Un plano es el conjunto de todos los punto Q, en los que dado P (un punto en el espacio) y un vector $\vec{n}$ (diferente de cero) se satisface la ecuación $\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{n} = 0$



Veamos lo que significa la definición.

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$, un punto conocido sobre el plano cuyo vector normal $\vec{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$.

Sea $Q = (x, y, z)$, un punto cualquiera del plano entonces: $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}$

Como $PQ \perp \vec{n}$, entonces $\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{n} = 0$, lo que implica que

$$\langle (x - x_0), (y - y_0), (z - z_0) \rangle \bullet \langle a, b, c \rangle = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

Realizando los productos

$$ax - ax_0 + by - by_0 + zc - zc_0 = 0$$

$ax + by + zc = ax_0 + by_0 + zc_0$

Note que el lado derecho de la ecuación es un numero ya que a, b, c, x_0, y_0 y z_0 lo son.

Sea $d = ax_0 + by_0 + zc_0$, entonces la ecuación cartesiana del plano es:

$$ax + by + zc = d \qquad (2)$$

Los planos generalmente se designan con la letra π

Ejemplo.

Encuentre la ecuación del plano que pasa por le punto $(2,-3,5)$, y cuyo vector normal es $\vec{n} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

Solución:

De (1) se obtiene,

$2(x-2) - 1(y+3) - 1(z-5) = 0$

$2x - 4 - y - 3 - z + 5 = 0$

$2x - y - z = 4 + 3 - 5$

$2x - y - z = 2$

Para graficar el plano, se hallan los puntos corte con cada uno de los ejes *x*, *y*, y *z*. (recuerde que en los ejes las otras dos variables tienen el valor de cero (0))

Realicemos la grafica de $2x - y - z = 2$

i. Si $x = 0 = y$, entonces $-z = 2$; $z = -2$

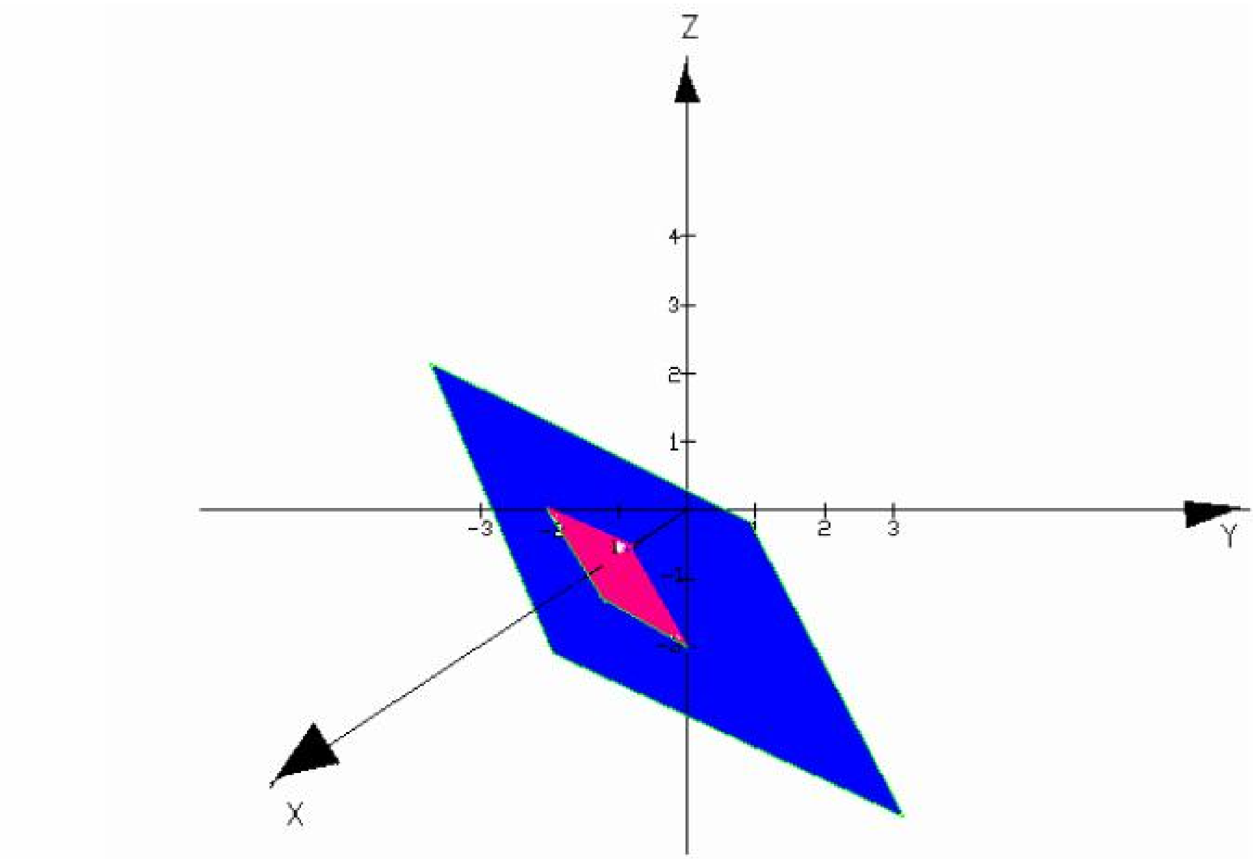
   Tomemos el punto $(0,0,-2)$

ii. Si $x = 0 = z$, entonces $-y = 2$; $y = -2$

   Tomemos el punto $(0,-2,0)$

iii. Si $y = 0 = z$, entonces $2x = 2$; $x = 1$

   Tomemos el punto $(1,0,0)$



A partir del triangulo obtenido, formamos un paralelogramo, y finalmente trazamos otra paralelas externas al paralelogramo.

Ejemplo 2:

Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $P=(2,3,1)$, $Q=(1,-1,2)$ y $R=(5,2,-3)$

Formamos los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ (o $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$)

$\overrightarrow{PQ}=(1-2)\hat{i}+(-1-3)\hat{j}+(2-1)\hat{k}$

$\overrightarrow{PQ}=-1\hat{i}-4\hat{j}+1\hat{k}$

$\overrightarrow{PQ}=(5-2)\hat{i}+(2-3)\hat{j}+(-3-1)\hat{k}$

Ahora hallamos un vector que se a perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ simultáneamente (este nos sirve como vector normal)

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -1 & -4 & 1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -1 & -4\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$=17\hat{i}+7\hat{j}+13\hat{k}$$

Entonces utilizando cualquiera de los tres puntos (por ejemplo, Q) tenemos:

$$17(x-1)+7(y+1)+13(z-2)=0$$

$$17x-17+7y+7+13z-26=0$$

$$17x+7y+13z=17-7+26$$

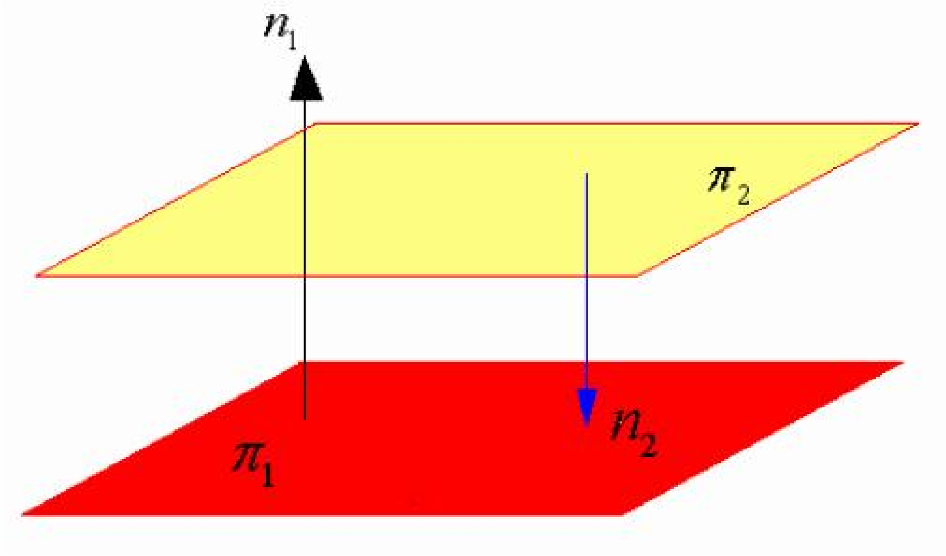
$$17x+7y+13z=36$$

Verifique que la ecuación resulta la misma si se decide hacer $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}$, y escoja el punto P o R.

Definición:

Dos planos π_1 y π_2, son paralelos si sus vectores normales n_1 y n_2 son paralelos. [21]

Si dos planos no son paralelos, entonces se intersectan en una línea recta.



Para ver que n_1 y n_2 son paralelos, puede emplear cualquiera de las dos siguientes condiciones.

1. $\dfrac{n_1 \bullet n_2}{|n_1||n_2|} = \pm 1$

2. $n_1 \times n_2 = 0$

Ejemplo:

Determine si los planos

$\pi_1:\ 2x - 3y + 4z = 10$

$\pi_2:\ 4x - y - z = 3$

Son paralelos o no. En caso de que no sean paralelos encuentre la ecuación de la recta en que ese intersectan.

Solución

De π_1: tenemos $\vec{n}_1 = 2\hat{i} - 3\vec{j} + 4\hat{k}$

De π_2: tenemos $\vec{n}_2 = 4\hat{i} - 1\vec{j} - 1\hat{k}$

Veamos si son paralelos

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 7\hat{i} + 14\hat{j} + 10\hat{k} \neq 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

Por lo tanto nos son paralelos.

Cuando no son paralelos se intersectan y debemos hallar los puntos comunes (de intersección) de los planos. Para lograr esto debemos resolver las dos ecuaciones simultáneamente, es decir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 10 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \frac{1}{2} f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] f_2 - 4 f_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -9 & 17 \end{array}\right] \frac{4}{5} f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-9}{5} & \frac{-17}{5} \end{array}\right] f_1 + \frac{3}{2} f_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-7}{10} & \frac{-1}{10} \\ 0 & 1 & \frac{-9}{5} & \frac{-17}{5} \end{array}\right]$$

Aquí finaliza el método de reducción de Gauss-Jordán. Las ecuaciones resultantes son:

$$x - \frac{7}{10} z = \frac{-1}{10}$$

$$y - \frac{9}{5} z = \frac{-17}{5}$$

Note que z (que esta presente en las dos ecuaciones) es la variables libre. Por lo tanto, despejamos x y y, tenemos:

$$x = \frac{-1}{10} + \frac{7}{10} z$$

$$y = \frac{-17}{5} + \frac{9}{5} z$$

$$z = z$$

Si designamos a $z = t$

Nos queda

$$x = \frac{-1}{10} + \frac{7}{10} t$$

$$y = \frac{-17}{5} + \frac{9}{5} t$$

$$z = t$$

Que son la ecuaciones paramétricas de la recta en que se intersectan los dos planos π_1 y π_2

Obtengamos (para verificar) un punto a partir de las ecuaciones paramétricas y veamos que satisface las ecuaciones de los dos planos.

Sea $t = 1$, entonces:

$x = -10 + \frac{7}{10}$; $x = \frac{6}{10}$; $x = \frac{3}{5}$

$y = \frac{-17}{5} + \frac{5}{5}$; $y = \frac{-8}{5}$

$z = 1$

Tenemos el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{-8}{5}, 1\right)$

Ahora sustituyámoslo en la ecuación del plano π_1: $2x - 3y + 4z = 10$

$$2\left(\frac{3}{5}\right) - 3\left(\frac{-8}{5}\right) + 4(1) = 10$$

$$\frac{6}{5} + \frac{24}{5} + 4 = 10$$

$$\frac{6 + 24 + 20}{5} = 10$$

$$\frac{50}{5} = 10$$

$$10 = 10$$

Y en π_2: $4x - y - z = 3$

$$4\left(\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{8}{5}\right) - (1) = 3$$

$$\frac{12}{5} + \frac{8}{5} - 1 = 3$$

$$\frac{12 + 8 - 5}{5} = 3$$

$$\frac{15}{5} = 3$$

$3 = 3$

Definición: Tres vectores *u*, *v* y *w* son coplanares (están en el mismo plano), si y solo si su triple producto escalar es cero, es decir si $u \bullet (v \times w) = 0$

8. ESPACIOS VECTORIALES

Definición: Un espacio vectorial *V* sobre un campo *k* (pueden ser los numero reales), es un conjunto de objetos que se pueden sumar y se pueden multiplicar por elementos de k, de tal forma que la suma de dos elementos de V es, de nuevo un elemento de V, el producto de un elemento de V por un elemento de k es un elemento de V, y además se satisfacen las siguiente propiedades:

1. Dados lo elementos de *x, y, z,* de V, se tiene que:

   $$(x+y)+z = x+(y+z)$$

2. Existe un elemento de V, denotado por 0, tal que:

   $$0+x = x+0 = x$$

   Para todos lo elementos de *x* de V.

3. Dado un elemento *x* de V, el elemento $-x$ en V , y es tal que:

   $$x+(-x)=0$$

4. Para todos lo elementos de x, y de V se tiene que:

   $$x+y = y+x$$

5. Si α es un numero, entonces $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

6. Si α y β son números, entonces:

   $$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$

7. Si α y β son números, entonces:

   $$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

8. Para todos lo elementos de *x* de V se tiene que $1 \cdot x = x$ (donde 1 es el numero 1) [22]

Ejemplo 1:

Demuestre que las matrices de 2×2 con entradas en los números reales, son un espacio vectorial.

Solución:

Antes de iniciar debemos caracterizar como es un elemento cualquiera de este espacio (que podemos llamar $M_{2\times 2}$)

Sean $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$, $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$ y $C=\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$

Debemos verificar ue las condiciones expresadas en las propiedades de un espacio vectorial, se satisfacen.

Primero, debemos ver ue si tomamos dos elementos de $M_{2\times 2}$ y los sumamos, el resultado es nuevamente un elemento de $M_{2\times 2}$.

Sea $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$ y $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$

Entonces,

$$A+B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$$

Segundo, debemos ver ue si tomamos un elemento de $M_{2\times 2}$ y lo multiplicamos por un escalar, el resultado sigue siendo un elemento de $M_{2\times 2}$.

Sea $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$ y $\alpha\in R$,

Entonces,

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha c \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$$

A las dos anteriores propiedades se les acostumbra denominar como: cerradura con respecto a la suma y con respecto a la multiplicación por escalar.

Ahora verifiquemos las restante ocho (8) propiedades:

1. Dados lo elementos *x, y, z,* de V, se tiene que:

$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

Veamos que

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

Tenemos

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+e)+k & (b+f)+l \\ (c+g)+m & (d+h)+n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+e+k & b+f+l \\ c+g+m & d+h+n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+(e+k) & b+(f+l) \\ c+(g+m) & d+(h+n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e+k & f+l \\ g+m & h+n \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\right) = A+(B+C)$$

2. Existe un elemento de V, denotado por 0, tal que:

$$0+x = x+0 = x$$

Para todos lo elementos de *x* de V.

Veamos que

$$0+A = A+0 = A$$

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ y $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Entonces

$$0+A=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+a & 0+b\\0+c & 0+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+0 & b+0\\c+0 & d+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=A+0=A$$

3. Dado un elemento x de V, el elemento $-x$ en V es tal que:

$$x+(-x)=0$$

Veamos que

$$A+(-A)=0$$

Sea $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$ y $-A=\begin{bmatrix}-a & -b\\-c & -d\end{bmatrix}$

Entonces

$$A+(-A)=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-a & -b\\-c & -d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-a & b-b\\c-c & d-d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=0$$

4. Para todos lo elementos de x, y de V se tiene que:

$$x+y=y+x$$

Veamos que

$$A+B=B+A$$

Sea $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$ y $B=\begin{bmatrix}e & f\\g & h\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$

Entonces

$$A+B=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e & f\\g & h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+e & b+f\\c+g & d+h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e+a & f+b\\g+c & h+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e & f\\g & h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=B+A$$

5. Si α es un numero, entonces $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

Veamos que

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

Sea $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$, $B=\begin{bmatrix}e & f\\g & h\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$ y $\alpha\in R$

Entonces

$$\alpha(A+B)=\alpha\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)=\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h \end{bmatrix}=\alpha A+\alpha B$$

6. Si α y β son números, entonces:

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$

Veamos que

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

Sea $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$ y $\alpha,\beta\in R$

Entonces

$$(\alpha+\beta)A=(\alpha+\beta)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\alpha+\beta)a & (\alpha+\beta)b \\ (\alpha+\beta)c & (\alpha+\beta)d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a+\beta a & \alpha b+\beta b \\ \alpha c+\beta c & \alpha d+\beta d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta d \end{bmatrix}$$
$$\alpha A+\beta A$$

7. Si α y β son números, entonces:

$$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$$

Veamos que

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$$

Sea $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$ y $\alpha,\beta\in R$

Entonces

$$(\alpha\beta)A=(\alpha\beta)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\alpha\beta)a & (\alpha\beta)b \\ (\alpha\beta)c & (\alpha\beta)d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha\beta a & \alpha\beta b \\ \alpha\beta c & \alpha\beta d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha(\beta a) & \alpha(\beta b) \\ \alpha(\beta c) & \alpha(\beta d) \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} (\beta a) & (\beta b) \\ (\beta c) & (\beta d) \end{bmatrix}=$$
$$\alpha(\beta A)$$

8. Para todos lo elementos de *x* de V se tiene que $1\cdot x=x$ (donde 1 es el numero 1)

Veamos que

$$I\bullet A=A$$

Sea $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}$ y $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Entonces

$$I \bullet A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=A$$

Como los elementos de $M_{2\times2}$ satisfacen todas las propiedades, entonces $M_{2\times2}$ es un Espacio Vectorial.

Nota: Para ver que un conjunto no es un espacio vectorial, basta con encontrar un ejemplo que no satisfaga alguna de las propiedades (a este ejemplo lo denominamos "contra-ejemplo")

Ejemplo 2:

Determine si $V=\{(x,y): x\geq 0; x\in R, y\in R\}$ con la suma y multiplicación por escalar usual, es un espacio vectorial.

Solución:

Antes de iniciar debemos caracterizar como es un elemento cualquiera de este espacio (que podemos llamar V)

Sean $\vec{u}=(a,b)$ y $\vec{v}=(d,e)$ con $a,d\geq 0$ y $b,e\in R$

Note que las propiedades de cerradura se satisfacen, sin embargo, la propiedad del inverso aditivo no. Para esto veamos el siguiente ejemplo (realmente, contra-ejemplo):

Según la propiedad 3 (dado un elemento x de V, el elemento $-x$ en V es tal que, $x+(-x)=0$)

Sea $\vec{u}=(2,3)$ entonces, claramente buscamos un vector, llamémoslo $\vec{v}$, tal que, $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$.

Note que $\vec{v}$ debe ser de la forma $\vec{v}=(-2,-3)$, pero advierta que $v\notin V$, ya que, a partir de la caracterización inicial se tendría que $-2\geq 0$ lo cual es falso.

De lo anterior se tiene que V no es un espacio vectorial.

PROBLEMAS

1. Utilice el método de eliminación de Gauss – Jordán para encontrar todas las soluciones, si existen, para los sistemas dados.

a. $$\begin{aligned} x+2y+z&=3\\ 4x+y-5z&=5\\ 2x-2y+3z&=0 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} x-2y-z&=-4\\ 4x-y+5z&=4\\ 3x-6y-3z&=3 \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} 2x_2+7x_3&=9\\ 3x_1-2x_3&=-2\\ x_1+4x_2&=4 \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} x_1+2x_2-5x_3&=4\\ 3x_1-2x_2-12x_3&=7 \end{aligned}$$

Respuestas: a. $x=1; y=1; z=0$

b. Sistema inconsistente

c. $x=0; y=1; z=1$

d. Infinitas soluciones: $\left(\frac{11}{4}+\frac{17}{4}z, \frac{5}{8}+\frac{3}{8}z, z\right)$

2. Encuentre las soluciones (si las hay) de los sistemas dados.

a. $$\begin{aligned} 2x-3y&=4\\ -3x+7y&=-6 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 3x+y&=5\\ x+3y&=5 \end{aligned}$$

Respuestas: a. $x=2; y=0$ b. $x=\frac{5}{4}; y=\frac{5}{4}$

3. Encuentre la distancia entre la recta $x-y=3$ y el punto de intersección de las rectas $2x-y=-1$ y $x+6y=-7$

Respuesta: $Dist=\frac{\sqrt{18}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. Escriba el sistema dado en la forma $Ax=b$

$$14x_1 - x_2 + 3x_3 = 11$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = -14$$
$$2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1$$

Respuesta: $\begin{bmatrix} 14 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -14 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Resuelva el sistema dado usando la factorización LU encontrada en el problema anterior.

Esto es, resuelva $Ax = LUx = b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Respuesta: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5/2 & 1 \end{bmatrix}; U \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 41/2 \end{bmatrix}$ $Ly = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$ De aquí,

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ Ahora, $Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 41/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, por tanto $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

6. Resuelva los siguientes sistemas empleando para ello la regla de Cramer.

a. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 4x_2 - 5x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 - x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 8 \\ -2x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$

Respuestas: a. $x_1 = \dfrac{40}{40} = 1$; $x_2 = \dfrac{40}{40} = 1$; $x_3 = \dfrac{0}{40} = 0$

b. $x_1 = \dfrac{0}{-62} = 0$; $x_2 = \dfrac{-62}{-62} = 1$; $x_3 = \dfrac{-62}{-62} = 1$

7. Encuentre las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta indicada:

a) Contiene a $(-2,5,-4)$ y $(2,0,-4)$

b) Contiene a $(-1,5,2)$ y es paralela a $4\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$

c) Contiene a $(1,1,-2)$ y es paralela a $\frac{x-7}{8}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-2}{4}$

Respuestas:

a. $\begin{aligned} x &= -2+4t \\ y &= 5-5t \\ z &= -4 \end{aligned}$ $\qquad \frac{x+2}{4}=\frac{y-5}{-5};z=-4$

b. $\begin{aligned} x &= -1+4t \\ y &= 5+3t \\ z &= 2-3t \end{aligned}$ $\qquad \frac{x+1}{4}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-2}{-3}$

c. $\begin{aligned} x &= 1+8t \\ y &= 1-4t \\ z &= -2+4t \end{aligned}$ $\qquad \frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+2}{4}$

8. Encuentre una recta L ortogonal a las dos rectas dadas y que pase por el punto dado:

$\frac{x+2}{-3}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{5}$; $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+6}{7}$; $(4,3,-1)$

Respuesta:

$$\begin{aligned} x &= 4+31t \\ y &= 3+11t \\ z &= -1+12t \end{aligned}$$

9. Encuentre la ecuación del plano que:

a) $P=(-1,3,3);n=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

b) Contiene a $(-4,1,2),(-2,-1,-3)$ y $(-3,1,5)$

Respuestas: a. $2x+3y+z=10$ b. $-6x-11y+2z=17$

10. Halle <u>todos</u> los puntos de intersección de los planos $\pi_1:-5x+y-z=13$ y $\pi_2:-4x+3y-7z=5$.

Respuesta: Los puntos de intersección se hallan en la recta

$$x = \frac{-34}{11} + \frac{4}{11}t$$
$$y = \frac{-27}{11} + \frac{31}{11}t$$
$$z = t$$

AUTOEVALUACION

1. Considere el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 10x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned}$$

¿Para que valores de k tendrá soluciones no – triviales?

2. Dadas las rectas

$$L_1 : \frac{x+2}{2} = \frac{y-7}{8} = \frac{z+5}{-2} \quad \text{y} \quad L_2 : \frac{x+4}{-1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{3}$$

Demuestre que son ortogonales

3. Demuestre que las rectas $L_1 : x = 2-3t, y = -3+t, z = 4-2t$ y

$L_2 : x = 1-2s, y = 4-2s, z = 3-s$, no tienen un punto en común.

4. Determine si los planos

$\pi_1 : -2x + 7y - 4z = 2$ y $\pi_2 : -3x + 2y + z = 1$ son paralelos ó no. De no ser paralelos, encuentre la ecuación paramétrica de la recta en la cual se interceptan.

SOLUCIÓN:

1. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 10x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned}$$

Vamos a emplear determinantes, ya que, sabemos que si $\det A = 0$, entonces el sistema (dado que es homogéneo) tendrá infinitas soluciones.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 4 & -10 & k \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -10 & k \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & k \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= 2[k-10] + [-3k+4] + 5[30-4] = 2k - 20 - 3k + 4 + 150 - 20 = -k - 114$$

Igualando este ultimo resultado a cero, obtenemos:

$-k - 114 = 0$ Entonces, $k = -114$

2. Dadas las rectas

$$L_1 : \frac{x+2}{2} = \frac{y-7}{8} = \frac{z+5}{-2} \quad \text{y} \quad L_2 : \frac{x+4}{-1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{3}$$

Demuestre que son ortogonales

Note que cada una de las rectas tiene un vector de dirección, que en la literatura del capitulo denominamos vector $\hat{v}$, y que es paralelo a la recta.

Entonces, las rectas L_1 y L_2 serán ortogonales, si sus vectores de dirección también lo son.

Para L_1, tenemos el vector $\hat{v}_1 = (2,8,-2)$

Para L_2, tenemos el vector $\hat{v}_2 = (-1,1,3)$

Ahora, realicemos el producto escalar $(v_1 \bullet v_2) = (2,8,-2) \bullet (-1,1,3) = -2 + 8 - 6 = 0$, por lo tanto los vectores de dirección son ortogonales, asi que las rectas también lo son.

3. Demuestre que las rectas $L_1 : x = 2 - 3t, y = -3 + t, z = 4 - 2t$ y $L_2 : x = 1 - 2s, y = 4 - 2s, z = 3 - s$, no tienen un punto en común.

Supongamos lo contrario, es decir, que si tienen un punto en común (sea este $P = (x_0, y_0, z_0)$).

Si P es un punto de L_1, debe satisfacer su ecuación para algún valor de t. Entonces,

$$x_0 = 2 - 3t$$
$$y_0 = -3 + t \qquad (1)$$
$$z_0 = 4 - 2t$$

Si P es un punto de L_2, debe satisfacer su ecuación para algun valor de s. Entonces,

$$x_0 = 1 - 2s$$
$$y_0 = 4 - 2s \qquad (2)$$
$$z_0 = 3 - s$$

De la igualdad de los lados izquierdos de (1) y (2), se tiene que:

$$\begin{aligned} 2 - 3t &= 1 - 2s \\ -3 + t &= 4 - 2s \\ 4 - 2t &= 3 - s \end{aligned} \qquad \text{Ordenando el sistema} \qquad \begin{aligned} -3t + 2s &= -1 \\ t + 2s &= 7 \\ -2t + s &= -1 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior, vemos que

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right] f_1 \leftrightarrow f_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right] f_2 + 3f_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 8 & 20 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right] f_3 + 2f_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 8 & 20 \\ 0 & 5 & 13 \end{array}\right] \frac{1}{8} f_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 5 & 13 \end{array}\right] f_3 - 5f_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

Aquí podemos detenernos, ya que la ultima ecuación nos dice que $0 = \frac{1}{2}$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, no hay valores de t y de s tales que, el sistema tenga solución. De esto se desprende que las dos rectas no tienen puntos en común.

4. Determine si los planos

$\pi_1 : -2x + 7y - 4z = 2$ y $\pi_2 : -3x + 2y + z = 1$ son paralelos ó no. De no ser paralelos, encuentre la ecuación paramétrica y simétrica de la recta en la cual se interceptan.

Note que cada uno de los planos tiene un vector normal, que en la literatura del capitulo denominamos vector $\vec{n}$, y que es perpendicular al plano.

Entonces, los planos π_1 y π_2 serán paralelos, si sus vectores normales también lo son.

Para π_1 , tenemos el vector $\hat{n}_1 = (-2,7,-4)$

Para π_2 , tenemos el vector $\hat{n}_2 = (-3,2,1)$

Para determinar si son o no paralelos, realicemos el producto vectorial de $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ (dado que podemos encontrar el producto vectorial a partir del determinante, note que si una fila es un múltiplo escalar de otra entonces por las propiedades estudiadas de los determinantes, este determinante será cero (0)).

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 7 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15\hat{i} + 14\hat{j} + 17\hat{k} \neq 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

Por lo tanto los vectores no son paralelos, de donde lo planos tampoco lo son. Como no son paralelos se intersectan en una recta. Para encontrar la ecuación de la recta debemos resolver simultáneamente las ecuaciones que representan los planos.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 7 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] -\frac{1}{2}f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] f_2 + 3f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & -1 \\ 0 & -17/2 & 7 & -2 \end{array}\right] -\frac{2}{17}f_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -14/17 & 4/17 \end{array}\right] f_1 + \frac{7}{2}f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -15/17 & -3/17 \\ 0 & 1 & -14/17 & 4/17 \end{array}\right]$$

De la última matriz, se obtiene el sistema:

$$x - \frac{15}{17}z = -\frac{3}{17}$$
$$y - \frac{14}{17}z = \frac{4}{17}$$

Si hacemos la asignación $z = t$, y despejamos x y y en el sistema anterior, nos queda:

$$x = -\frac{3}{17} + \frac{15}{17}t$$
$$y = \frac{4}{17} + \frac{14}{17}t$$
$$z = t$$

Que es la ecuación paramétrica de la recta en la que se intersectan los dos planos.

APENDICE

Teorema: Sea A una matriz de n x n. entonces A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$. Si $\det A = 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$$

Demostración:

Para probar el anterior resultado, es necesario probar primero el siguiente

teorema: Sea A una matriz de $n \times n$ entonces,

$$(A)(adjA) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \bullet\ \bullet\ \bullet & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \bullet\ \bullet\ \bullet & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \bullet\ \bullet\ \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet\ \bullet\ \bullet & \det A \end{bmatrix} = (\det A)I$$

Demostración: Sea $C = (c_{ij}) = (A)(AdjA)$. Entonces,

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \bullet\ \bullet\ \bullet & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \bullet\ \bullet\ \bullet & a_{2n} \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \bullet\ \bullet\ \bullet & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \bullet\ \bullet\ \bullet & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \bullet\ \bullet\ \bullet & A_{n2} \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ A_{1n} & A_{2n} & \bullet\ \bullet\ \bullet & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Se tiene $c_{ij} =$ (renglón i de A). (Columna j de Adj A)

$$= \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \bullet\ \bullet\ \bullet & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ A_{jn} \end{pmatrix}$$

Así, $$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}$$

Ahora si $i = j$, la suma anterior es igual a $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ que es la expansión de $\det A$ sobre el renglón i de A. Por otro lado, si $i \neq j$, entonces la suma es cero. Por lo tanto,

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & si\ \underline{i = j} \\ \\ 0 & si\ \underline{i \neq j} \end{cases}$$

Esto prueba el teorema. [25]

Ahora si estamos en condiciones de probar el teorema inicial.

Demostración:

Si $\det A \neq 0$, entonces por el teorema anterior se tiene que $\left(\frac{1}{\det A}\right)(AdjA)$ es la inversa de A multiplicándola por A y obteniendo la matriz identidad:

$$(A)\left(\frac{1}{\det A}AdjA\right) = \frac{1}{\det A}\left[A(AdjA)\right] = \frac{1}{\det A}(\det A)I = I$$

Pero, ya sabemos que si $AB = I$, entonces $B = A^{-1}$. Por tanto,

$$\left(\frac{1}{\det A}\right)AdjA = A^{-1} \quad [26]$$

<u>Teorema</u>: Sea A una matriz de 2x2. Entonces:

iii. Sea A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$

iv. Si $\det A \neq 0$, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Demostración:

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$\Rightarrow$) Supongamos que $\det A \neq 0$ y sea

$B = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$. Entonces (verifiquemos el siguiente producto)

$$BA=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{21}a_{12}+a_{11}a_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

De la misma forma, hacemos $AB=I$. Lo que demuestra que A es invertible y que $B=A^{-1}$.

Todavía falta demostrar que si A es invertible, entonces $\det A\neq 0$. Para esto veamos el sistema

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$$

Se sabe que si este sistema tiene solución única, entonces $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$. El sistema se puede escribir en la forma $Ax=b$. Entonces como A es invertible, el sistema tiene una única solución dada por $x=A^{-1}b$.

Pero del teorema 1, se tiene que el hecho que el sistema tenga una solución única implica que $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\det A\neq 0$. Lo que completa la prueba. [23]

REFERENCIAS

[1] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 252
[2] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 243
[3] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 254
[4] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 261
[5] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 263
[6] POOLE, David. ALGEBRA LINEAL UNA INTRODUCCION MODERNA. Primera edición. 2004. Pag. 67
[7] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 99
[8] POOLE, David. ALGEBRA LINEAL UNA INTRODUCCION MODERNA. Primera edición. 2004. Pag. 169
[9] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL. Quinta edición. 2003. Pág. 132
[10] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 147
[11] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 173
[12] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 175
[13] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 178
[14] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 211
[15] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 214
[16] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 104
[17] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 262
[18] POOLE, David. ALGEBRA LINEAL UNA INTRODUCCION MODERNA. Primera edición. 2004. Pag. 58
[19] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 219
[20] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 274
[21] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 280
[22] LANG, Serge. ALGEBRA LINEAL. Primera edición. 1974. Pag. 40, 41
[23] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 104
[24] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 5
[25] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 213
[26] GROSSMAN, Stanley. ALGEBRA LINEAL . Quinta edición. 2003. Pag. 214