

TEMA 2 SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

24. Para cada proposición, identifica su hipótesis y conclusión; escribe su recíproca y determina su valor de verdad. Si es falsa, da un contraejemplo.

a) $\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2, b = 3$

b) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b$

c) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} \Rightarrow a = b$ con $a, b \neq 0$.

d) Si $x > 0, y > 0, x > y, z \neq 0$, entonces $\frac{x}{z^2} > \frac{y}{z^2}$

25. Demuestra por el método directo cada una de las propiedades de los números reales:

a) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

b) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

c) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$

d) $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = a$

e) $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = a$

f) $\forall a \in \mathbb{R}, a + (-a) = 0$

g) $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, a \left(\frac{1}{a}\right) = 1$

h) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a(b + c) = ab + ac$

TEMA 3 DESIGUALDADES. INECUACIONES

26. Encuentra todos los valores de x que satisfagan simultáneamente ambas desigualdades.

a) $3x + 7 > 1 \wedge 2x + 1 < 3$

b) $3x + 7 > 1 \wedge 2x + 1 > -4$

c) $3x + 7 > 1 \wedge 2x + 1 < -4$

27. Encuentra todos los valores de x que satisfagan al menos una de las dos desigualdades.

a) $3x + 7 > 1 \vee 2x + 1 < -5$

b) $3x + 7 \leq 1 \vee 2x + 1 < -8$

c) $3x + 7 \leq 1 \vee 2x + 1 > -8$

28. Si se dan los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} : $A = (-3, 8)$, $B = (-\infty, 3]$ y $C = [6, +\infty)$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) $(A \cup B) \subset (-\infty, 7]$

b) $(C - A) = [8, +\infty)$

c) $(A \cap C) \cup B = (6, 8) \cup (-\infty, -3)$

d) $A^c = (-\infty, 3] \cup [8, +\infty)$

29. Dados los conjuntos:

$$A = \mathbb{N} \cap [(5, 8) \cup [20, 36]]$$

$$B = \mathbb{N} \cap (7, 24]$$

$$C = \mathbb{N} \cap (22, 40]$$

$$D = [(B \cup C) - (C - B)] \cup (A - B)$$

$$E = C \cup [(A - B) \cup C^c]^c, \text{ (Complemento en } \mathbb{N})$$

encuentra el número de elementos de $D \cap E$.

30. Resuelve cada una de las siguientes inecuaciones expresando tu respuesta en notación de intervalos.

a) $13 \geq 2x - 3 \geq 5$

b) $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$

c) $(x + 2)(2x - 1)(3x + 7) \geq 0$

d) $(2x + 3)(3x - 1)^2(x - 5) < 0$

e) $(x + 5)(x + 2)^2(2x - 1) > 0$

f) $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$

g) $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

h) $\frac{4x}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7$

i) $\frac{5}{x} < \frac{3}{4}$

j) $x^2 \leq 9$

k) $\frac{2}{1-x} \leq 1$

l) $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$

m) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x}$

n) $x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 14x^2 + 3x + 9 < 0$

o) $\frac{(1-x)(2+x)}{(x+1)^2(x^2+4)} > 0$

p) $\frac{2x^2+x+3}{x^3-x} > 0$

q) $(x^2+1)^2 - 7(x^2+1) + 10 < 0$

r) $(x+1)(x^2+2x-7) \geq x^2-1$

s) $\frac{4}{x+2} + \frac{12}{x-5} \geq 0$

t) $\frac{x^2-x-20}{x^3-3x^2+x-3} \leq 0$

31. Si A es el conjunto solución de: $\frac{(1-x)(2+x)}{(x+1)^2(x^2+4)} > 0$.

y B es el conjunto solución de la inecuación $\frac{3x+2}{x-1} < 8$,

halla $A^c \cap B$.

32. Halla el menor valor de t que satisfaga la desigualdad $9 - 2t - 4x^2 \leq -7, \forall x \in \mathbb{R}$.

33. Determina para qué valor de k la inecuación $(x + k)(x + 3) > (x + 2k)(x + 2)$ tiene por conjunto solución el intervalo $(-\infty, -2)$.
34. En \mathbb{R} se define la operación binaria $*$ de la siguiente manera: $a * b = a - b + 2$. Aplicando esta definición resuelve $2^{-1} * x \leq (2x * 5) * (1 * 2)^{-1}$.

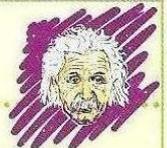
TEMA 4 VALOR ABSOLUTO

35. Resuelve:
- a) $|4x + 3| = 7$ e) $|x - 5| + |6 - 4x| = 2$
 b) $|5x - 3| = |3x + 5|$ f) $|x - 2| = |2x + 3|$
 c) $2x + 3 = |4x + 5|$ g) $|x + 2| + 4 = |x + 3|$
 d) $\left| \frac{3x + 8}{2x + 3} \right| = 4$ h) $|3x + 2| = 5 - x$
36. Cada desigualdad de la izquierda equivale exactamente a una de la derecha. Determina todas las parejas equivalentes.
- a) $|x| < 3$ g) $-1 \leq x \leq 0$
 b) $|x - 1| < 3$ h) $1 < x < 2$
 c) $|3 - 2x| < 1$ i) $x > 3 \vee x < -1$
 d) $|1 + 2x| \leq 1$ j) $-3 < x < 3$
 e) $|x - 1| > 2$ k) $x \leq -7 \vee x \geq 3$
 f) $|x + 2| \geq 5$ l) $-2 < x < 4$
37. Encuentra el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones:
- a) $|3x + 4| < 8$ j) $|x - 2|^2 - 3|x - 2| - 4 > 0$
 b) $\left| \frac{3x}{5} + 1 \right| \leq 4$ k) $\left| \frac{1}{x - 2} \right| > 2 - |x - 2|$
 c) $|2x - 7| > 3$ l) $\left| \frac{5}{2x - 1} \right| \geq \left| \frac{1}{x - 2} \right|$
 d) $\left| \frac{x}{2} + 7 \right| \geq 2$ m) $\frac{|2x + 1| - x}{x} \leq 2$
 e) $\left| 2 + \frac{5}{x} \right| > 1$ n) $|x| + 2|x - 1| - |2x - 5| < 3$
 f) $\left| \frac{1 + x}{x - 1} \right| > 7$ o) $\frac{|x + 4| - |x - 5|}{x - 7} \leq 1$
 g) $\left| \frac{-1}{2 + x} \right| \leq \frac{1}{6}$ p) $\frac{|x + 1| - 2}{x^2 \mp |x|} \geq 1$
 h) $|5 - 3x| > 2x + 6$ q) $\frac{|x + 8|}{x^2 - 4} \geq \frac{x - 3}{x - 4}$
 i) $|3x + 1| \leq 5x + 2$ r) $\left| \frac{x + 8}{x^2 - 4} \right| - \left| \frac{x - 3}{x - 9} \right| \leq |x - 2|$

ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

38. **Economía.** Un automóvil nuevo fue adquirido en \$14.500.000. Tres años después su valor era \$9.100.000. Supón que la depreciación está dada por una ecuación lineal. Encuentra la ecuación y el valor del automóvil cuando tenga una antigüedad de seis años.
39. **Economía.** Un estudiante universitario recibe un préstamo libre de intereses de \$8.250.000 de un pariente. El estudiante pagará \$125.000 mensuales hasta liquidarlo.
- a) Expresa la cantidad P (en pesos) que falta pagar en términos del tiempo t (en meses).
 b) ¿Después de cuántos meses la deuda del estudiante será \$5.000.000?
 c) Realiza una gráfica, en el plano tP que indique una relación entre P y t durante la vigencia del préstamo.
40. **Medicina.** El crecimiento de un feto de más de 12 semanas se puede aproximar mediante la fórmula $L = 1,53t - 6,7$; en la cual L es la longitud en cm, y t la edad en semanas. La longitud prenatal se puede determinar mediante ultrasonido. Calcula la edad aproximada de un feto cuya longitud es 28 cm.
41. **Medicina.** En fisiología, el ritmo cardiaco de un corredor N , en latidos por minuto, se relaciona de manera lineal con la velocidad s del corredor. El ritmo cardiaco de un corredor es de 80 latidos por minuto a una velocidad de 15 pies/segundo y 85 latidos por minuto a una velocidad de 18 pies/segundo.
- a) Escribe una ecuación que exprese N en términos de t .
 b) Utiliza la ecuación obtenida en el inciso a) para predecir el ritmo cardiaco del corredor a una velocidad de 25 pies/segundo.

INGENIO



EL CLAUSTRO DEL MONASTERIO

Un monasterio medieval fue construido alrededor de un claustro con forma cuadrada. En el claustro está el pozo que abastecía de agua a los monjes. El pozo está situado de tal modo que la distancia a las tres esquinas consecutivas es de 30 m, 40 m y 50 m, respectivamente. ¿Cuál es el tamaño del claustro?

